

**QUATRIEME COLLOQUE SUR LE
TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS**

Nice 7 au 12 mai 1973

ETUDE THEORIQUE ET CONCEPTION D'UN AMBIGUIMETRE EN TEMPS REEL

Philippe GARDERET* - Wlodzimierz KOFMAN**

** Ingénieur au Centre d'Etudes des Phénomènes Aléatoires de Grenoble

* Ingénieur au Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble
Laboratoire d'Electronique et de Technologie de l'Informatique
Division de Traitement du Signal

RESUME

Le calcul de la fonction d'ambiguïté d'un signal s'avère d'une grande utilité dans de nombreux problèmes de détection et de communications (aussi bien en milieu aérien qu'en milieu sous-marin) ; c'est aussi une approche possible aux études des signaux dans le domaine temps-fréquence (spectre instantané par exemple).

On montre ici que le calcul peut être réalisé simplement, par une quantification à deux niveaux seulement, sous réserve d'addition sur chacune des deux voies de signaux auxiliaires convenablement choisis.

Après avoir étudié la convergence de l'estimateur proposé et présenté les résultats obtenus par simulation, on expose le schéma d'ensemble prévu pour la réalisation d'un ambiguïmètre en temps réel.

SUMMARY

Computation of the ambiguity-function of a signal is quite useful in detection and communication problems (either in aerial or in underwater propagation) ; it is also one way for analysing signals in the time-frequency domain (instantaneous spectra for instance).

It is shown here that the computation can be simply achieved by an only two-level quantization, when adding well chosen auxiliary signals on the two inputs.

After a study of the convergence of the proposed estimator, and having shown some results of simulation, we given the general scheme for realisation of a real-time ambiguïmeter.

Ce travail est soutenu par la division Acoustique Mesures de la Direction des Recherches et Moyens d'Essais

ETUDE THEORIQUE ET CONCEPTION D'UN AMBIGUIMETRE EN TEMPS REEL

Philippe GARDERET - Wlodzimierz KOFMAN

1. INTRODUCTION

Parmi les déformations subies par un signal, les opérations de translations en temps et fréquences, sont assez courantes. L'effet de ces translations sur le signal peut être évalué par la quantité :

$$\epsilon^2 = \|X(t) - X(t-\tau) \exp(-2 \Pi j \nu t)\|^2$$

Si on se limite aux signaux appartenant à l'espace de Hilbert, des fonctions de module sommable sur \mathbb{R} (ou une partie de \mathbb{R}) et dans lequel le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ de deux fonctions est donné par :

$$\langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt$$

alors ϵ^2 s'écrit :

$$\epsilon^2 = \|X(t)\|^2 + \|X(t-\tau)\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle X(t), X(t-\tau) \exp(2 \Pi j \nu t) \rangle$$

Si E est l'énergie du signal, on a :

$$E = \|X(t)\|^2 = \|X(t-\tau)\|^2$$

et il vient:

$$\epsilon^2 = 2 E - 2 \operatorname{Re} \chi(\tau, \nu)$$

avec :

$$\chi(\tau, \nu) = \int_{\mathbb{R}} X(t) X^*(t-\tau) \exp(-2 \Pi j \nu t) dt \quad (1)$$

La fonction $\chi(\tau, \nu)$ apparaît donc comme directement liée à la séparabilité du signal et de ses translatés en temps et en fréquence, d'où le nom de "fonction d'ambiguïté" [1] [2].

Cette notion peut être étendue aux fonctions aléatoires [14].



L'intérêt de la connaissance de la fonction d'ambiguïté dans les problèmes de détection (radar et sonar) et dans ceux des télécommunications est immense et se déduit de la définition même de cette quantité.

Moins intuitive peut-être et moins exploitée pour l'instant est la parenté entre la fonction d'ambiguïté et les notions de spectre instantané et de densité énergétique dans le domaine temps-fréquence (pour les définitions et propriétés de ces notions, voir [3], [4], [5]).

Nous rappellerons simplement que si $\epsilon(t, f)$ est la densité énergétique dans le domaine temps-fréquence :

$$\stackrel{\text{Def}}{\epsilon(t, f)} = x(t) X^*(f) e^{-2\pi i ft} \quad (2)$$

alors on a la relation :

$$\chi(\tau, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \epsilon(t, f) e^{2\pi j(\nu t + \tau f)} dt df$$

On conçoit alors que la mesure des auto ou inter-ambiguïtés aux différents stades de transformation d'un signal dans des appareillages linéaires, éclaire sur les déplacements énergétiques dans le domaine temps-fréquence.

De plus, il est possible, dans un même ordre d'idée, de généraliser les techniques bien connues d'identification des filtres homogènes [6], aux filtres non homogènes [7], [8].

De toutes ces considérations, il ressort que le calcul en temps réel de la fonction $\chi(\tau, \nu)$ s'avère très utile dans de nombreux problèmes de traitement de signal.

Or, le calcul en temps réel de la fonction :

$$\chi(\tau, \nu) = \int_{\mathbb{R}} X(t) X^*(t-\tau) \exp(-j 2\pi \nu t) dt$$

nécessite, par voie directe, une quantité considérable de multiplieurs en parallèle. La réalisation par cette méthode ne pourrait être que volumineuse et très coûteuse.

Pour cette raison, on a développé [9] et on va exposer ici un système d'estimation de $\chi(\tau, \nu)$.

La méthode s'appuie sur un résultat important de la théorie des variables aléatoires. Ce résultat fait l'objet du théorème décrit dans le paragraphe (2).

