

QUATRIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

METHODES DE SIMULATION ET D'INTEGRATION NUMERIQUES DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES NON LINEAIRES

G. ALENGRIN

E. CASTELL CASTAN

Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du CNRS
7, Avenue du Colonel Roche - B.P. 4036 - 31055 Toulouse Cédex

RESUME

Dans les problèmes de filtrage non linéaire les signaux sont généralement représentés par des équations différentielles stochastiques.

Une étude est faite sur l'application des schémas d'intégration classiques aux équations différentielles stochastiques.

Divers exemples sont donnés et une comparaison est faite dans des cas où la solution analytique de l'équation de FOKKER PLANCK peut être trouvée.

Des tests statistiques sont alors appliqués dans la comparaison des valeurs théoriques et des résultats expérimentaux.

SUMMARY

In non linear filtering problems processes are generally modeled by stochastic differential equations.

This paper deals with the numerical integration of stochastic differential equations.

Several examples are given and comparison is done with the solution of the FOKKER-PLANCK equation in cases where an analytical solution can be found.

Statistical tests are used in the comparison between theoretical and experimental values.

METHODES DE SIMULATION ET D'INTEGRATION NUMERIQUES
DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES
NON LINEAIRES

G. ALENGRIN

E. CASTELL CASTAN

INTRODUCTION

De nombreuses études portant sur divers domaines d'application (phénomènes physiques, guidage de véhicules spatiaux, problèmes de traitement du signal en télécommunication) proposent des modèles de processus aléatoires définis sous forme d'équations différentielles stochastiques dans lesquelles le bruit est un bruit blanc gaussien.

Dans les problèmes de filtrage (et en particulier de filtrage non linéaire) ou de détection on est conduit à étudier des équations différentielles stochastiques dont le coefficient du terme de bruit est une fonction de l'état du processus.

Dans la réalisation pratique de la modélisation ou du filtrage d'un processus se pose le problème de l'intégration numérique de telles équations.

La théorie de ITO donne une définition de l'intégrale stochastique qui sera appelée intégrale stochastique au sens de ITO. Cette définition conduit à un calcul différentiel stochastique dont les règles sont différentes du calcul différentiel ordinaire.

Une autre définition de l'intégrale stochastique a été donnée par STRATONOVICH, définition qui conduit aux mêmes règles que celles du calcul différentiel ordinaire.

D'autre part, la densité de probabilité de transition des processus Markoviens définis par des équations différentielles stochastiques satisfait, sous des conditions très générales, une équation aux dérivées partielles du type équation de diffusion l'équation "directe" de FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV.

Dans une première partie nous rappellerons les principaux résultats concernant les processus définis par des équations différentielles stochastiques.

Ensuite nous exposerons les problèmes d'intégration numérique de telles équations. En effet, l'utilisation des schémas habituels d'intégration dans le cas d'équations stochastiques doit être soigneusement étudiée. On séparera ainsi les schémas du type "prédicteur" des schémas de Runge-Kutta.

Diverses simulations numériques ont été réalisées dans des cas où l'on pouvait déterminer analytiquement la solution de l'équation de FOKKER-PLANCK. Dans chaque cas de nombreuses réalisations du processus ont été effectuées de façon à comparer la distribution expérimentale à la distribution théorique. Cette com-



paraison est faite au moyen d'un test d'ajustement sur les distributions de probabilité.

Les résultats permettent d'indiquer, suivant le schéma d'intégration utilisé, quelle sera la définition de l'équation différentielle stochastique (au sens de Stratonovich ou du sens de ITO).

Enfin dans une dernière partie nous exposerons une autre méthode permettant de produire des réalisations d'un processus défini par une équation différentielle stochastique en considérant une transformation du processus qui conduit à un mouvement Brownien avec horloge aléatoire.

MODELE DIFFERENTIEL

Dans les nombreux problèmes évoqués au paragraphe précédent le modèle du processus se présente sous la forme générale de l'équation différentielle stochastique :

$$(1) \quad dx = f(x, t) dt + \sigma(x, t) d\beta$$

où x est un processus vectoriel de dimension n , $f(x, t)$ et $\sigma(x, t)$ des fonctions vectorielles non linéaires de ce processus et $\beta(t)$ un processus de Wiener-Levy (ou mouvement Brownien) à n dimensions défini par :

$$E[\beta(t)] = 0 \quad \text{et} \quad E[\beta(t) \beta^T(s)] = \min(t, s)$$

L'équation (1) conduit à l'expression

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\xi), \xi) d\xi + \int_0^t \sigma(x(\xi), \xi) d\beta(\xi)$$

dans laquelle la dernière intégrale est définie par rapport à un processus dont les variations ne sont pas bornées, c'est une intégrale stochastique dont la définition ne peut être établie au sens des intégrales classiques.

L'intégrale stochastique au sens de ITO

K. ITO a donné une définition de l'intégrale stochastique pour des fonctions du processus ne dépendant pas des réalisations futures du mouvement brownien, cette définition est la limite en moyenne quadratique de la quantité :

$$(2) \quad \sum_{K=0}^{N-1} \sigma(x(t'_K), t_K) [\beta(t_{K+1}) - \beta(t_K)]$$

pour $N \rightarrow \infty$ et $\max(t_{K+1} - t_K) \rightarrow 0$

Cette formule a été étendue aux fonctions de carré sommable avec probabilité 1.

