QUATRIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

IDENTIFICATION DES SOURCES ET DES SIGNAUX INCONNUS PAR UNE ANTENNE LINEAIRE

Hubert DEBART

CIT ALCATEL

RESUME

Le problème général de reconstituer les signaux envoyés par un ensemble de sources ainsi que leur disposition géométrique est très difficile.

On a abordé le problème dans le cas simple d'un ensemble de capteurs à disposition linéaire.

On a résolu complètement le problème dans le cas des sources à l'infini et défini une disposition à nombre minimum d'éléments capable d'identifier simultanément N sources.

Ensuite on a étendu les résultats aux sources à distance finie au prix de quelques approximations.

SUMMARY

This paper deals with the problem of reconstructing several independent signals simultaneously received and finding the sources locations in the simple case of a linear array of receivers.

The problem has been solved completely for infinitely remote sources, and it was possible to define an array with a minimum number of elements capable of treating N sources simultaneously. With a few approximations the results could be extended to the case of finite distance sources.

IDENTIFICATION DES SOURCES ET DES SIGNAUX INCONNUS PAR UNE ANTENNE LINEAIRE

I.- INTRODUCTION

Depuis longtemps, on a cessé de considérer les antennes réceptrices comme des instruments rudimentaires, et on les regarde comme des appareils captant et traitant une information complexe.

Cette façon de voir peut entrer dans la pratique de deux manières très différentes, et en quelque sorte complémentaires

- L'antenne réceptrice doit permettre de recevoir un signal en affaiblissant le bruit ambiant, en utilisant à la fois sa structure temporelle et sa structure spatiale. Dans ce cadre se situent les travaux de M. MERMOZ et de son école sur les antennes adaptatives.

- L'antenne réceptrice doit permettre de reconstituer les signaux émis par les sources ainsi que leur géométrie.

C'est ce dernier aspect des choses que nous envisagerons ici, et sous la forme d'une première étude de ce problème très complexe. Il existe depuis longtemps déjà deux procédés classiques pour extraire cette information.

La méthode, déjà ancienne, dite de la "formation de voies", où on explore l'espace point par point; on rend maximal le gain de l'antenne pour les points explorés, en adaptant à ses capteurs des retards qui compensent les différences de temps de propagation depuis le point étudié; la méthode ne tient pas compte en principe de la forme des signaux.

.../.

IDENTIFICATION DES SOURCES ET DES SIGNAUX
INCONNUS PAR UNE ANTENNE LINEAIRE

Pour se libérer de la servitude de l'exploration systématique, on pratique la méthode dite, assez improprement, de l'"holographie acoustique" applicable quand on éclaire les objets par une source monochromatique dont ils diffusent le rayonnement acoustique. On peut retrouver la géométrie des objets diffusants en faisant une investigation par plans parallèles et non plus par points; le progrès est considérable à ce point de vue.

Mais on n'a pas encore traité entièrement le problème de la séparation et de la reconstitution des signaux et des sources quand on ne sait rien de leur émission; ce qui arrive évidemment quand on pratique l'écoute passive. Une solution générale est très difficile à dégager. Nous étudierons le cas d'une antenne linéaire, c'est à dire formée de capteurs disposés le long d'une ligne droite.

La solution est assez simple quand les sources sont très lointaines, c'est à dire quand on n'a à considérer que leur répartition angulaire. Nous assaierons de définir une méthode valable pour des sources proches ou lointaines. Mais nous verrons que les limitations dans la dimension de l'antenne et le nombre des capteurs introduisent des restrictions très sévères dans les possibilités d'analyse.

Les résultats dégagés sont par contre aisément extensibles à une antenne à deux dimensions, c'est à dire plane.

II.- SEPARATION DES SOURCES LOINTAINES

a) Position du problème

Nous avons donc à considérer une antenne linéaire, sur une droite où nous choisissons une origine O. Par rapport à

. . . / .

cette origine, un élément est repéré par sa distance algébrique 1, ou mieux par sa distance réduite c'est à dire :

$$a = \frac{1}{c}$$

qui a les dimensions d'un temps; c est la vitesse de propagation du son.