2. THEOREME

a) Enoncé

- . Soit N variables aléatoires X_1, \dots, X_n telles que
 $\max (X_i) \leq A_i \quad \forall_i \in [1, n]$
- . Soit $Y_i \quad i \in [1, n]$ des variables aléatoires uniformément réparties entre $[- A_i$ et $+ A_i]$, indépendantes entre elles et indépendantes des X_i .
- . Soient $Z_i \quad [i \in 1, n]$ les variables aléatoires $Z_i = X_i - Y_i$.

Alors on peut écrire :

$$A_1 \cdot A_2 \dots A_n \cdot E \{ \text{sign } Z_1 \cdot \text{sign } Z_2 \dots \text{sign } Z_n \} = E \{ X_1 \cdot X_2 \dots X_n \} \quad (3)$$

$$\text{ou sign } Z : \begin{cases} + 1 & \text{si } Z \geq 0 \\ - 1 & \text{si } Z < 0 \end{cases}$$

b) Démonstration

Soit $M(u_1, u_2, \dots, u_n)$ la fonction caractéristique de la variable n-dimensionnelle $(\text{sign } Z_1, \text{sign } Z_2, \dots, \text{sign } Z_n)$.

$$M(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_{(2n)-A_i}^{+A_i} \dots \int \exp(ju_1 \text{sign}(x_1 - y_1) + \dots + ju_n \text{sign}(x_n - y_n)) \cdot p(x_1, \dots, x_n) \cdot p(y_1) \dots p(y_n) dx_1 \dots dy_n$$



Or :

$$\frac{1}{2A_i} \int_{-A_i}^{+A_i} \exp(ju_i \operatorname{sgn}(x_i - y_i)) dy_i = \frac{1}{2A_i} \int_{-A_i}^{x_i} \exp(ju_i) dy_i + \frac{1}{2A_i} \int_{x_i}^{A_i} \exp(-ju_i) dy_i = \cos u_i + \frac{jx_i}{A_i} \sin u_i$$

Il vient alors :

$$M(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_{(n)} \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\cos u_i + \frac{jx_i}{A_i} \sin u_i \right) \right\} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

On a :

$$j^n E \{ \operatorname{sgn} Z_1 \dots \operatorname{sgn} Z_n \} = \left. \frac{\partial M(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \right|_{u_1 = \dots = u_n = 0}$$

Nous supposons que le $n^{\text{ième}}$ moment existe, il vient alors :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \right|_{u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0} &= \frac{j^n}{A_1 \dots A_n} \int_{(n)} p(x_1, \dots, x_n) x_1 \dots x_n dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{j^n}{A_1 \dots A_n} E \{ X_1 \dots X_n \} \quad \text{COFD} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{E \{ X_1 X_2 \dots X_n \} = A_1 \dots A_n E \{ \operatorname{sgn} Z_1 \dots \operatorname{sgn} Z_n \}} \quad (3)$$

γ) Généralisations - Application

1/ On peut montrer aisément qu'avec les mêmes hypothèses :

$$E \{ \operatorname{sgn} Z_1 \dots \operatorname{sgn} Z_k X_{k-1} \dots X_n \} = \frac{1}{A_1 \dots A_k} E \{ X_1 \dots X_n \} \quad (3')$$

2/ Soient $X(t)$ et $Y_i(t)$ $i \in (1, n)$ des processus aléatoires

On suppose $Y_i(t)$ stationnaire et tels que $Y_i(t_j)$ satisfassent aux conditions imposées.

On pose $Z_i(t) = X(t) + Y_i(t)$; on a alors :

$$E [X(t_1) \dots X(t_n)] = A_1 \dots A_n E [\text{sgn } Z_1(t_1) \dots \text{sgn } Z_n(t_n)] \quad (3'')$$

3/ Il peut aisément être montré que le théorème reste valable lorsque les échantillons sont extraits d'une fonction certaine $f(t)$ et on a :

$$A_1 \dots A_n E \{ \text{sgn } Z_1 \dots \text{sgn } Z_n \} = f(t_1) \dots f(t_n) \quad (3''')$$

Supposons que nous estimions la fonction d'ambiguïté à partir de la relation

$$\hat{\chi}(\tau, \nu) = A^2 \int_I \text{sgn } Z_1(t) \text{sgn } Z_2(t-\tau) \exp(-2 \Pi j \nu t) dt \quad (4)$$

Le théorème fondamental précédent garantit que l'estimateur ainsi calculé est sans biais.

$$E [\hat{\chi}(\tau, \nu)] = \chi(\tau, \nu) \quad \text{pour } X(t) \text{ certain}$$

$$E [\hat{\chi}(\tau, \nu)] = E [\chi(\tau, \nu)] \quad \text{pour } X(t) \text{ aléatoire [14]}$$

Nous ferons maintenant les hypothèses suivantes : (H)

- 1) $X(t)$ stationnaire et échantillonné $t = n \Delta t \quad n \in [0, N]$
- 2) Le signal analysé est à support borné, $T : X_1(t) = \Pi_T(t) X(t)$ (5)
- 3) Les échantillons $Y_i(n) Y_i(n+k)$ sont indépendants $\forall k \neq 0$
- 4) $Y(t)$ et $Y(t + \epsilon)$ indépendants pour $\epsilon \rightarrow 0 \quad \epsilon \neq 0$ (limite non physiquement réalisable).

