QUATRIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

UNE APPLICATION EN THEORIE DU SIGNAL DES EQUATIONS DE FILTRAGE LINEAIRE *

Denis de BRUCQ

Chercheur au Département de Mathématiques
de l'U.E.R. des Sciences Exactes et Naturelles

76130 Mt. St. AIGNAN

RESUME

Le bruit θ et le signal S sont des processus aléatoires gaussiens, colorés, stationnaires. L'observation transforme linéairement θ sous l'hypothèse H_o et $\theta + S$ sous l'hypothèse H_1 pour donner une fonction z connue numériquement. On donne le procédé de calcul pour déterminer, l'expérience ayant été réalisée, laquelle des deux hypothèses H_o ou H_1 est à conserver.

SUMMARY

The noise θ and the signal S are stationary, colored gaussian, random processes. The observation linearly transforms θ or $\theta + S$ under H_o hypothesis or H_1 hypothesis respectively and gives a function z numericaly known. An algorithm is given to determine which hypothesis H_o or H_1 is to choose, worked out an experiment.

* Ce travail a été effectué pour le groupe Théorie du Signal du CETHEDEC - DRME

Une Application en Théorie du Signal des Equations de Filtrage linéaire.

Denis de BRUCQ

INTRODUCTION

En théorie du signal, s'introduisent deux hypothèses H_o, bruit seul, et H_1 signal additionné au bruit, entre lesquelles il faut effectuer un choix. Dans cet article, nous présenterons les équations pour effectuer un test entre les deux hypothèses H_o et H_1 , le bruit θ sera gaussien stationnaire, de spectre coloré, le signal S sera indépendant du bruit θ, gaussien, stationnaire et de spectre différent de celui du bruit.

Le temps t intervient de façon continue dans $\mathbb{R}^+ \triangleq [0, \infty[$. Le test s'effectuera progressivement au cours du temps suivant une méthode comparable à celle des tests séquentiels pour lesquels le temps varie de façon discontinue.

L'observation s'effectue à l'aide d'un appareillage qui modifie, sous l'hypothèse H_o le bruit θ, ou sous l'hypothèse H_1 le signal additionné au bruit $\theta + S$, pour donner une observation $z(\tau)$, $\tau \in [0,t]$. L'expérience est observée durant un intervalle $[0,t]$ de temps et le résultat $z(\tau)$, $\tau \in [0,t]$ de l'expérience, est connu numériquement éventuellement avec une certaine imprécision aléatoire. Le temps d'observation $[0,t]$ n'est pas fixé et est une inconnue du problème.

Nous allons reprendre pas à pas la description du modèle choisi. Afin de décrire mathématiquement les différents phénomènes aléatoires qui interviennent pratiquement, introduisons un espace de probabilité $(\Omega, \boldsymbol{a}, P)$ et une famille croissante F_t, $t \in \mathbb{R}$ de sous-tribus de $\boldsymbol{a}$. Soient alors trois processus de Wiener $(V(t), F_t, P)$, $(W(t), F_t, P)$ et $(X(t), F_t, P)$ respectivement p,p et q dimensionnel. Physiquement les accroissements différentiels $dV_i(t)$ $i=1,2,\ldots,p$, $dW_i(t)$ $i=1,2,\ldots,p$ et $dX_r(t)$, $r=1,2,\ldots,q$

représentent 2p + q bruits blancs indépendants.

Le bruit coloré θ provient du bruit blanc dV au moyen du système $\dot{A}$ suivant :

$$A \left\{ \begin{array}{l} \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ vérifiant } t_1 \leq t_2 \\ \theta_i(t_2) = \theta_i(t_1) + \sum_{j=1,2,..p} \int_{t_1}^{t_2} a_{i,j}\, \theta_j(\tau) d\tau + \\ \qquad + \alpha_i V_i(t) \quad i=1,2,\ldots p \end{array} \right.$$

Les coefficients $a_{i,j}$ constituent une matrice a de constantes numériques. Pour des coefficients α_i $i=1,2,\ldots p$ réels nuls, le vecteur p dimensionnel θ serait solution d'un système de p équations différentielles linéaires; l'aléatoire s'introduit comme second membre dans ce système.

Le bruit θ provient dans de nombreuses expériences de phénomènes physiques antérieurs à l'observation qui n'a lieu que sur la période $[0,t] \subset \mathbb{R}^+$. Nous avons introduit les deux instants arbitraires t_1, t_2 de $\mathbb{R}$ pour tenir compte de cette remarque sur le bruit. Pour une situation macroscopique constante les propriétés statistiques du bruit ne dépendent pas d'une translation de l'origine des temps. Si cette propriété est vérifiée, le processus aléatoire $(\theta(t), F_t, P)$ est dit stationnaire.

La solution générale du système A vaut ([5]p.86,§12)

$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$t_1 \leq t_2 \quad \theta(t_2) = e^{(t_2-t_1)a}\theta(t_1) + \alpha V(t_2) - e^{(t_2-t_1)a}\, \alpha V(t_1) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} a\, e^{(t_2-\tau)a}\, \alpha\, V(\tau)\, d\tau.$$

Par suite $(\Theta(\tau), F_\tau, P)$ provient linéairement du processus $(V(\tau), F_\tau, P)$ et c'est un processus gaussien continu presque sûrement et par conséquent également en moyenne quadratique ([7]p.16 lemme 15). Il est centré s'il existe $\tau_1 \in [-\infty, 0]$ tel que $E(\Theta(\tau_1))=0$ ce que nous supposerons. La matrice Λ de covariance se calcule aisément à l'aide de sa définition :

$$\Lambda_{i,j}(u,v) \stackrel{\Delta}{=} E(\Theta_i(u)\,\Theta_j(v)) \quad i,j = 1,2 \dots p \quad u,v \in \mathbb{R}^+$$

soit $\Lambda(u,v) = E(\Theta(u)\,\Theta^*(v))$. On vérifie directement que

$$\Lambda(u,v) = \Lambda(u,u)e^{(v-u)a^*} \quad u \leq v$$

$$\Lambda(u,v) = e^{(u-v)a}\,\Lambda(u,u) \quad u \geq v$$

La famille $\Lambda(u,v)$; $u,v \in \mathbb{R}$ de covariances réelles vérifie ([3] p11) les propriétés suivantes :