Les sources sonores sont situées à l'infini; la position d'une source élémentaire est définie par l'angle θ que forment les rayons incidents de cette source avec la normale à l'antenne. Nous utilisons comme variable $\sin \theta = u$.

La géométrie d'une source étendue est définie par la fonction de répartition g (u) dont la signification est la suivante :

On trace un cercle centré sur le milieu de l'antenne, de rayon R très grand. Le principe de HUYGHENS permet de remplacer la source réelle, située à l'extérieur de ce cercle par une distribution de champ sur le cercle par une distribution de champ sur le cercle, de la forme g (u).

On suppose qu'il existe n sources indépendantes caractérisées par :

a) leurs géométries, soient :

$$g_1 (u) \; . \; . \; . \; g_n (u)$$

b) leurs signaux, soient :

$$s_1 (t) \; . \; . \; . \; s_n (t)$$

....

IDENTIFICATION DES SOURCES ET DES SIGNAUX INCONNUS PAR UNE ANTENNE LINEAIRE

Le rôle attribué à l'antenne linéaire est de retrouver ces 2 n fonctions à partir des grandeurs mesurées.

Si on considère un capteur ponctuel particulier, dont la distance réduite à l'origine est a, il recevra un signal de la forme :

$$\int g_1(u)\; s_1\;(T - au)\;du + \dots + \int g_n(u)\; s_n(T - au)\;du$$

soit, si on pose au = t

$$\int g_1\;\left(\frac{t}{a}\right)\; s_1\;(T - t)\;\frac{dt}{a} + \dots + \int g_n\;\left(\frac{t}{a}\right)\; s_n\;(T - t)\;\frac{dt}{a}$$

Effectuons alors une transformation de Fourier sur la variable t, la variable conjuguée est appelée ω .

$g_i(t) \supset G_i\;(\omega) \supset$ donc $g_1\;\left(\frac{t}{a}\right) \supset G_j\;(\omega\; a)$

$s_i(t) \supset S_i\;(\omega)$

La convolution se transforme en produit et la transformée de Fourier de la fonction du temps mesurée par le capteur est :

$G_1\;(\omega\; a)\; S_1\;(\omega) + \dots + G_n\;(\omega\; a)\; S_n\;(\omega)$

On changera de variable en posant tout simplement

$$\omega\; a = y$$

et on aura à considérer la fonction :

$$\mu\;(\omega,y) = S_1\;(\omega)\; G_1(y) + \dots + S_n\;(\omega)\; G_n\;(y)$$

Cette fonction est accessible à l'expérience. Il suffit pour cela de faire la transformation de Fourier sur les signaux reçus par les différents capteurs de l'antenne. Un capteur dont la distance à l'origine est a_i fournira l'échantillon $\mu(\omega, \omega a_i)$.

b) Séparation et reconstitution de deux sources

Supposons qu'il existe seulement deux sources indépendantes. Nous allons définir une antenne capable de constater la présence de deux sources et de deux seulement, d'effectuer leur séparation, et enfin de la reconstruire avec leurs signaux.

Toutes ces opérations reposent sur le principe de l'échantillonnage. Nous avons des capteurs ponctuels qui fournissent un échantillonnage spatial de la fonction spectrale μ (ω, y) considérée. Nous allons également échantillonner le spectre des signaux reçus, ce qui est tout à fait légitime puisque ces signaux sont de durée finie.

$$S_1 (\omega) = a_1 \Sigma(\omega_0) + \dots a_n \Sigma(n\ \omega_0) + \dots$$

$$S_2 (\omega) = b_1 \Sigma(\omega_0) + \dots b_n \Sigma(n\ \omega_0) + \dots$$

Dans ces expressions :

- On a supposé nulles les composantes des spectres à la fréquence 0
- On a appelé ω_0 le pas d'échantillonnage choisi
- On a posé $\Sigma(x) = \dfrac{\sin (\omega - x)}{\omega - x}$ qui est la fonction

d'interpolation de SHANNON.