La fonction d'ambiguïté :

$$\chi(k, \nu_1) = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^N \Pi_N(n) \Pi_N(n-k) X(n) X(n-k) \exp(-2 \Pi j \nu_1 n) \quad (6)$$

est alors estimée par :

$$\hat{\chi}(k, \nu_1) = \frac{TA^2}{N} \sum_{n=0}^N \Pi_N(n) \Pi_N(n-k) \text{sgn } Z_1(n) \text{sgn } Z_2(n-k) \exp(-2 \Pi j \nu_1 n) \quad (7)$$



Ayant établi que cet estimateur est non biaisé, nous allons étudier la convergence dans le paragraphe suivant en calculant l'erreur quadratique moyenne :

$$\epsilon_N^2 = E \left\{ |X(k, v_1) - \hat{X}(k, v_1)|^2 \right\} \quad (8)$$

3. CONVERGENCE DE L'ESTIMATEUR AVEC LE NOMBRE D'ECHANTILLONS

Si on développe l'expression précédente en tenant compte de (H) (5) (6) et (7), et si on tient compte des relations :

$$\forall n \neq m \quad E \left\{ X(n)X(n+k)X(m)X(m+k) \right\} = A^4 E \left\{ \begin{array}{l} \text{sgn } Z_1(n) \text{sgn } Z_2(n+k) \\ \text{sgn } Z_1(m) \text{sgn } Z_2(m+k) \end{array} \right\}$$

$$\forall n \quad \forall m \quad E \left\{ X(n)X(n+k)X(m)X(m+k) \right\} = A^2 E \left\{ \begin{array}{l} X(n)X(n+k) \\ \text{sgn } Z_1(m) \text{sgn } Z_2(m+k) \end{array} \right\}$$

et à cause de l'hypothèse de stationnarité :

$$E \left\{ X^2(n) X^2(n+k) \right\} = E \left\{ X^2(0) X^2(k) \right\}$$

On obtient par un calcul simple mais fastidieux (cf. [9]) :

$$\epsilon_N^2 = \frac{A^4 - E \left\{ X^2(0) X^2(k) \right\}}{N} \cdot T^2 \left(1 - \frac{|k|}{N} \right)$$

Pour un calcul portant sur un signal déterministe $f(t)$, on trouve un résultat analogue en tenant compte de (3''').

On en déduit alors :

$$\forall k \quad \epsilon_N^2 < \frac{T^2}{N} \left\{ A^4 - E \left\{ X^2(0) X^2(k) \right\} \right\}$$

et par là même, lorsque $N \rightarrow \infty$ avec $N \Delta t = T$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_N^2 = 0 \quad (9)$$

L'estimateur $\hat{\chi}(k, \nu_1)$ est donc un estimateur convergent.

On voit qu'il y aura intérêt à choisir N aussi grand que possible (donc à suréchantillonner le signal traité), l'erreur quadratique moyenne ϵ_N^2 étant inversement proportionnelle au nombre d'échantillons pris en compte.

4. VERIFICATION DES RESULTATS PRECEDENTS PAR SIMULATION NUMERIQUE

1) Généralités

Nous avons donc montré qu'on pouvait estimer la fonction d'ambiguïté en calculant la somme suivante :

$$\chi(k, \nu_1) = \frac{A^2}{N} \sum_{n=0}^N \text{sgn } Z_1(n) \text{sgn } Z_2(n+k) \exp(-2\pi \nu_1 n)$$

La vérification de l'algorithme proposé a été faite à l'aide d'un ordinateur IBM 360 programmé en langage Fortran IV.

Dans la simulation nous utilisons deux sortes de signaux auxiliaires ; une séquence générée de façon pseudo-aléatoire, et le "bruit" délivré par l'ordinateur en appelant le sous-programme hasard. Les fonctions d'auccorrélation de ces signaux sont données par les figures 1 et 2.

La simulation a été faite pour deux sortes de signaux, des signaux sinusoïdaux et des signaux modulés en fréquence.

La mise en oeuvre de cette simulation sur ordinateur conduit à des temps de calcul important. Pour avoir un résultat sur une coupe de la fonction d'ambiguïté après moyennage de 10 expériences, il faut 20 mn de temps d'unité centrale.

Il ne faut pas s'étonner alors du petit nombre de résultats obtenus, et de la difficulté de vérifier absolument de manière quantitative la convergence de l'algorithme.



Mais l'ensemble de cette simulation confirme néanmoins la validité de la méthode proposée.

2) Résultats de simulation

La simulation a été faite pour deux sortes de signaux :

- 1/ Signal sinusoïdal : $X(t) = \sin 2\pi t/30$
- 2/ Signal modulé en fréquence : $X(t) = \cos k\pi t^2$, $BT = 50$
 $k = 2 \times 10^{-4}$

La durée du signal choisi est constante $T = 500$ unités arbitraires.

Le décalage maximal utilisé est $\tau_{\max} = 90$

Les calculs ont été menés dans trois directions :

- 1/ Nous avons comparé les résultats obtenus pour un nombre d'échantillons variables

$N = 500, 1000, 2000, 4000$ ($T = \text{Const} = 500$ UA)

- 2/ Nous avons estimé l'évolution des erreurs quadratiques moyennes.
- 3/ Nous avons moyenné un certain nombre d'expériences avec $N = \text{const.}$

On peut montrer que le moyennage de K expériences pour N fixé diminue l'erreur quadratique moyenne approximativement dans le rapport $1/\sqrt{K}$.

Quelques résultats de simulation portant sur les deux types de signaux, avec utilisation des deux types de signaux auxiliaires et portant sur les points décrits en 1/, 2/ et 3/, sont présentés dans les figures 3 et suivantes.

Ces résultats montrent que la méthode d'estimation proposée est valable dans des conditions pratiques d'expérience et

permettent d'envisager favorablement la conception sur ce modèle d'un ambiguïmètre en temps réel.