1) $\forall\, u, v \in \mathbb{R}$ $\Lambda(u,v)$ est une matrice définie non négative

2) $\forall\, u, v \in \mathbb{R}$ $\Lambda(u,v) = \Lambda^*(v,u)$

3) $\forall\, i,j = 1,2,\dots p$ $\forall\, u,v \in \mathbb{R}$ $|\Lambda_{i,j}(u,v)|^2 \leq \Lambda_{i,i}(u,u)\Lambda_{j,j}(v,v)$

4) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\forall\, u_1, u_2 \dots u_n \in \mathbb{R}$, pour toute famille de n vecteurs

$c_1, c_2, \dots c_n$ de $\mathbb{R}^p$ l'expression

$$\sum_{\substack{k=1,2,\dots n\\ h=1,2,\dots n}} < \Lambda(u_k, u_h)\, c_k, c_h > \text{ est positive}$$

Regardons si les solutions du système A sont stationnaires. Il est nécessaire que $\forall\, \tau \in \mathbb{R}$ $E(\Theta(\tau)) = m$ constante; le processus $(\Theta(\tau), F_\tau, P)$ est centré et $m = 0$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$.

De même, la covariance $\Lambda(u,v)$; $u, v \in \mathbb{R}$ ne dépend que de la différence v-u dans le cas stationnaire; cette seconde propriété est équivalente à $\Lambda(u,u)$ indépendante de $u \in \mathbb{R}$. Une solution stationnaire pour le système A s'obtient ([1] p 48) par un procédé asymptotique en faisant tendre t_1 vers $-\infty$. L'effet des conditions initiales en t_1 diminuent jusqu'à disparaître et seule reste à la limite la partie stationnaire de la solution.

La covariance Λ du processus $(\Theta(t), F_t, P)$ gaussien asymptotique centré solution du système A vérifie les relations

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \Lambda(u,u) = \int_{-\infty}^{u} e^{(u-\tau)a} \alpha\alpha^* e^{(u-\tau)a^*} d\tau$$

et la covariance Λ stationnaire vérifie

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{du}\Lambda(u,u) = 0 = a\,\Lambda(u,u) + \Lambda(u,u)a^* + \alpha\alpha^*$$

Pour le processus $(\Theta(t), F_t, P)$ stationnaire continu en moyenne quadratique de dimension p, la covariance $\Lambda(t) = \Lambda(u,u+t)$ possède ([3] p 30 th 2) la représentation $\Lambda(t) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, dF(\alpha)$ où

$F(\alpha) = (F_{j,k}(\alpha)\ ;\ j,k = 1,2,\ldots p)$ vérifie

a) $\forall\ \alpha_1\ \alpha_2 \in \mathbb{R}\ \alpha_1 \leq \alpha_2\quad F(\alpha_2) - F(\alpha_1)$ est une matrice définie non négative

b) $\sum_{j=1,2,\ldots p} (F_{j,j}(+\infty) - f_{j,j}(-\infty)) < \infty$

Si la covariance Λ est intégrable alors F est dérivable et

$$\forall_{j,k=1,2,\ldots p} \quad \frac{dF_{j,k}}{du}(u) \overset{\Delta}{=} f_{j,k}(u)$$ qui constitue la matrice des densités spectrales de puissance des processus $\Theta_j \quad j=1,2,\ldots p$.

Le système A comprend le cas particulier des équations différentielles pour lesquelles les notions précédentes sont plus familières. Ainsi l'équation

$$\frac{d^p\theta}{dt^p} + a_1 \frac{d^{p-1}\theta}{dt^{p-1}} + \ldots\ldots\ldots + a_p\, \theta = \alpha\, V$$

donne un système équivalent en posant $\theta_1 \stackrel{\Delta}{=} \theta$ sur le vecteur $\begin{vmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} d\,\theta_1 = \theta_2\, dt \\ d\,\theta_2 = \theta_3\, dt \\ \\ d\,\theta_{p-1} = \theta_p\, dt \\ d\,\theta_p = -\, a_p\theta_1 dt - a_{p-1}\theta_2 dt \ldots\ldots - a_1\, \theta_p dt + \alpha\, d\, V \end{cases}$$

possédant une solution stationnaire $(\theta_j(t);\ j=1,2,\ldots p)$.
La covariance $\Lambda_{1,1}(u,v) = E(\theta_1(u)\ \overline{\theta_1(v)}\ )$ permet le calcul de tous les termes $\Lambda_{j,k}(u,v)$ de la matrice de covariance Λ par le raisonnement suivant. Le processus $\theta_1(u)$, $u \in \mathbb{R}$ étant stationnaire, continu en moyenne quadratique, il existe ([8 p 39) un processus du second ordre. $Z(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :

a) Z est un processus centré

b) Z est à accroissements orthogonaux

c) $\forall\ u \in \mathbb{R}$ $\quad \theta(u) \underset{p.s.}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma u}\ d\ Z(\sigma)$

L'intégrabilité de la fonction $\Lambda_{1,1}(t) \stackrel{\Delta}{=} \Lambda_{1,1}(u,u+t)$, nous permet d'introduire la densité spectrale $f(\sigma)$ d'énergie par la formule

$$\Lambda_{1,1}(t) = E(\theta_1(u)\ \overline{\theta_1(u+t)}) = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma u} dZ(\sigma) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma(u+t)} \overline{dZ(\sigma)}\right]$$

$$\Lambda_{1,1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma t}\ f(\sigma)d\sigma \quad \text{avec} \quad f(\sigma)d\sigma = E(dZ(\sigma)\ d\overline{Z}(\sigma)\ )$$

La propriété c) se généralise aux différentes dérivées du processus $\theta(u)$, $u\in\mathbb{R}$ lorsqu'elles existent

$$\forall u\in\mathbb{R} \quad \frac{d^j\theta}{du^j}(u) \underset{p.s.}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\sigma)^j e^{-i\sigma u} dZ(\sigma)$$