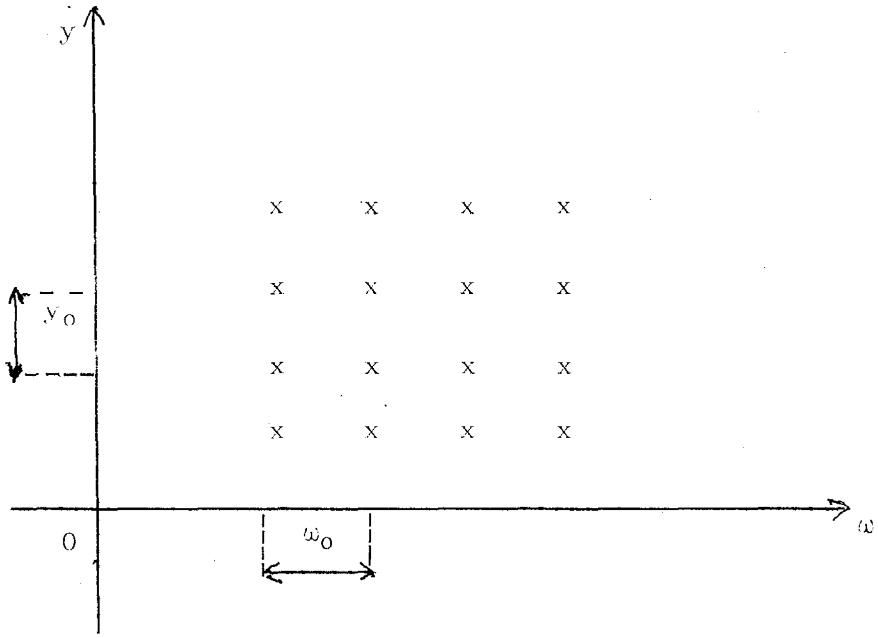
.../.

On écrira de même :

$$G_1(y) = c_1 \,\xi(y_0) + \ldots + c_n \,\xi(n\, y_0) + \ldots$$

$$G_2(y) = d_1 \,\xi(y_0) + \ldots + d_n \,\xi(n\, y_0) + \ldots$$

On va supposer qu'on dispose d'un échantillonnage de la fonction $\mu(\omega, y)$ en tous les points $(i\,\omega_0, k\,y_0)$ si i et k sont des nombres entiers quelconques.



Le diagramme ci-dessus représente les points d'échantillonnage.

Dénombrement des sources. Considérons les points d'échantillonnage sur les trois premières lignes, donc aux points de coordonnées :

$$(\omega_0, 2\,\omega_0, \ldots\ n\,\omega_0)$$
$$(y_0, 2\,y_0, 3\,y_0)$$

IDENTIFICATION DES SOURCES ET DES SIGNAUX

INCONNUS PAR UNE ANTENNE LINEAIRE

Comme la fonction mesurée est de la forme :

$$\left[a_1 \, \varepsilon(\omega_0) + \ldots + a_n \, \varepsilon(n\,\omega_0) + \ldots \right] \left[c_1 \, \varepsilon(y_0) + \ldots + c_n \, \varepsilon(n\,y_0) + \ldots \right]$$

$$+ \left[b_1 \, \varepsilon(\omega_0) + \ldots + b_n \, \varepsilon(n\,\omega_0) + \ldots \right] \left[d_1 \, \varepsilon(y_0) + \ldots + d_n \, \varepsilon(n\,y_0) + \ldots \right].$$

On en déduit les relations :

$$\left[\begin{array}{l} a_1 \, c_1 + b_1 \, d_1 = \alpha_1 \; (\omega_0, y_0) \\ a_1 \, c_2 + b_1 \, d_2 = \beta_1 \; (\omega_0, 2\,y_0) \\ a_1 \, c_3 + b_1 \, d_3 = \gamma_1 \; (\omega_0, 3\,y_0) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a_2 \, c_1 + b_2 \, d_1 = \alpha_2 \; (2\,\omega_0, y_0) \\ a_2 \, c_2 + b_2 \, d_2 = \beta_2 \; (2\,\omega_0, 2\,y_0) \\ a_2 \, c_3 + b_2 \, d_3 = \gamma_2 \; (2\,\omega_0, 3\,y_0) \end{array}\right.$$