5. CONCEPTION GENERALE D'UN AMBIGUÏMETRE EN TEMPS REEL

α) Description générale

De l'étude qui précède, il résulte que pour mesurer la fonction d'ambiguïté, il suffit de réaliser un appareil capable d'effectuer les opérations suivantes sur N échantillons du signal d'entrée :

$$X_{re}(k\Delta\tau, p\Delta\nu) = \frac{A^2}{N} \sum_{n=0}^N \text{sgn} [X(n)+B_1(n)] \text{sgn} [X(n-k)+B_2(n-k)] \cos \frac{2\pi pn}{N}$$

$$X_{im}(k\Delta\tau, p\Delta\nu) = \frac{A^2}{N} \sum_{n=0}^N \text{sgn} [X(n)+B_1(n)] \text{sgn} [X(n-k)+B_2(n-k)] \sin \frac{2\pi pn}{N}$$

$$|X| = \sqrt{X_{re}^2 + X_{im}^2}$$

La simplification essentielle de cette algorithmme provient de la facilité avec laquelle se fait la multiplication des fonctions $\text{sgn } X(n)$ au moyen de "ou - exclusifs".

Les cosinus et sinus seront fournis par des générations numériques utilisant des mémoires mortes.

Le schéma général de l'ensemble est donné par la figure 8.

β) Problèmes soulevés par cette réalisation

Ces problèmes se situent essentiellement au niveau du générateur de fréquence et des sources auxiliaires.

a/ Générateur de fréquence

Il s'agit de délivrer en parallèle les valeurs de $\cos 2 \Pi vt$ et de $\sin 2 \Pi vt$ à la cadence d'échantillonnage des



signaux et pour vingt valeurs différentes de ν .

La solution adoptée consiste en un calculateur générateur d'adresses travaillant en synchronisme avec la cadence d'échantillonnage et attaquant une mémoire morte de 512 mots de 8 bits pour un quart de période.

Les valeurs de ν possibles sont de la forme :

$$\nu = (k_m + p k_e) \nu_i \quad k_m, p \text{ et } k_e \text{ entiers positifs}$$

b/ Sources auxiliaires

L'hypothèse d'indépendance de deux échantillons successifs du signal auxiliaire sur chacune des voies est assez forte. Néanmoins, la simulation a montré que la génération des signaux auxiliaires à partir de séquences pseudo-aléatoires donnait des résultats convenables. C'est cette solution qui sera adoptée dans un premier temps.

Des études plus poussées sur la génération de bruits sont menées actuellement en collaboration avec le GAPS à Toulouse.

γ) Performances attendues

La première maquette de l'appareil aura approximativement les caractéristiques suivantes :

- Temps d'analyse du signal	500 ms
- Cadence minimale d'échantillonnage	25 μ s
- Nombre de retards temporels analysés	64
- Nombre de retards fréquentiels analysés (p)	20
- Plage explorée en fréquence	de 1 à 5 khz
- Pas en fréquence (ν_i)	1 hz



6. CONCLUSION

Le calcul en temps réel de la fonction d'ambiguïté d'un signal a été rendue possible par une méthode d'addition de signaux auxiliaires et quantification à deux niveaux. La simulation de cette technique de calcul a donné des résultats encourageant. Un appareillage fonctionnant sur ce principe est en cours de réalisation au LETI.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] WOODWARD
Probability and information theory with applications to
radar
Pergamon Press - 1953
- [2] RIHACZEK
Principles of high resolution radar
Mac Graw-Hill - 1969
- [3] C.H. PAGE
Instantaneous power spectra
J. Appl. Phys. vol. 23 - pp. 103-106 - Janvier 1952
- [4] RIHACZEK
Signal energy distribution in time and frequency
IEEE Transactions on Information Theory
vol. IT 14 - n° 3 - May 1968
- [5] M.J. LEVIN
Instantaneous spectra and ambiguity functions
IEEE Transactions on Information Theory
vol. IT 10 - Janvier 1964
- [6] J. MAX
Méthodes et techniques de traitement du signal
Masson - 1972
- [7] B. GRANDVAUX
Le canal de transmission acoustique sous-marin considéré
comme un filtre linéaire non homogène
(Troisième Colloque sur le traitement du signal et
ses applications - Nice - 1971)
- [8] W. KOFMAN - Ph. GARDERET
Généralisation de la notion d'identification pour les
filtres non homogènes
(à paraître)