De cette manière

$$\Lambda_{j+1,k+1}(\tau)=E(\theta_{j+1}(u)\,\overline{\theta_{k+1}(u+\tau)}\,) = E(\frac{d^j\theta_1}{du^j}(u)\,\frac{d^k\theta_1}{du^k}(u+\tau)\,)$$

$$\Lambda_{j+1,k+1}(\tau)=E\,[\,\int_{-\infty}^{+\infty}(-i\sigma)^j e^{-i\sigma u} dZ(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty}(+i\sigma)^k e^{+i\sigma(u+\tau)}\overline{dZ(\sigma)}\,]$$

$$\Lambda_{j+1,k+1}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}(-i\sigma)^j\,(i\sigma)^k\,e^{i\sigma\tau}\,f(\sigma)\,d\sigma$$

Les moments $\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^{j+k}f(\sigma)\,d\sigma$ $j,k = 1,2,\ldots,p-1$ existent puisque existe la dérivée d'ordre p-1 du processus $\theta_1(u)$, $u\in\mathbb{R}$ et se déduisent de la matrice $\Lambda_{j,k}(u,u)$ $j,k = 1,2,\ldots p$ qui vérifie l'équation de stationnarité

$$\|a\|\Lambda + \Lambda\|a\|^* + \|\alpha\|\,\|\alpha\|^* = 0 \text{ où}$$

$$\|a\| \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & - & - & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & & - & a_p \end{bmatrix} \qquad \|\alpha\| \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - - \\ \alpha \end{bmatrix}$$

L'observation s'effectue au moyen d'un appareil qui transforme les grandeurs θ ou $\theta+S$ non directement observables en une grandeur observable z. La transformation est prise linéaire et nous la décrivons au moyen d'un système différentiel stochastique.

Une Application en Théorie du Signal des Equations de Filtrage linéaire.

Denis de BRUCQ

Hypothèse H_o

$$C)\quad z_r(t)=\sum_{s=1,2,\ldots q}\int_o^t f_{r,s}z_s(\tau)d\tau+\sum_{i=1,2,\ldots p}\int_o^t k_{r,i}\theta_i(\tau)d\tau+\sigma_r X_r(t)$$

$\forall r=1,2,\ldots q$ et $\forall t\in\mathbb{R}^+$

La matrice ($f_{r,s}$; r, s = 1,2,...q) est composée de nombres réels indépendants du temps. Les coefficients σ_r r=1,2,...q nombres réels positifs peuvent être regroupés en une matrice

$$\sigma_{r,s}=\sigma_r\,\delta_{r,s}\ ;\ r,s=1,2,\ldots q$$

Le couplage entre les deux systèmes A et C s'effectue par la matrice $k=(k_{r,i}$; r = 1,2,...q, i = 1,2,...p) à q lignes et p colonnes.

Hypothèse H_1

Nous avons en plus à considérer le signal S. Celui-ci est supposé s'additionner au bruit θ mais le modèle se prête aisément à une modification de ce point. Le signal S peut être certain ou aléatoire. Le cas d'un signal S sinusoïdal d'amplitude et de phase inconnue est traité par l'auteur dans une autre publication à paraître. Dans cet article, nous considérons un signal S gaussien vérifiant un système différentiel semblable à celui du bruit :

$$B)\quad dS_i=\sum_{j=1,2,\ldots p}\int_o^t b_{i,j}\,S_j(\tau)d\tau+\beta_i W_i(t)\quad i=1,2,\ldots p\quad t\in\mathbb{R}^+$$

où $b=(b_{i,j}$; i,j = 1,2,...p) est une matrice de nombres réels et où les coefficients β_i nombres réels positifs sont mis sous la forme matricielle $\beta=(\beta_i\,\delta_{i,j}$; i,j = 1,2,...p).

Les mêmes remarques que pour le bruit θ s'appliquent au signal S et le processus $(S(t), F_t, P ; t \in \mathbb{R}^+)$ est un processus gaussien centré. L'adjonction possible de termes certains dans le second membre de B transformerait le processus centré en un processus non centré. L'espérance mathématique des deux membres de B donnerait alors un système différentiel vérifié par $E(S(t))$ $t \in \mathbb{R}^+$.

En tenant compte du signal, l'observation z vérifie:

$$D)\quad z_r(t)=\sum_{s=1,2,..q}\int_0^t f_{r,s} z_s(\tau)d\tau+\sum_{i=1,2,..p}\int_0^t k_{r,i}(\theta_i(\tau)+S_i(\tau))d\tau + \sigma_r X_r(t)$$

où $r = 1,2,...q$ et où $t \in \mathbb{R}^+$

La suite de ce travail comprend dans le paragraphe 2 un système d'équations permettant le calcul effectif d'un résumé exhaustif entre les hypothèses H_0 et H_1. Le choix entre les deux hypothèses s'appuie sur les résultats numériques obtenus en effectuant les mesures relatives à une expérience. Dans le modèle choisi, ces résultats numériques sont constitués par les q fonctions $z_r(u)$, $u \in [0,t]$ qui sont donc connues, expérience faite. Les décisions à prendre à chaque instant sont: on choisit H_0, on choisit H_1, on continue l'expérience le choix entre H_0 et H_1 n'étant pas encore assez sûr. Le critère de décision consiste à comparer une variable aléatoire réelle, dans notre exemple $RE(t)$ à deux seuils; la droite réelle est divisée en trois intervalles. Le résumé exhaustif $RE(t)$ est préféré à toute autre grandeur construite à partir des fonctions $z_r(u)$, $u \in [0,t]$ en raison des propriétés statistiques de $RE(t)$. ([4] p 18 ou [6] p 118). On ne perd pas d'informations en remplaçant $z_r(u)$ $u \in [0,t]$ $r = 1,2,...q$ par la seule variable aléatoire $R\,E\,(t)$.

Finalement nous traitons par ordinateur l'exemple numérique du paragraphe 3 où les systèmes A,B,C,D sont pris du 2ème ordre.

§ 2 : Equations du test

L'expression du résumé exhaustif $RE(t)$ sera indiquée sous sa forme la plus générale pour le problème comprenant des équations différentielles stochastiques linéaires à coefficients constants. Le résumé exhaustif $RE(t)$ se calculera à chaque instant $t \in R^+$. La formule exprimant $RE(t)$ fait intervenir les espérances conditionnelles $m_i(t)$ de $\theta_i(t)$ $i=1,2,\ldots p$ relativement à $z(u)$ $0 \leq u \leq t$ sous l'hypothèse H_1. Les équations écrites proviendront de résultats antérieurs ([2] § 4).