(1)

$$\left[\begin{array}{l} a_3 \, c_1 + b_3 \, d_1 = \alpha_3 \; (3\,\omega_0, Y_0) \\ a_3 \, c_2 + b_3 \, d_2 = \beta_3 \; (3\,\omega_0, 2\,y_0) \\ a_3 \, c_3 + b_3 \, d_3 = \gamma_3 \; (3\,\omega_0, 3\,y_0) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a_4 \, c_1 + b_4 \, d_1 = \alpha_4 \; (4\,\omega_0, y_0) \\ \rule{6cm}{0.4pt} \\ \rule{6cm}{0.4pt} \end{array}\right.$$

Dans ces équations :

- les α β γ représentent des grandeurs mesurées donc expérimentales,
- les a b c d représentent des grandeurs à reconstruire

On en tire immédiatement les relations :

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{vmatrix} = 0$$

quels que soient les nombres i j k.

S'il y a seulement 2 sources indépendantes, ces déterminants sont tous nuls et inversement, les déterminants d'ordre inférieur ne le sont pas tous. C'est le critère expérimental qui permettra d'affirmer la présence de 2 sources et de 2 sources seulement.

Reconstitution des sources et des signaux. On peut également faire l'analyse sur les 3 premières colonnes du diagramme d'échantillonnage. On pourra écrire une série de relations analogues aux précédentes, dont les premières sont :

$$(2) \qquad \begin{cases} a_1 \; c_1 + b_1 \; d_1 = \alpha'_1 & (= \alpha_1) \\ a_2 \; c_1 + b_2 \; d_1 = \beta'_1 & (= \alpha_2) \\ a_3 \; c_1 + b_3 \; d_1 = \gamma'_1 & (= \alpha_3) \end{cases}$$

$$
(2)\quad
\left[\begin{array}{l}
a_1\, c_2 + b_1\, d_2 = \alpha'_2 \quad (= \beta_1) \\
a_2\, c_2 + b_2\, d_2 = \beta'_2 \quad (= \beta_2) \\
a_3\, c_2 + b_3\, d_2 = \gamma'_2 \quad (= \beta_3)
\end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l}
a_1\, c_3 + b_1\, d_3 = \alpha'_3 \quad (= \gamma_1) \\
a_2\, c_3 + b_2\, d_3 = \beta'_3 \quad (= \gamma_2) \\
a_3\, c_3 + b_3\, d_3 = \gamma'_3 \quad (= \gamma_3)
\end{array}\right.
$$

La nullité des déterminants

$$
\begin{vmatrix}
\alpha'_i & \alpha'_j & \alpha'_k \\
\beta'_i & \beta'_j & \beta'_k \\
\gamma'_i & \gamma'_j & \gamma'_k
\end{vmatrix}
$$

est également évidente.

Il existe donc des relations linéaires de la forme :

$$
\left[\begin{array}{l}
\alpha_n = \lambda_n\, \alpha_2 + \mu_n\, \alpha_1 \\
\beta_n = \lambda_n\, \beta_2 + \mu_n\, \beta_1 \\
\gamma_n = \lambda_n\, \gamma_2 + \mu_n\, \beta_1
\end{array}\right.
$$

.../.

et

$$\left[\begin{array}{l} \alpha'_n = \lambda'_n \beta_1 + \mu'_n \alpha_1 \\ \beta'_n = \lambda'_n \beta_2 + \mu'_n \alpha_2 \\ \gamma'_n = \lambda'_n \beta_3 + \mu'_n \alpha_3 \end{array}\right.$$

entre les grandeurs mesurées.

La connaissance expérimentale des quantités (α β γ) (α' β' γ') entraîne donc aussitôt celle des constantes:

$$(\lambda , \mu) \text{ et } (\lambda' , \mu')$$

Les équations ci-dessus notées (1) et (2) sont alors aisées à résoudre; leur solution est simplement :

$$\left[\begin{array}{l} a_n = \lambda_n a_2 + \mu_n a_1 \\ b_n = \lambda_n b_2 + \mu_n b_1 \end{array}\right.$$

et

$$\left[\begin{array}{l} c_n = \lambda'_n c_2 + \mu'_n c_1 \\ d_n = \lambda'_n d_2 + \mu'_n d_1 \end{array}\right.$$

On peut alors retrouver les échantillonnages définis par les grandeurs (a b c d).