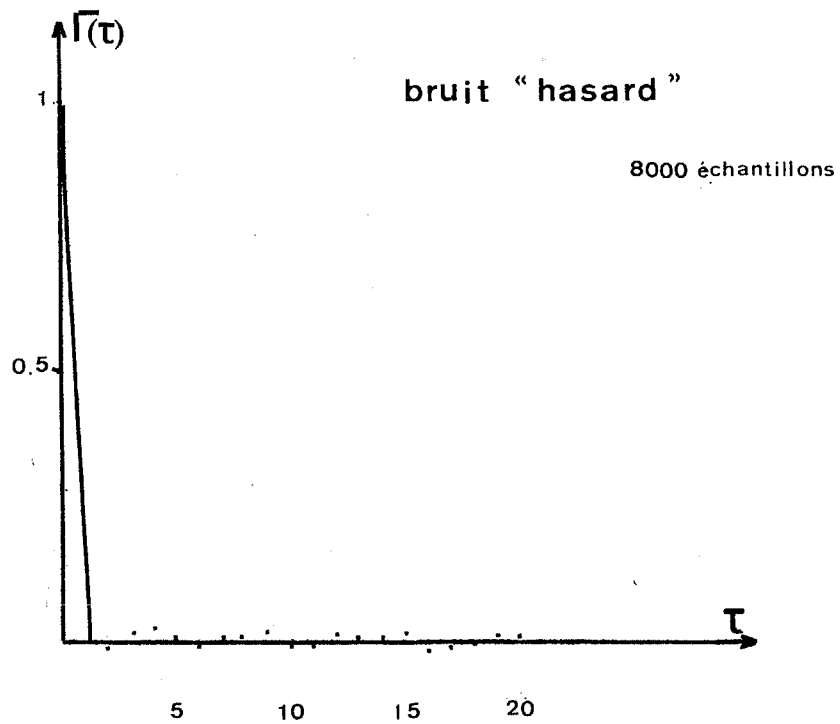
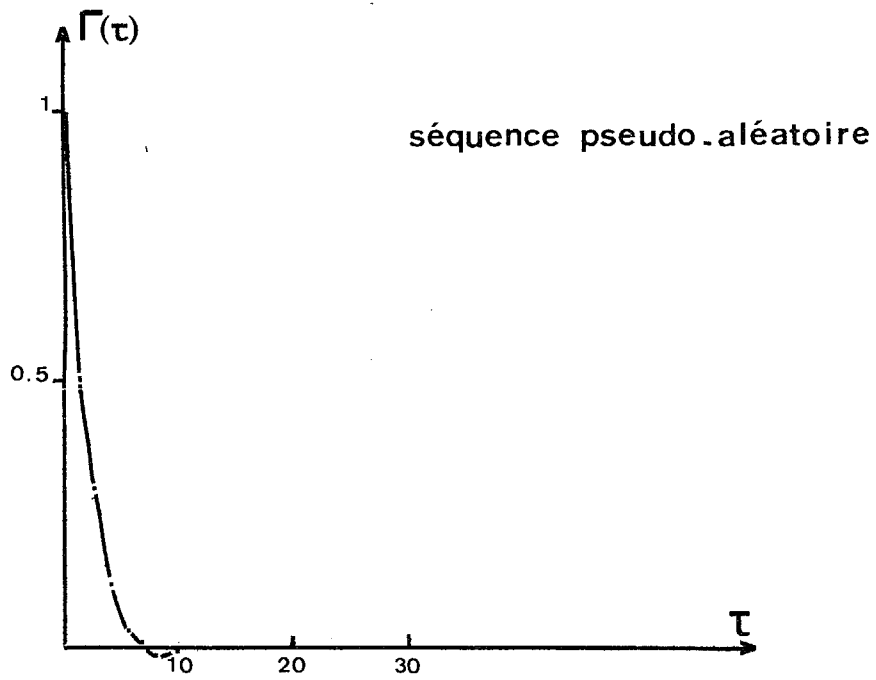


-
- [9] W. KOFMAN
Contribution à la mesure de la fonction d'ambiguïté
(Thèse de docteur ingénieur - Grenoble - 1972)
- [10] B. LACAZE
Sur l'échantillonnage des processus de Khintchine et ses applications
(Thèse de docteur es Sciences Mathématiques)
- [11] N. ELLOUZE
Conception et réalisation d'un générateur de suites temporelles aléatoires à fonction de répartition programmable
(Thèse de docteur-ingénieur - Toulouse - 1972)
- [12] J.B. KNOWLES et M.T. TSUI
Correlating devices and these estimation errors
Journal of Applied physics - vol. 38 n° 2 - Février 1967
- [13] P. JASPERS
A New Method for computing correlation functions
Int. Sym. on Inf. Theory - Bruxelles - Sept. 1962
- [14] G. GARAMPON - G. BONNET
Extension de la notion de fonction d'ambiguïté à des signaux aléatoires
Colloque National du Groupe d'Etude et du Traitement du Signal - Nice 1967