En premier lieu, indiquons sous l'hypothèse H_0 les équations vérifiées par $m_i(t) \triangleq E(\theta_i(t)/z(u)\ 0 \leq u \leq t)$. Introduisons l'innovation $\overline{z}$ de z par la formule

$$\sigma_r d\overline{z_r} \triangleq dz_r - \sum_{s=1,\ldots,q} f_{r,s} z_s dt - \sum_{i=1,\ldots,p} k_{r,i} m_i dt \quad r=1,2,\ldots,q$$

Si $\mathcal{L}_t \triangleq \sigma(z(u);\ 0 \leq u \leq t)$ est la sous-tribu de $\mathfrak{a}$ engendrée par les variables aléatoires $z(u)$, $0 \leq u \leq t$, on montre que le processus d'innovation $(\overline{z(t)}, \mathcal{L}_t, P)$ est un processus de Wiener q dimensionnel. Soient les moments d'ordre 2

$$\lambda_{i,j}(t) \triangleq E\left[(\theta_i(t)-m_i(t))(\theta_j(t)-m_j(t))\right] \quad i,j = 1,2,\ldots,p$$

Avec ces notations les moments m_i $i=1,2,\ldots,p$ d'ordre 1 vérifient le système différentiel stochastique :

$$dm_i(t) = \sum_{j=1,\ldots p} a_{i,j} m_j(t) dt + \sum_{\substack{r=1,\ldots q \\ j=1,\ldots p}} \lambda_{i,j}(t) k_{r,j} \frac{d\overline{z_r}(t)}{\sigma_r}$$

Une Application en Théorie du Signal des Equations de Filtrage linéaire. Denis de BRUCQ

Les coefficients $\lambda_{i,j}(t)$ $i,j = 1,2,\ldots,p$ fonctions certaines du temps $t \in \mathbb{R}^+$ sont solutions du système différentiel non linéaire dit de Riccati.

$$d\lambda_{i,j} = \sum_{\ell=1,\ldots,p} (a_{i,\ell}\,\lambda_{j,\ell} + a_{j,\ell}\,\lambda_{i,\ell})\,dt + \alpha_i\,\alpha_j\,\delta_{i,j}\,dt$$

$$-\sum_{r=1,\ldots,q} \Big(\sum_{\ell=1,\ldots,p} k_{r,\ell}\,\lambda_{i,\ell}\Big)\Big(\sum_{\ell=1,\ldots,p} k_{r,\ell}\,\lambda_{j,\ell}\Big)\frac{dt}{\sigma_\ell^2}$$

En second lieu, sous l'hypothèse H_1, les équations comprennent les espérances conditionnelles du signal qui sont de nouvelles inconnues du problème. Posons

$$m_j(t) \stackrel{\Delta}{=} E(S_{j-p}(t) \,/\, z(u),\ 0 \leq u \leq t) \quad j = p+1,\ p+2,\ldots,\ 2p$$

Un changement de notation s'impose dans l'écriture des équations du signal afin d'obtenir un seul système différentiel stochastique sur $m_i(t)$ $i=1,2,\ldots,2p$ espérances conditionnelles du bruit θ lorsque $i=1,2,\ldots,p$ puis du signal S lorsque $i= p+1,\ p+2,\ldots,2p$. La même remarque s'applique aux moments λ du second ordre.

L'écriture des deux systèmes A et B devient

$d\eta = c\,\eta\,dt + \gamma\,d\,y$ où

$$c \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} a_{1,1} & -- & a_{1,p} & & & \\ -- & -- & -- & & & \\ a_{p,1} & -- & a_{p,p} & & & \\ & & & b_{1,1} & -- & b_{1,p} \\ & & & -- & -- & -- \\ & & & b_{p,1} & -- & b_{p,p} \end{bmatrix} \quad \eta \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -- \\ \theta_p \\ S_1 \\ -- \\ S_p \end{bmatrix}$$

$$\gamma \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & 0 \\ & - & & & & \\ & & - & & & \\ & & & \alpha_p & & \\ & & & & \beta_1 & \\ & & & & & - \\ 0 & & & & & - \\ & & & & & \beta_p \end{bmatrix} \qquad y \triangleq \begin{bmatrix} V_1 \\ -- \\ V_p \\ W_1 \\ -- \\ W_p \end{bmatrix}$$

$$h \triangleq \left[\begin{array}{cc|cc} k_{1,1} & k_{1,p} & k_{1,1} & k_{1,p} \\ & & & \\ k_{p,1} & k_{p,p} & k_{p,1} & k_{p,p} \end{array}\right]$$

A nouveau considérons l'innovation $\overline{z}$ de z :

$$\sigma_r \, d\overline{z}_r \triangleq dz_r - \sum_{s=1,\dots,q} f_{r,s} z_s \, d\tau - \sum_{i=1,\dots,2p} h_{r,i} m_i(\tau) d\tau \quad r=1,2,\dots,q$$

et $(\overline{z}(\tau), \mathcal{L}_\tau, P)$ est un processus de Wiener q dimensionnel.

Posons $\lambda_{i,j}(\tau) \triangleq E[(\eta_i(\tau)-m_i(\tau))(\eta_j(\tau)-m_j(\tau))]$ i, j=1,2,...,2p

Les 2 p équations différentielles stochastiques pour les moments conditionnels $m_i(\tau)$ i=1,2,...2p s'écrivent

$$dm_i(\tau) = \sum_{j=1,\dots,2p} c_{i,j} m_j(\tau) d\tau + \sum_{\substack{r=1,\dots,q \\ j=1,\dots,2p}} \lambda_{i,j}(\tau) \, h_{r,j} \frac{d\overline{z}_r(\tau)}{\sigma_r}$$

Comme sous l'hypothèse H_o, nous pouvons écrire le système différentiel satisfait par les moments $\lambda_{i,j}$ i, j=1,2,...,2p du second ordre :

$$d\lambda_{i,j} = \sum_{\ell=1,\ldots,2p} (c_{i,\ell}\lambda_{j,\ell} + c_{j,\ell}\lambda_{i,\ell})d\tau + \gamma_i \gamma_j \delta_{i,j}\, d\tau$$

$$- \sum_{r=1,\ldots,q} \Big(\sum_{\ell=1,\ldots,2p} h_{r,\ell}\lambda_{i,\ell}\Big)\Big(\sum_{\ell=1,\ldots,2p} h_{r,\ell}\lambda_{j,\ell}\Big)\frac{d\tau}{\sigma^2}$$