On a en particulier les relations :

$$
(3) \quad \left[\begin{array}{l}
a_1 \; c_1 \; + \; b_1 \; d_1 \; = \alpha_1 \\
a_1 \left[\lambda'_3 \; c_2 + \mu'_3 \; c_1 \right] \; + \; b_1 \left[\lambda'_3 \; d_2 + \mu'_3 \; d \right] = \gamma_1 \\
\\
a_1 \; c_2 \; + \; b_1 \; d_2 = \beta_1 \\
a_1 \left[\lambda'_4 \; c_2 + \mu'_4 \; c_1 \right] \; + \; b_1 \left[\lambda'_4 \; d_2 + \mu'_4 \; d_1 \right] = \alpha'_1
\end{array}\right.
$$

Les grandeurs a_1 et b_1 peuvent évidemment être choisies arbitrairement. On tire des relations précédentes les nombres $(c_1 \; d_1)$ $(c_2 \; d_2)$ et on continue ainsi.

On calcule (a_2, b_2) à partir des relations :

$$a_2 \; c_1 + b_2 \; d_1 = \alpha_2$$

$$a_2 \; c_2 + b_2 \; d_2 = \beta_2$$

et on poursuit l'opération.

c) <u>Disposition minimale</u>

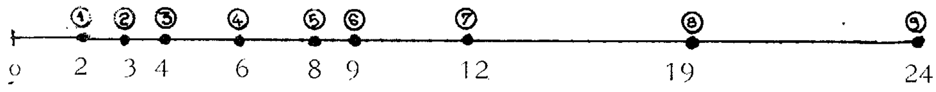
Dans cette hypothèse de l'existence de deux sources, on peut se demander quelle est la disposition permettant la séparation avec un nombre aussi petit que possible d'éléments.

.../.

tillonnage. Elles sont proportionnelles aux nombres

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 \end{bmatrix}$$

On peut donc réaliser cette antenne avec 9 éléments comme l'indique la figure suivante, où on a représentéleurs distances à l'origine.



On pourrait de la même façon définir des dispositions minimales pour la séparation de 3,4,... n sources différentes.

d) <u>Information apportée par l'antenne</u>

Les signaux examinés sont reçus dans la bande (0,B) cycles /s et pendant un temps T. Le théorème de SHANNON nous apprend que l'échantillonnage des spectres peut se faire avec le pas $\frac{1}{2T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$. Le nombre d'échantillons de spectres dont on dispose est alors de : 2 B T.

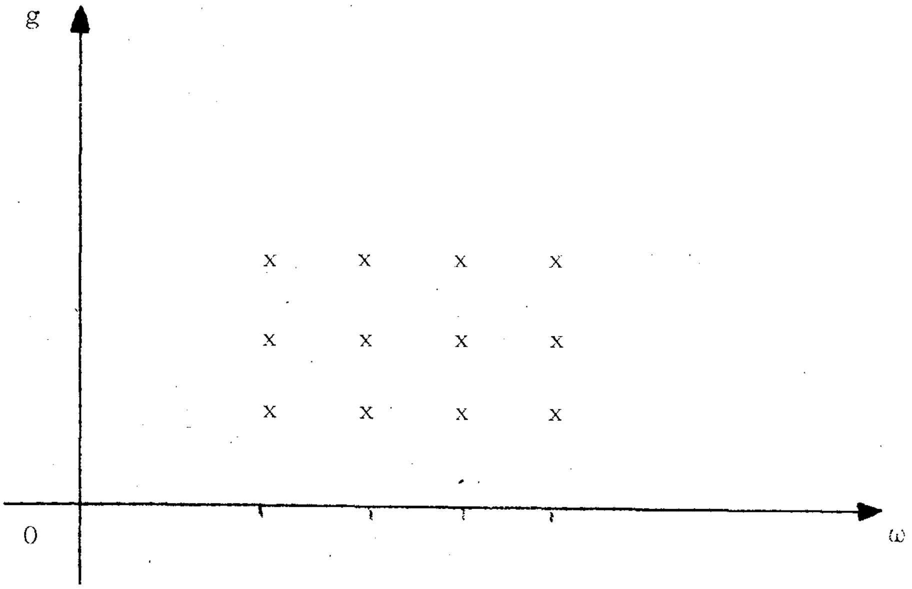
Avec la disposition minimale, on peut échantillonner la structure géométrique des 2 sources en fréquences spatiales.