FIG 1

AUTOCORRELATION



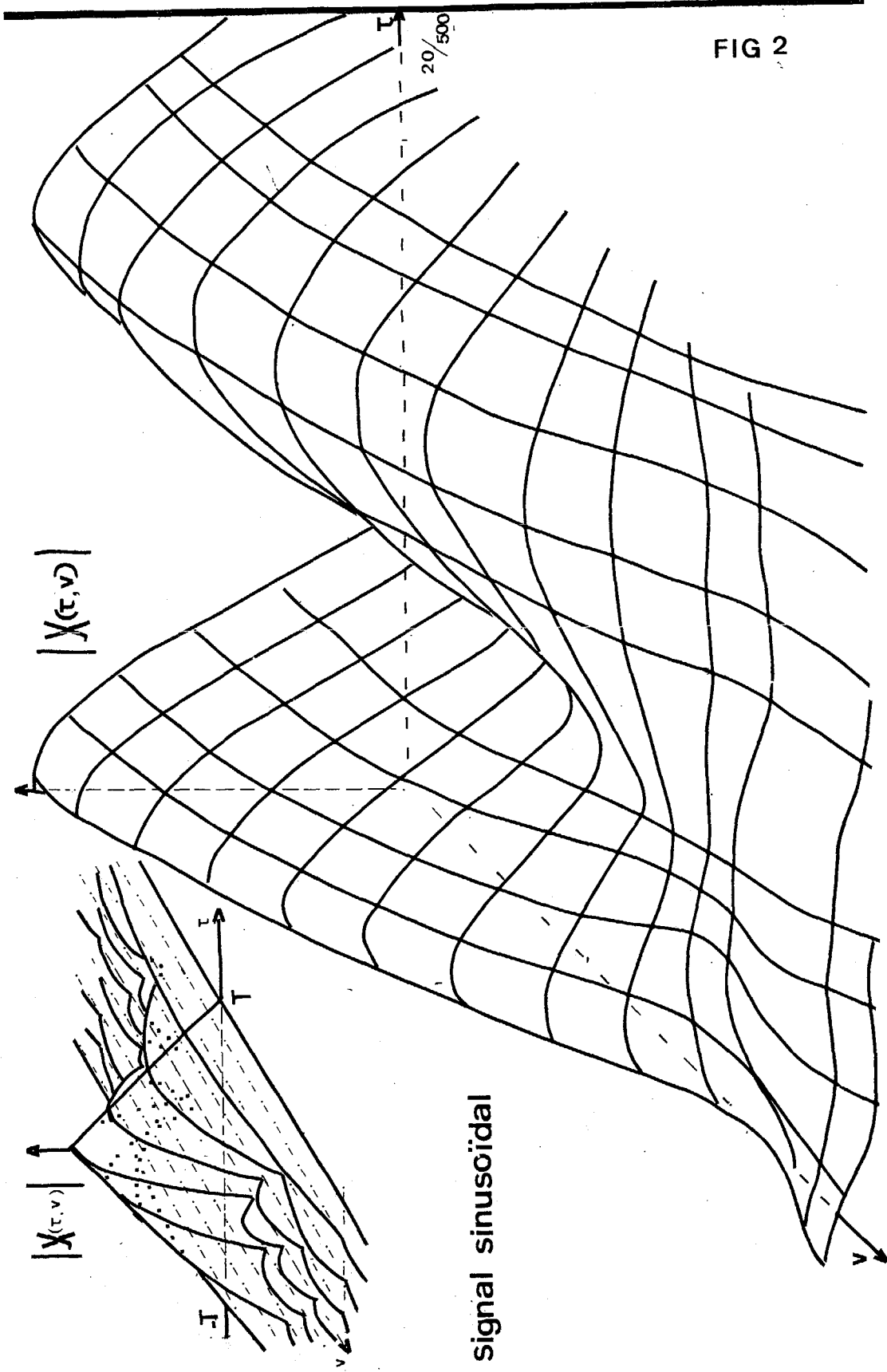


FIG 2



FIG 3

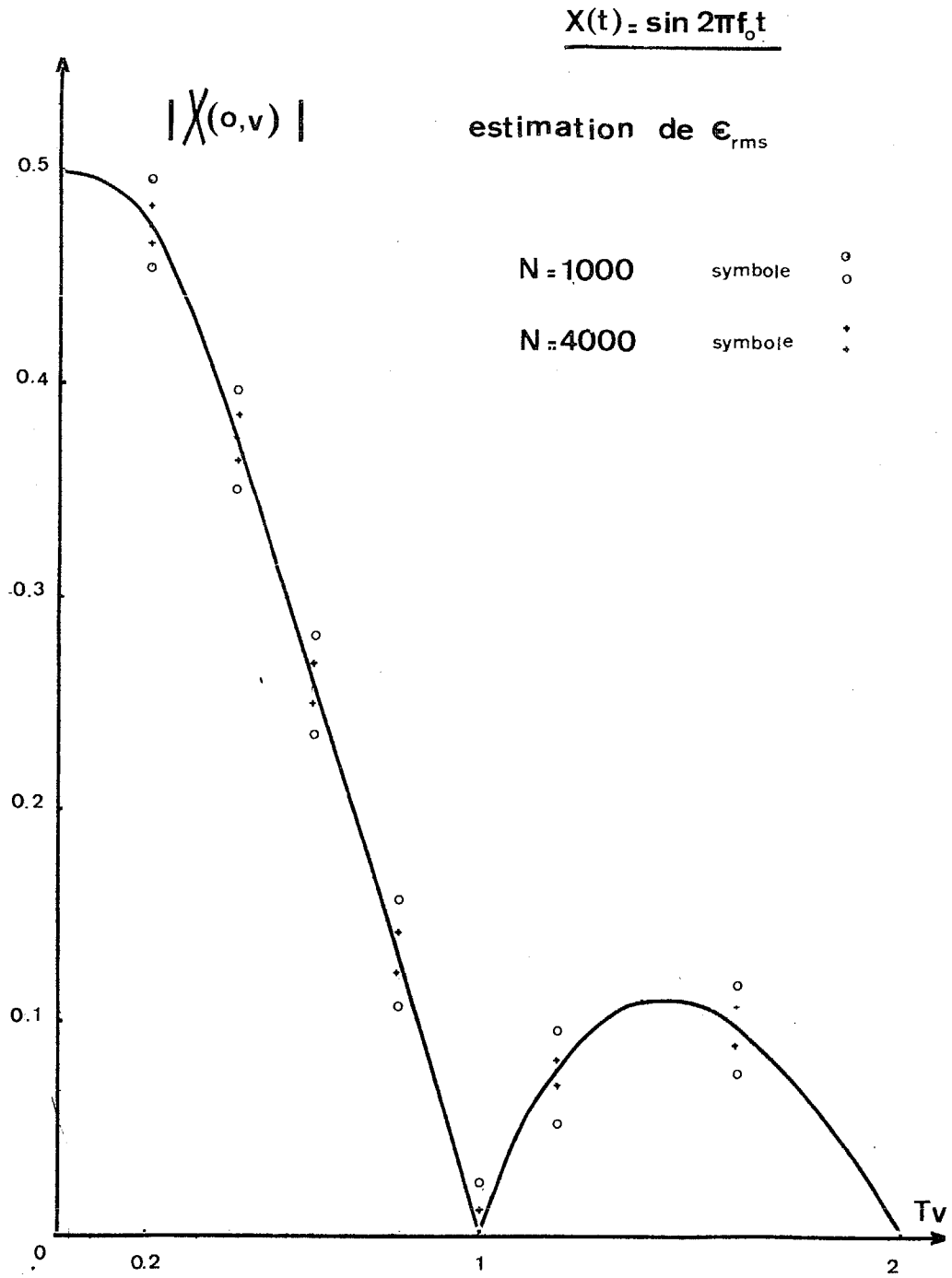