Finalement, le résumé exhaustif $RE(\tau)$ $\tau \in R^+$ s'exprime en fonction des espérances conditionnelles $m_i(\tau)$ $i=1,2,\ldots,p$ calculées sous l'hypothèse H_0 ou $m_i(\tau)$ $i=1,2,\ldots,2p$ calculées sous l'hypothèse H_1. Nous ajouterons l'indice H_0 ou H_1 pour indiquer de quel système provient les grandeurs m. Les données numériques résultats de l'expérience sont constituées par les diverses fonctions $z_r(\tau)$ $\tau \in \mathbb{R}^+$ $r=1,2,\ldots,q$. Elles permettent de calculer les deux processus d'innovation

$$\sigma_r d\,\overline{z_r(H_0)} = dz_r - \sum_{s=1,\ldots,q} f_{r,s} z_s d\tau - \sum_{i=1,\ldots,p} k_{r,i} m_i(H_0)\, d\tau$$

$$\sigma_r d\,\overline{z_r(H_1)} = dz_r - \sum_{s=1,\ldots,q} f_{r,s} z_s d\tau - \sum_{i=1,\ldots,2p} h_{r,i} m_i(H_1)\, d\tau$$

Les systèmes relatifs aux moments λ du second ordre peuvent être résolus indépendamment de l'observation puisque ces systèmes ne comprennent que des paramètres et des coefficients connus lorsque le modèle étudié est choisi.

Expression de $RE(\tau)$:

$$RE(\tau) = \int_0^\tau \sum_{r=1,\ldots,q} \Big[\sum_{s=1,\ldots,q} f_{r,s} z_s + \sum_{i=1,\ldots,2p} h_{r,i} m_i(H_1)\Big] \frac{d\bar{z}(H_1)}{\sigma_r}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\tau \sum_{r=1,\ldots,q} \Big[\sum_{s=1,\ldots,q} f_{r,s} z_s + \sum_{i=1,\ldots,2p} h_{r,i} m_i(H_1)\Big]^2 \frac{d\tau}{\sigma_r^2}$$

$$- \int_0^{t} \sum_{r=1,..,q} \Big[\sum_{s=1,..,q} f_{r,s} z_s + \sum_{i=1,..,p} h_{r,i} m_i(H_0) \Big] \frac{dz(H_0)}{\sigma_r}$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{t} \sum_{r=1,..,q} \Big[\sum_{s=1,..,q} f_{r,s} z_s + \sum_{i=1,..,p} h_{r,i} m_i(H_0) \Big]^2 \frac{d\tau}{\sigma_r^2} \cdot$$

§ 3 : Application Numérique

L'objet de ce paragraphe est de préciser sur un exemple numérique les difficultés d'utilisation des résultats du paragraphe 2 lors d'une expérience. Le bruit θ gaussien réel est pris stationnaire et à condition de pouvoir répéter un certain nombre de fois l'expérience sous l'hypothèse H_0, la fonction d'autocorrélation $E(\theta(t)\ \theta(t+\tau))$, $t, \tau \in \mathbb{R}$ est connue expérimentalement avec précision; la stationnarité implique que cette fonction dépende de τ sans dépendre de t. Un simple calcul donne $f(\sigma)$ $\sigma \in R$ densité spectrale de puissance qui vérifie $E(\theta(t)\ \theta(t+\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\sigma} f(\sigma)\, d\sigma$. La forme de $f(\sigma)$ $\sigma \in \mathbb{R}$ s'obtient aisément par un dispositif électronique. Nous admettrons dans l'application numérique qu'il est possible de l'identifier avec l'expression $f_{th}(\sigma) \triangleq \dfrac{\alpha^2}{(\sigma^2-C)^2+F^2\sigma^2}$ c'est à dire qu'il existe des constatntes α, $F, C \in R^+$ pour lesquelles les fonctions $f(\sigma)$ et $f_{th}(\sigma)$ $\sigma \in \mathbb{R}$ soient quasiment identiques.

Dans ces conditions, nous identifions le bruit θ à la solution stationnaire de l'équation différentielle stochastique.

$d \dfrac{d\theta}{dt} + F\, d\theta + C\, \theta\, dt = \alpha\, d V$ qui devient sous forme canonique

$$\begin{cases} d\theta = \theta_2\, dt \\ d\theta_2 = -C\,\theta\, dt - F\,\theta_2 dt + \alpha\, dV \end{cases} \quad dV \text{ bruit blanc}$$

c'est un cas particulier du système général introduit au paragraphe 2. La signification des coefficients α, F, C pourrait être recherchée dans chaque expérience.

Rappelons que le bruit θ théorique, solution de l'équation différentielle stochastique, est gaussien centré stationnaire de covariance

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\sigma} \; f_{\tau h}(\sigma)\, d\sigma$$

Le signal provenant d'un dispositif construit, nous supposons donnée l'équation régissant l'évolution de S. Soit

$d\,\dfrac{dS}{d\tau} + (2\pi\nu)^2 S d\tau = \beta\; d\; W$ l'équation d'un oscillateur sans perte excité par un bruit blanc W. La même remarque s'applique au système observateur et nous prenons l'équation

$d\,\dfrac{dz}{d\tau} + D\; dz + G\; z\; d\tau = k(\theta + S)\; d\tau + \rho\; dY$ où dY est un bruit blanc.

Nous allons appliquer les expressions du paragraphe §2 à l'exemple. Les paramètres p et q sont alors chacun fixé à 2; de même les différentes matrices valent

$$\|\theta\| = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad \|a\| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C & -F \end{bmatrix} \qquad \|\alpha\| = \begin{bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \|V\| = \begin{bmatrix} V_1 \\ V \end{bmatrix}$$

$$\|S\| = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \qquad \|b\| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2\pi\nu)^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \|\beta\| \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \|W\| = \begin{bmatrix} W_1 \\ W \end{bmatrix}$$

$$\|z\| = \begin{bmatrix} z \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad \|f\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -D & -G \end{bmatrix} \qquad \|\sigma\| \begin{bmatrix} \varepsilon_z \\ \rho \end{bmatrix} \qquad \|Y\| \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\|k\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix} \qquad \|h\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

Une Application en Théorie du Signal des Equations de Filtrage linéaire.