Il faut pouvoir calculer un déterminant tel que :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

pour constater qu'il est nul, et aussi pouvoir écrire les relations de départ (3).

Ces opérations sont possibles avec la disposition représentée sur la figure :



Les distances des éléments par rapport à l'origine sont données par les pentes des différentes droites joignant l'origine du graphique aux points du diagramme d'échan-

Pour une distance donnée a, on a les échantillons :

$a \; \omega_0$

$2a \; \omega_0$

$3a \; \omega_0$

Si on part d'un échantillonnage fréquentiel de pas ω_0 en pulsation

$2a \; \omega_0$.

$4a \; \omega_0$

$6a \; \omega_0$

si on part d'un échantillonnage fréquentiel de pas $2 \; \omega_0$.. etc.

On peut avoir ainsi l'échantillonner en fréquences spatiales des 2 sources jusqu'à la fréquence maximale $a_{max} B$

Pratiquement, on peut échantillonner les spectres des signaux reçus pendant un temps T par le procédé "transformée de Fourier rapide" et faire les calculs indiqués plus haut, qui sont d'ailleurs simples.

II.- SOURCES QUELCONQUES

Si on a affaire à des sources sonores qui sont étendues et dont la distance à l'antenne ne peut être considérée comme infiniment grande, le problème est beaucoup plus

.../.

difficile. Nous considérons ici uniquement une antenne linéaire à disposition uniforme d'éléments (s'il n'en est pas ainsi, le problème est comme nous le verrons assez peu différent). Nous commencerons par essayer de retrouver la géométrie d'une source sonore unique et le signal qu'elle émet, d'après les données expérimentales captées sur l'antenne.

a) Formulation du problème

On dispose donc toujours d'une antenne linéaire, sur une droite prise comme axe des abscisses du plan. On y choisit une origine et on trace un axe des ordonnées.

Si un point de la source a pour coordonnées X_s, Y_s, et si la source est monochromatique de pulsation ω le champ reçu en un point d'abscisse X sur l'antenne est de la forme :

$$\frac{e^{-\left(\frac{i\omega}{c}\sqrt{(X-X_s)^2+Y_s^2}\right)}}{\sqrt{(X-X_s)^2+Y_s^2}}$$

si on supprime le facteur $e^{i\omega t}$ qui définit l'émission de la source.

Pour étudier une source de forme quelconque et émettant un signal quelconque,

- on décomposera le signal en ondes monochromatiques, c'est à dire qu'on utilisera sa transformée de Fourier temporelle $S(\omega)$,

- on effectuera une transformation de Fourier en X sur le champ reçu.

.../..

Autrement dit; le champ reçu sur l'antenne étant une fonction f (t, X) on considére sa transformée de Fourier bidimensionnelle F (ω, u).

Pour faire cette opération, on partira de la formule fondamentale (Référence, p. III formule n° 866),

$$\frac{e^{ia\sqrt{X^2+b^2}}}{\sqrt{X^2+b^2}} \supset J_0\left[b(g^2-a^2)^{1/2}\right]$$

relative au couple de variables (X, g).

Si on fait le changement de variable g = au la formule devient :

$$\frac{e^{-ia\sqrt{X^2+b^2}}}{\sqrt{X^2+b^2}} \supset J_0\left[ab\sqrt{u^2+1}\right]$$

Si on revient alors au signal émis par un point source, on a alors la correspondance de Fourier :

$$\frac{e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{(X-X_s)^2+Y_s^2}}}{\sqrt{(X-X_s)^2+Y_s^2}} \supset J_0\left[\frac{\omega}{c}\,Y_s\sqrt{u^2+1}\right]e^{-\frac{iX_s\,\omega\,u}{c}}$$

On en déduit alors facilement la forme de la transformée de Fourier F (ω,u) évoquée plus haut.