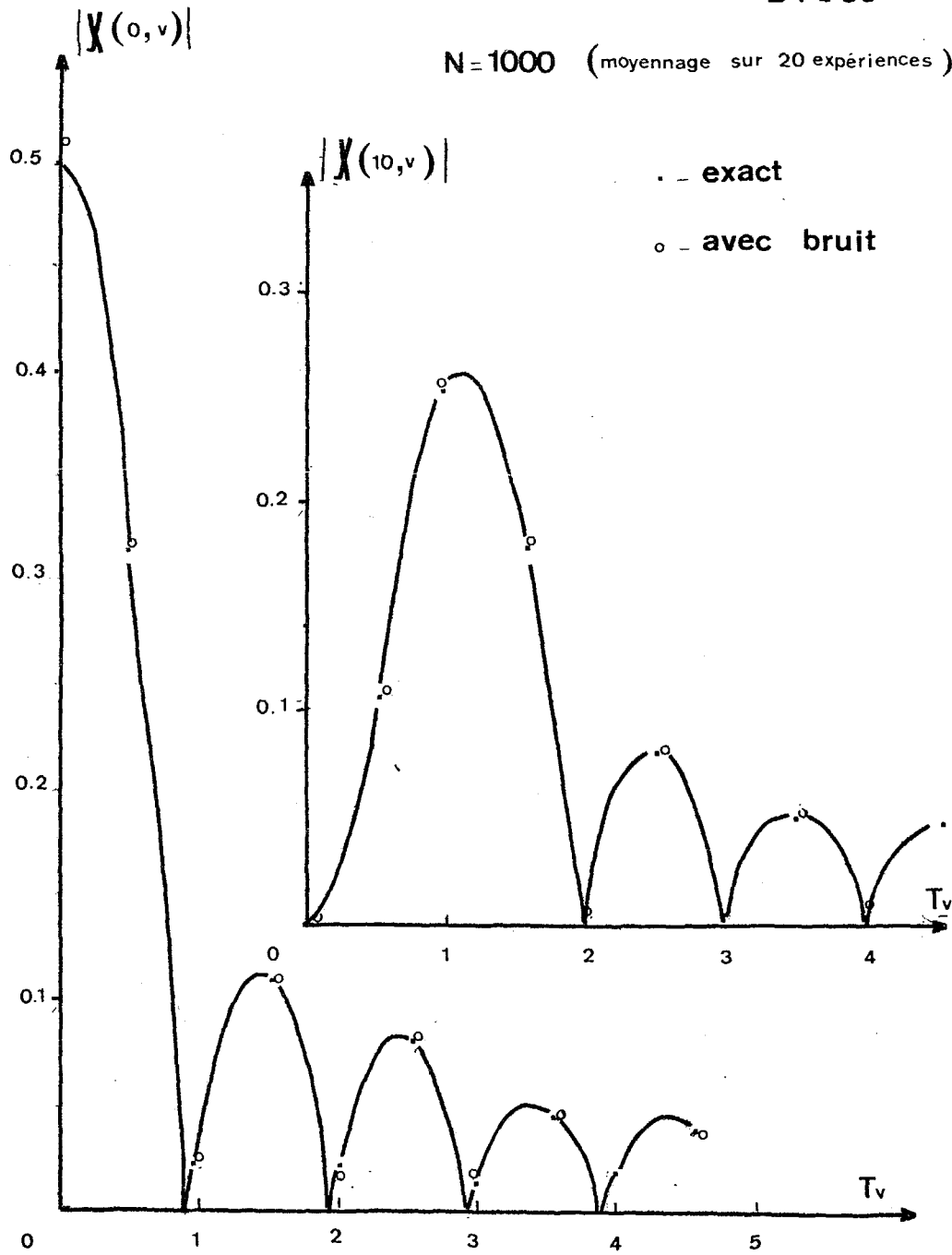


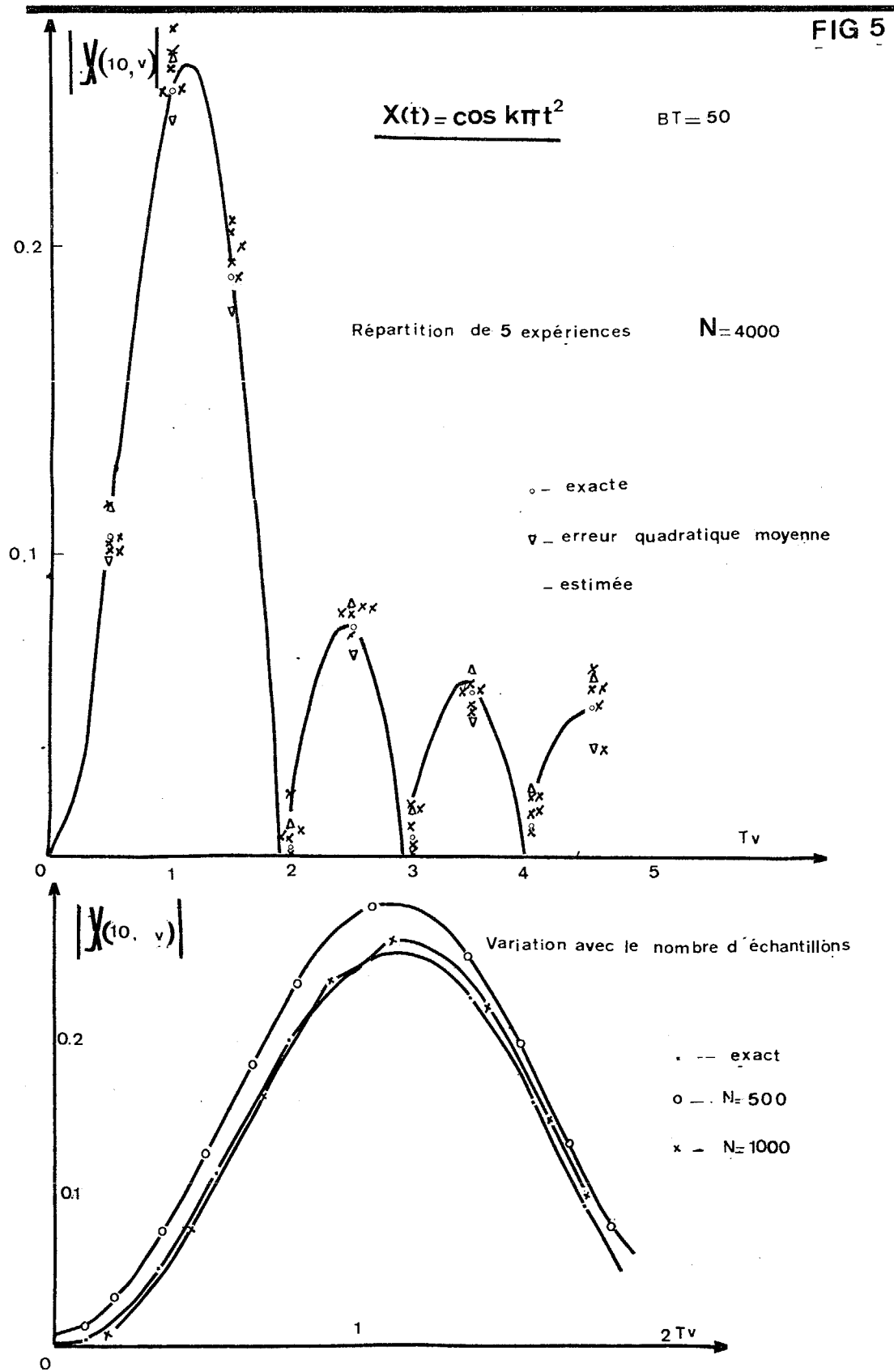
FIG 4

$$X(t) = \cos k \pi t^2$$