Denis de BRUCQ

L'introduction de $\theta_2 \triangleq \frac{d\theta}{d\tau}$ $T \triangleq \frac{dS}{d\tau}$ et $z_2 \triangleq \frac{dz}{d\tau}$ a pour origine la mise d'une équation différentielle du second ordre sous la forme canonique d'un système différentiel à deux équations. Pour des raisons théoriques - que nous essayerons de lever dans de prochains travaux - il faut introduire ϵ_θ, ϵ_S et ϵ_z relatifs au bruit θ, au signal S et à l'observation z; ces constantes strictement positives sont prises assez petites pour que le modèle théorique décrive avec assez de précision le phénomène expérimental.

Reprenons les diverses équations conduisant à l'expression du résumé exhaustif $RE(\tau)$:

Hypothèse H_o

$$m_1(\tau+\Delta\tau)=m_1(\tau)+\int_\tau^{\tau+\Delta\tau} m_2(\mathcal{T})d\mathcal{T} + \frac{k}{\rho}\int_\tau^{\tau+\Delta\tau} \lambda_{1,1}(\mathcal{T})\, d\overline{z_2}(\mathcal{T})$$

$$m_2(\tau+\Delta\tau)=m_2(\tau)+\int_\tau^{\tau+\Delta\tau} [-Cm_1(\mathcal{T})-Fm_2(\mathcal{T})]d\mathcal{T} + \frac{k}{\rho}\int_\tau^{\tau+\Delta\tau} \lambda_{2,1}(\mathcal{T})\, d\overline{z_2(\mathcal{T})}$$

$$\rho\, d\overline{z_2} \triangleq dz_2-[(-Dz_1(\tau)-Gz_2(\tau)) + k\, m_1(\tau)]\, d\tau \quad z_2=\frac{dz}{d\tau}$$

$$\lambda_{1,1}(\tau+\Delta\tau)=\lambda_{1,1}(\tau)+\epsilon_\theta^2\,\Delta\tau + 2\int_\tau^{\tau+\Delta\tau}\lambda_{1,2}(\mathcal{T})d\mathcal{T} - \frac{k^2}{\rho^2}\int_\tau^{\tau+\Delta\tau}\lambda_{1,1}^2(\mathcal{T})d\mathcal{T}$$

$$\lambda_{1,2}(\tau+\Delta\tau)=\lambda_{1,2}(\tau)+\int_\tau [-C\lambda_{1,2}(\mathcal{T})-F\lambda_{1,1}(\mathcal{T})+\lambda_{2,2}(\mathcal{T})]d\mathcal{T}-\frac{k^2}{\rho^2}\int_\tau^{\tau+\Delta\tau}\lambda_{1,1}(\mathcal{T})\,\lambda_{2,1}(\mathcal{T})\,d\mathcal{T}$$

$$\lambda_{2,2}(\tau+\Delta\tau)=\lambda_{2,2}(\tau)+\alpha^2\,\Delta\tau+2\int_\tau^{\tau+\Delta\tau}[-C\lambda_{2,2}(\mathcal{T})-F\lambda_{2,1}(\mathcal{T})]d\mathcal{T}-\frac{k^2}{\rho^2}\int_\tau^{\tau+\Delta\tau}\lambda_{2,1}^2(\mathcal{T})d\mathcal{T}$$

Une Application en Théorie du Signal des Equations de Filtrage linéaire.

Denis de BRUCQ

Hypothèse H_1

$$m_1(\tau+\Delta\tau)=m_1(\tau)+\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} m_2(\tau)d\tau \quad + \frac{k}{\rho}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}[\lambda_{1,1}(\tau)+\lambda_{S,1}(\tau)]\,d\overline{z_2}(\tau)$$

$$m_2(\tau+\Delta\tau)=m_2(\tau)+\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}[-Cm_1(\tau)-Fm_2(\tau)]d\tau+\frac{k}{\rho}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}[\lambda_{1,2}(\tau)+\lambda_{S,2}(\tau)]d\overline{z_2}(\tau)$$

$$m_S(\tau+\Delta\tau)=m_S(\tau)+\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} m_T(\tau)d\tau \quad +\frac{k}{\rho}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}[\lambda_{1,S}(\tau)+\lambda_{S,S}(\tau)]d\overline{z_2}(\tau)$$

$$m_T(\tau+\Delta\tau)=m_T(\tau)+\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}(-1)(2\pi\nu)^2 m_S(\tau)d\tau \quad +\frac{k}{\rho}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}[\lambda_{1,T}(\tau)+\lambda_{S,T}(\tau)]d\overline{z_2}(\tau)$$

$$\rho d\overline{z_2} \overset{\Delta}{=} dz_2-[(-Dz_1(\tau)-Gz_2(\tau))+km_1(\tau)+km_S(\tau)]\,d\tau \qquad z_2\overset{\Delta}{=}\frac{dz}{d\tau}$$

Ecrivons le système sur les moments λ d'ordre 2 sous sa forme différentielle.

$$d\lambda_{1,1}= \quad 2\lambda_{2,1}\,d\tau \quad +\epsilon_{\theta}^2\,d\tau \qquad -\frac{k^2}{\rho^2}(\lambda_{1,1}+\lambda_{S,1})^2\,d\tau$$

$$d\lambda_{1,2}=(-C\lambda_{1,1}-D\lambda_{2,1}+\lambda_{2,2})d\tau \qquad -\frac{k^2}{\rho^2}(\lambda_{1,1}+\lambda_{S,1})(\lambda_{1,2}+\lambda_{S,2})d\tau$$

$$d\lambda_{2,2}=2(-C\lambda_{1,1}-D\lambda_{2,1})d\tau \quad +\alpha^2 d\tau \qquad -\frac{k^2}{\rho^2}(\lambda_{1,2}+\lambda_{S,2})^2\,d\tau$$