Si S (ω) est le spectre du signal émis, et

si φ (X_s, Y_s) est la fonction de répartition mesurant l'émission de la surface élémentaire de source d X_s d Y_s

.../.

(φ est un facteur complexe si différents points de la source n'émettent pas avec la même phase) :

$$F(\omega,u) = S\ (\omega)\iint (X_s,Y_s)\ J_0(\frac{\omega}{c}\ Y_s\sqrt{u^2+1})e^{-\frac{iX\ \omega}{c}\ u}\ dX_s\ dY_s$$

expression où J_0 désigne la fonction de Bessel ordinaire d'ordre 0.

b) Possibilités d'analyse fournie par une antenne

On suppose que l'antenne linéaire étudiée a une longueur L et qu'elle est formée d'éléments ponctuels; deux éléments consécutifs sont séparés par une distance d. On pose $\frac{L}{d} = n$, si bien que l'antenne comporte n+ 1 capteurs.

Dans notre problème, on utilise une transformée de Fourier bidimensionnelle F (ω, u). Si on considère une fréquence particulière du spectre, définie par une pulsation ω_0, la transformée de Fourier unidimensionnelle F (ω_0, u) est connue incomplétement pour deux raisons :

- l'antenne a une longueur finie,

- à l'intérieur de cette longueur finie, on ne connaît la valeur de F qu'en un nombre fini de points.

Il en résulte des restrictions importantes sur les possibilités d'analyse fournies par l'antenne. Pour étudier cette quetion fondamentale, nous ferons appel au au théorème de Shannon sous la forme suivante :

Si une fonction est non nulle sur un intervalle de longueur A, sa transformée de Fourier est entièrement connue par des échantillons espacés de $\frac{2\pi}{A}$, l'espacement de $\frac{2\pi}{A}$ est relatif à la variable conjuguée, et inversement.

Dans le problème qui nous occupe, l'intervalle de variation de X est égal à L. La variable conjuguée g peut alors être étudiée à un pas de $\frac{2\pi}{L}$ et la variable u effectivement utilisée à un pas de :

$$\frac{c}{\omega_0} \cdot \frac{2\pi}{L} = \frac{c}{n_0 L}$$ (n_0 est la fréquence correspondant à la pulsation ω_0)

Par ailleurs, la même variable X est échantillonnée par construction avec un pas égal à d. La variable g a alors un intervalle de variation G tel que $\frac{2\pi}{G} = d$ ou $G = \frac{2\pi}{d}$. La variable u a un intervalle de variation égal à :

$$\frac{c}{\omega_0} \cdot \frac{2\pi}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{n_0 d}$$

Le nombre d'échantillons disponible sur la variable u est alors de :

$$\frac{\frac{c}{n_0 d}}{\frac{c}{n_0 L}} = \frac{L}{d} = n$$

Ceci peut être vu d'une autre façon. Il revient au même de calculer la transformée de Fourier d'une fonction de X sur un intervalle de longueur L et de développer la fonction en question en série de Fourier sur le même intervalle; les valeurs des coefficients qu'on obtient sont les échantillons de la transformée,

.../.

avec le pas de SHANNON. Or on dispose des valeurs de la fonction en (n+ 1) points distincts.

On peut donc développer la fonction en série de Fourier avec n + 1 coefficients et n+ 1 seulement. Supposons, pour la commodité de l'écriture que n soit pair (n = 2 p).

On développe la fonction sur :

$$
\begin{array}{lcl}
1 & \ldots\ldots\ldots & (a_0) \\
\cos \frac{2\pi X}{L} & \ldots & (a_1) \\
\sin \frac{2\pi X}{L} & \ldots & (b_1) \\
\vdots & & \\
\cos \frac{2p\pi X}{L} & \ldots & (a_p) \\
\sin \frac{2p\pi X}{L} & \ldots & (b_p)
\end{array}
$$

Si les n+ 1 échantillons de la fonction sont $\alpha_0 \ldots \alpha_n$ on écrit les relations linéaires :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p = \alpha_0$$

$$a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi d}{L} + b_1 \sin \frac{2\pi d}{L} + \ldots + a_p \cos \frac{2p\pi d}{L} + b_p \sin \frac{2p\pi d}{L} = \alpha_1$$

$$\vdots$$

$$a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi nd}{L} = \ldots \text{―――――――――――} = \alpha_n$$

qui donnent un jeu et un seul de coefficients de Fourier. La fonction G (ω_0, u) est alors échantillonnée en u avec le pas: $\Delta u = \frac{c}{n_0 \; L}$ et on en connaît 2 p+1 = n +1 échantillons.