BT = 50

N = 1000 (moyennage sur 20 expériences)





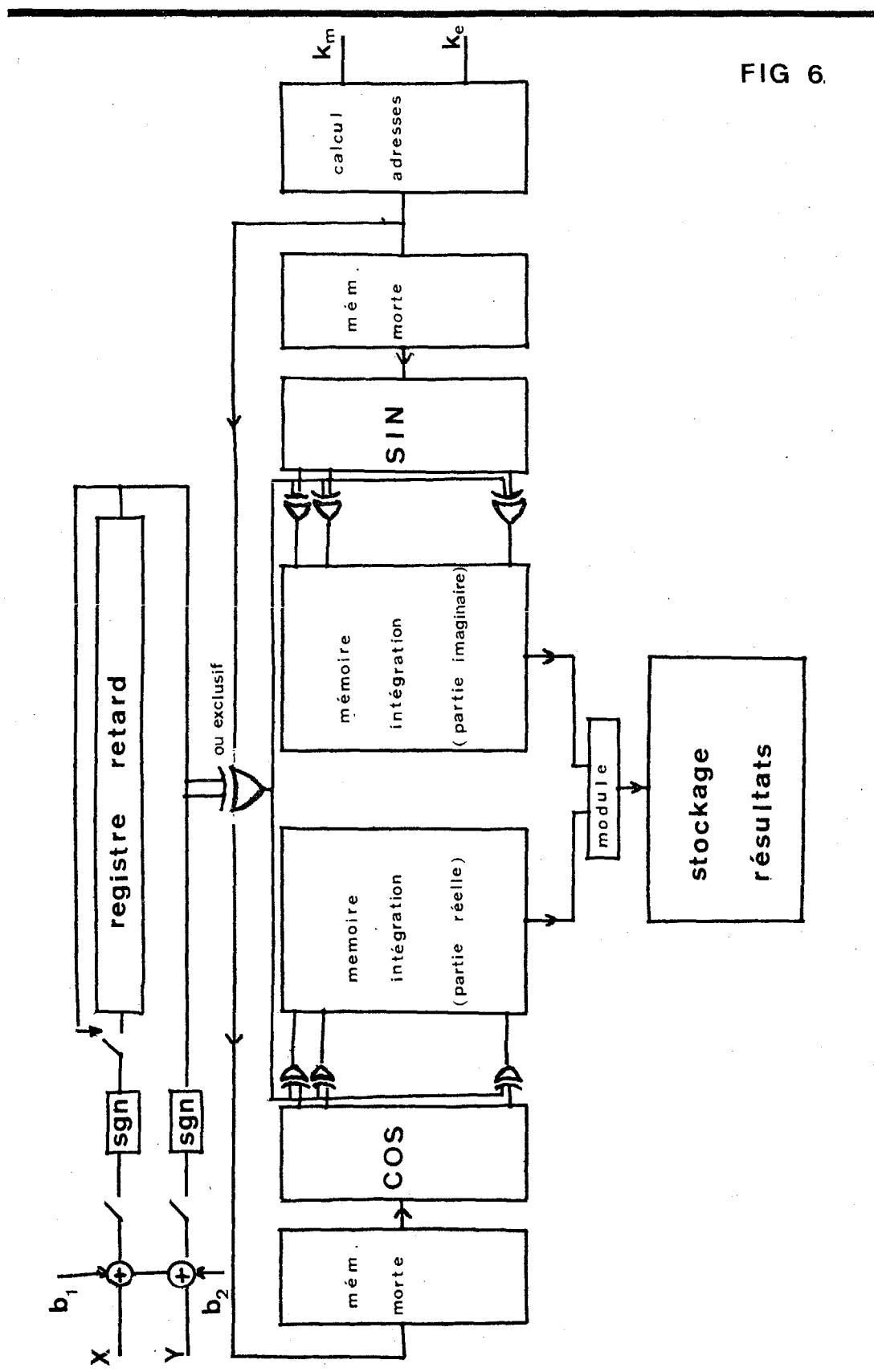


FIG 6.