$$d\lambda_{1,S}=(\lambda_{1,T}+\lambda_{2,S})\,d\tau \qquad -\frac{k^2}{\rho^2}(\lambda_{1,1}+\lambda_{S,1})(\lambda_{1,S}+\lambda_{S,S})d\tau$$

$$d\lambda_{1,T}=[-(2\pi\nu)^2\lambda_{1,S}+\lambda_{2,T}]d\tau \qquad -\frac{k^2}{\rho^2}(\lambda_{1,1}+\lambda_{S,1})(\lambda_{1,T}+\lambda_{ST})d\tau$$

$$d\lambda_{2,S}=[\lambda_{2,T}+(-C\lambda_{1,S}-D\lambda_{2,S})]d\tau \qquad -\frac{k^2}{\rho^2}(\lambda_{1,2}+\lambda_{S,2})(\lambda_{1,S}+\lambda_{S,S})d\tau$$

$$d\lambda_{2,T}=\left[-(2\pi\nu)^2\lambda_{2,S}+(-C\lambda_{1,T}-D\lambda_{2,T})\right]d\tau\ -\frac{k^2}{\rho^2}(\lambda_{1,2}+\lambda_{S,2})(\lambda_{1,T}+\lambda_{S,T})\,d\tau$$

$$d\lambda_{S,S}=2\,\lambda_{S,T}\,d\tau\ +\varepsilon_S^2\,d\tau\ -\frac{k^2}{\rho^2}(\lambda_{1,S}+\lambda_{S,S})^2 d\tau$$

$$d\lambda_{S,T}=\left[-(2\pi\nu)^2\,\lambda_{S,S}+\lambda_{T,T}\right]d\tau\ -\frac{k^2}{\rho^2}(\lambda_{1,S}+\lambda_{S,S})(\lambda_{1,T}+\lambda_{S,T})\,d\tau$$

$$d\lambda_{T,T}=-(2\pi\nu)^2\,\lambda_{S,T}\,d\tau\ +\beta^2\,d\tau\ -\frac{k^2}{\rho^2}(\lambda_{1,T}+\lambda_{S,T})^2\,d\tau$$

Résumé Exhaustif

$$RE(\tau+\Delta\tau)=RE(\tau)+$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\left[-Dz_1-Gz_2+km_1(H_1)+km_S(H_1)\right]\frac{d\overline{z_2}(H_1)}{\rho}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\left[-Dz_1-Gz_2+km_1(H_1)+km_S(H_1)\right]^2\frac{d\tau}{\rho^2}$$

$$-\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\left[-Dz_1-Gz_2+km_1(H_o)\right]\frac{d\overline{z_2}(H_o)}{\rho}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\left[-Dz_1-Gz_2+km_1(H_o)\right]^2\frac{d\tau}{\rho^2}$$

Choix des constantes numériques

La densité spectrale f_θ de puissance vaut par hypothèse

$$f_\theta(\lambda) = \frac{\alpha^2}{(\lambda^2 - C)^2 + F^2\lambda^2}$$. Cette fonction a un maximum

$$f_\theta(\lambda_{max}) = \frac{\alpha^2}{F^2 (C - \frac{F^2}{4})} \quad \text{si } C \geq \frac{F^2}{2} \text{ pour } \lambda^2_{max} = (2\pi\nu_{max})^2 = C - \frac{F^2}{2}$$

Pour décrire suffisamment bien le spectre, l'intervalle de discrétisation $\Delta\tau$ est pris égal à $\frac{1}{\Delta\tau} = 10\ 2\pi\ \nu_{max}$. Une telle discrétisation permet d'atteindre des énergies concentrées dans les hautes fréquences.

Pour le signal, la densité spectrale est égale à

$$f_s(\lambda) = \frac{\beta^2}{(\lambda^2 - (2\pi\nu)^2)^2}$$ et le maximum est atteint pour $\lambda = \pm\ 2\pi\nu$.

Usuellement le signal est noyé dans un bruit dont la durée de corrélation est inférieure à celle du signal. Nous prendrons $\nu \leq \nu_{max}$.

L'instrument d'observation est adapté au signal émis et sa fréquence propre est voisine de celle du signal. Le frottement qui étale le spectre est pris le plus faible possible.

Ces diverses considérations nous ont amenés au choix suivant des Constantes Numériques

Constantes Relatives au bruit θ

$F^2 = C = 2\ (2\pi\ 10^5)^2$ $\qquad\qquad$ $\epsilon_\theta = 10^{-2}\ \alpha$

$\nu_{max} \triangleq 10^5$ $\qquad\qquad$ $\alpha = 1$

Constantes Relatives au signal S

$$\nu = \nu_{max}, \frac{\nu_{max}}{2}, \frac{\nu_{max}}{10} \qquad \varepsilon_S = 10^{-2}\beta \qquad \beta = \alpha, 4\alpha, \frac{\alpha}{4}$$

Constantes Relatives à l'observation z

$$D = 10^{-2}\frac{G^2}{2} \qquad \varepsilon_z = 10^{-2}\alpha$$

$$G = (2\pi)^2\nu^2 \qquad \rho = \alpha \qquad k = 9\rho$$

Situation initiale $S(0) = 0$ $z(0) = 0$
$T(0) = 0$ $z_2(0) = 0$

Le bruit doit être pris stationnaire afin que la notion de spectre ait un sens. L'équation de stationarité vérifiée par λ :

$$\begin{pmatrix}0\\ \alpha\end{pmatrix}(\alpha,\ 0) + \begin{pmatrix}0 & 1\\ -C & -F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{1,1} & \lambda_{1,2}\\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda_{1,1} & \lambda_{1,2}\\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -C\\ 1 & -F\end{pmatrix} = 0$$

a pour solution $\|\lambda_{j,k}\| = \begin{pmatrix}\frac{\alpha^2}{2FC} & 0\\ 0 & \frac{\alpha^2}{2F}\end{pmatrix}$. Nous construisons un vecteur $\begin{pmatrix}\theta & (0)\\ \theta_2 & (0)\end{pmatrix}$ gaussien centré de covariance $\|\lambda_{j,k}\|$.

Une Application en Théorie du Signal des Equations de Filtrage linéaire.