.../.

c) <u>Analyse d'une source unique</u>

Une source unique pourra être analysée dans l'espace et dans le temps par échantillonnage.

La formule établie à la fin du paragraphe a) nous montre que, pour une fréquence particulière du spectre

$$F(\omega_0,u) = S(\omega_0)\iint \varphi(X_s, Y_s)\, J_0\left(\frac{\omega_0}{c} Y_s \sqrt{u^2+1}\right) e^{-\frac{iX_s\omega_0 u}{c}}\, dX_s\, dY_s$$

Cette fonction devra être remplacée par un échantillonnage c'est à dire qu'on définira un pas égal à h en X et en Y et qu'on remplacera l'intégrale double par une somme finie

$$S(\omega_0) \sum_{j,k} \varphi(X_{sj}, y_{sk})\, J_0\left(\frac{\omega_0}{c} Y_{sk} \sqrt{u^2+1}\right) e^{-\frac{iX_{sj}\omega_0}{c} u}$$

On posera simplement $\varphi(X_{sj}, Y_{sk}) = \varphi_{jk}$.
Comme on connaît les échantillons de la fonction $F(\omega_0, u)$ pour les valeurs de u : 0, $\pm \Delta u, \ldots \pm p\Delta u$.
On devra écrire les équations :

$$\begin{cases} S(\omega_0) \sum_j \sum_k \varphi_{jk}\, J_0\left(\frac{\omega_0}{c} Y_{sk} \sqrt{(p\Delta u)^2+1}\right) e^{\frac{iX_{sj}\omega_0}{c} p\Delta u} = F(\omega_0, -p\Delta u) \\ \vdots \\ S(\omega_0) \sum_j \sum_k \varphi_{jk}\, J_0\left(\frac{\omega_0}{c} Y_{sk}\right) = F(\omega_0, 0) \\ \vdots \\ S(\omega_0) \sum_j \sum_k \varphi_{jk}\, J_0\left(\frac{\omega}{c} Y_{sk} \sqrt{(p\Delta u)^2+1}\right) e^{-\frac{iX_{sj}\omega_0}{c} p\Delta u} = F(\omega_0, p\Delta u) \end{cases}$$

au nombre de n + 1.

On pourra écrire autant de tels systèmes qu'on peut définir d'échantillons indépendants dans le spectre de fréquences du signal, soit : 2 B T comme il a été dit ci-dessus.

.../.

On aura donc finalement 2 B T (n + 1) équations pour déterminer les échantillons du spectre

$$S(\omega_i) \text{ en nombre } 2\,B\,T$$

et les échantillons φ_{jk} de la fonction de répartition. On peut donc connaître 2 B T n échantillons.

Cependant, il est certain qu'une telle quantité d'équations n'est pas manipulable en pratique si on ne sait rien de la disposition de la source. Il faut qu'elle ait été localisée grossièrement par un procédé quelconque afin que le nombre des échantillons φ_{jk} à traiter soit limité.

d) Séparation de sources distinctes

La séparation est possible à condition que les équations que nous venons d'écrire soient surabondantes.

On peut obtenir la séparation par dégrossissage. On commence par utiliser un échantillonnage lâche de la région de l'espace explorée de façon à pouvoir se contenter d'une fraction des 2 B T (n + 1) équations pour déterminer la géométrie d'une source, supposée unique au départ. La solution est reportée dans les autres; s'il y a compatibilité, on a bien une source unique. Sinon, on suppose l'existance de deux sources en recommençant le calcul et on pourra refaire un calcul en diminuantla région d'espace explorée, en resserrant l'échantillonnage spatial.

Référence : G A CAMPBELL, R.M. FOSTER - Fourier Integrals - Van Nostrand 1957.