Denis de BRUCQ

Notations

$\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes

$E(\ )$ Espérance Mathématique

$E(\theta)$ Vecteur dont les p composantes valent

$$E(\theta_i) \stackrel{\Delta}{=} \int_{\Omega} \theta_i(\omega)\ P(d\omega) \quad i=1,2,\ldots,p$$

Min (t_1, t_2) Minimum des deux nombres réels t_1, t_2

$\mathbb{N} \stackrel{\Delta}{=} \{1,2,\ldots, n,\ldots\}$

p.s. Presque-sûrement

$\mathbb{R}$ Ensemble des nombres réels

$\mathbb{R}^+$ Ensemble des nombres réels positifs ou nuls

$\mathfrak{R}$ Tribu des boréliens de $\mathbb{R}$

$\mathcal{L}_t$ Tribu engendrée par les variables aléatoires $z(u)$, $0 \leq u \leq t$

z_t Famille des variables aléatoires $z(u)$, $0 \leq u \leq t$

$\| \ \|$ Symbole pour indiquer une matrice: $\|a\| = (a_{i,j}; i,j=1,2..p)$

$<\ ,\ >$ Produit scalaire $<c, d> = \sum_{i=1,\ldots,p} c_i \overline{d_i}$

θ^* Vecteur transposé du vecteur θ

$\overline{Z}$ conjugué de Z

$(\Omega, \mathfrak{a}, P)$ Espace de probabilité

$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Δ par définition

$\in$ appartient à

Une Application en Théorie du Signal des Equations de Filtrage linéaire.

Denis de BRUCQ

Lexique

$\mathcal{a}$ tribu de $\Omega \overset{\Delta}{:}$ c'est une famille $\mathcal{a}$ de parties de Ω vérifiant

1) l'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble Ω appartiennent à $\mathcal{a}$
2) si $A \in \mathcal{a}$ alors A^c le complémentaire de A appartient à $\mathcal{a}$
3) si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ appartiennent à $\mathcal{a}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{a}$

F sous-tribu de $\mathcal{a} \overset{\Delta}{:}$ tout ensemble élément de F est élément de $\mathcal{a}$

$F_t, t \in \mathbb{R}$ famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{a}$: Pour $t_1 \leq t_2$ F_{t_1} est une sous-tribu de F_{t_2}

$(\theta_t ; t \in \mathbb{R})$ est un processus aléatoire réel si $\forall t \in \mathbb{R}$ la fonction réelle $\theta_t : \omega \rightsquigarrow \theta(t,\omega)$ est F_t-mesurable, notation $(\theta(t), F_t ; t \in \mathbb{R})$

$\mathcal{L}_t \overset{\Delta}{=} \sigma(z(u); 0 \leq u \leq t)$ tribu engendrée par les variables aléatoires $z(u)$ $0 \leq u \leq t \overset{\Delta}{:}$ c'est la plus petite tribu telle que toutes les fonctions $z(u) : \omega \rightsquigarrow z(u,\omega)$ soient $\mathcal{L}_t$-mesurables pour $0 \leq u \leq t$.

$z_t.P$ mesure image de P par le processus $z(u)$ $0 \leq u \leq t \overset{\Delta}{:}$ Pour tout ensemble C de $\mathfrak{R}^{\otimes [0,t]}$ tribu produit des tribus $\mathfrak{R}$ des boréliens de P, on a $P(C) \overset{\Delta}{=} P\ \{\omega; z_t(\omega) \in C\}$

Λ est une matrice définie non négative si pour tout vecteur c de $\mathbb{C}^p$

$$< \Lambda\, c, c > \overset{\Delta}{=} \sum_{j,k=1}^{p} \Lambda_{j,k}\, c_j\, \overline{c_k}$$ est supérieur ou égal à zéro.

$(X(t), F_t, P)$ processus de Wiener q dimensionnel $\stackrel{\Delta}{:}$ Pour chaque

$t \in R$

$X(t) : \omega \rightsquigarrow X(t,\omega)$ est une variable aléatoire

<u>centrée</u> F_t-mesurable gaussienne. De plus $t_1 \leq t_2$

$E\,(X_i(t_1)\ X_j(t_2)) = t_1\ S_{i,j}$ $i,j = 1,2,\ldots,q$

$E(\theta(t)/\ \mathcal{L}_t) \stackrel{\Delta}{:}$ Variable aléatoire $\mathcal{L}_t$-mesurable vérifiant

$$\forall B \in \mathcal{L}_t \int_B E(\theta(t)/\ \mathcal{L}_t)\ P\ (d\omega) = \int_B \theta(t)\ P\ (d\omega)$$

$E(\theta(t)/z_t) \stackrel{\Delta}{:}$ Variable aléatoire définie sur $(\mathbb{R}^{[0,t]}, \mathfrak{R}^{\otimes [0,t]})$
vérifiant $\forall C \in \mathfrak{R}^{\otimes [0,t]}$.

$$\int_{z^{-1}(C)} \theta(t)\ P(d\omega) = \int_C E(\theta(t)/z_t = x_t)\ zt.P\ (dx)$$

résumé exhaustif RE pour les hypothèses H_0 et $H_1 \stackrel{\Delta}{:}$ Pour toute variable aléatoire réelle positive h sur $(\Omega, \boldsymbol{\alpha})$, il existe une variable aléatoire réelle f sur $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ telle que $E(h/RE) \underset{p.s.}{=} f(RE)$ sous l'hypothèse H_0 et sous l'hypothèse H_1([6] p 118 ex IV.3.S)

Bibliographie

[1] A.V. Balakrishnan : Communication Theory
Mac Graw Hill Book Compagny 1968

[2] D. de Brucq, M. Granger et M. Laidain : Sur la probabilité après Observation en théorie du filtrage
Revue du CETHEDEC - 4ème Tri. n°3 1972

[3] I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod : Introduction to the theory of random processes
W.B. Saunders Compagny 1965

[4] E.L. Lehmann : Testing Statistical Hypotheses
John Wiley and Sons 1959

[5] Lelong : Equations Différentielles
C.D.U. Certificat de Mathématiques II

[6] J. Neveu : Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités
Masson et Cie 1964

[7] J. Neveu : Processus Aléatoires Gaussiens
Presse de l'Université de Montréal 1968

[8] A.M. Yaglom : Theory of Stationary Random Functions
Prentice Hall 1965