L'intégrale stochastique au sens de ITO repose donc sur la non corrélation entre la fonction $\sigma(x(t'_K), t_K)$ et l'accroissement du processus de Wiener-Levy $\beta(t_{K+1}) - \beta(t_K)$. On peut envisager d'autres définitions pour lesquelles la fonction $\sigma(\cdot)$ n'est plus prise à un instant t_K mais à un instant différent dans l'intervalle $[t_{K+1}, t_K]$, on verra ainsi comment définir l'intégrale stochastique au sens de Stratonovich. Ces différentes définitions de l'intégrale stochastique vont conduire à différents types de calculs différentiels associés à ces intégrales. Ainsi, dans le cas de l'intégrale de ITO, on détermine des règles de calcul différentiel différentes du calcul différentiel ordinaire.

Calcul différentiel de ITO

Considérons une fonction scalaire $\Phi(x, t)$ du processus stochastique défini par l'équation (1), deux fois continuellement différentiable en x , et C^1 en t , sa différentielle est donnée par l'équation:

$$(3) \quad d\Phi(x, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \mathcal{A}(\Phi) dt + \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} \sigma(x, t) d\beta$$

où l'opérateur $\mathcal{A}(\cdot)$ est défini par :

$$\mathcal{A}(\cdot) = \sum_{i=1}^n f_i(x, t) \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\sigma \sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Intégrale stochastique au sens de STRATONOVICH

STRATONOVICH a donné une définition de l'intégrale stochastique en considérant la limite en moyenne quadratique de

$$(4) \quad \sum_{K=0}^{N-1} \sigma(x(\frac{t_{K+1}+t_K}{2}, \frac{t_{K+1}+t_K}{2})) [\beta(t_{K+1}) - \beta(t_K)]$$

pour $N \rightarrow \infty$ et $\max(t_{K+1} - t_K) \rightarrow 0$



C'est une définition symétrisée de l'intégrale stochastique et le calcul différentiel qui lui est associé est le calcul différentiel ordinaire.

Les résultats précédents montrent donc les divergences apparaissant lors du choix d'une définition de l'intégrale stochastique. Ce problème surviendra en particulier lorsque l'on voudra simuler numériquement un processus stochastique défini par une équation différentielle stochastique telle que (1) et il faut s'attendre à ce que les différents schémas d'intégration numérique classiques ne donnent pas les mêmes résultats. L'étude qui va suivre a pour but de préciser sur des exemples simples quels sont les résultats donnés par deux types de méthodes d'intégration numérique : les schémas prédicteurs et les méthodes de Runge-Kutta. Mais il est une autre façon de caractériser un processus Markovien défini par une équation différentielle stochastique qui consiste à définir la densité de probabilité de transition du processus. Sous des conditions assez générales de continuité pour les termes $f(x, t)$ et $\sigma(x, t)$ et leurs dérivées, on montre que, pour le processus défini par l'équation (1), la densité de probabilité de transition existe et obéit à l'équation de FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV :

$$(5) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_i p)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 [(\sigma \sigma^T)_{ij} p]}{\partial x_i \partial x_j}$$

Cette équation ne peut être résolue analytiquement que dans quelques cas et nous avons étudié certains de ces cas pour faire une comparaison entre la densité de probabilité théorique et la densité donnée par les différentes méthodes de simulation d'une équation différentielle stochastique.

SIMULATION NUMÉRIQUE

Le premier exemple choisi dans cette étude est l'équation différentielle stochastique :

$$(6) \quad dx = a x dt + \sigma_1 x d\beta$$

où $d\beta$ représente un accroissement infinitésimal d'un mouvement brownien défini par :

$$E [d\beta] = 0 \qquad E [d\beta^2] = dt$$

Pour un tel processus on peut déterminer la solution analytique

qui est donnée par :

$$(7) \quad x = x_0 e^{\left[a - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right] t + \sigma_1 \beta}$$

On peut d'ailleurs le vérifier aisément en appliquant à l'équation (7) les règles du calcul différentiel stochastique données en (3) pour retrouver l'équation (6)

Le processus stochastique x est ainsi exprimé analytiquement en fonction de β . Or l'expression de la densité de probabilité du mouvement brownien β est donnée par :

$$(8) \quad p(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{t}}$$

sachant qu'au temps $t = 0$ $P[\beta_0 = 0] = 1$

Les résultats relatifs aux transformations de variables aléatoires vont permettre de déterminer une expression analytique pour la densité de probabilité du processus x .

En particulier l'équation différentielle stochastique

$$(9) \quad dx = \frac{1}{2} x dt + x d\beta$$

où β a une variance unité et qui est du même type que l'équation (6), définit un processus dont la densité de probabilité obéit à l'équation :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (xp)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 p)$$

l'équation (7) donne ici

$$(10) \quad x = e^\beta$$

et les remarques précédentes permettent de donner l'expression de la densité de probabilité sous la forme :

$$(11) \quad p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\text{Log } x)^2}{2t}}$$

On pourra donc à chaque instant connaître de manière exacte la répartition de la variable aléatoire x définie sur $[0, +\infty[$.



Cet exemple simple va permettre d'étudier la validité de plusieurs schémas d'intégration appliqués à l'équation (9)

Schémas d'intégration du type prédicteur

On a ainsi effectué une simulation numérique de l'équation (9) sous la forme :

$$(12) \quad x_{K+1} = x_K + 0.5 x_K \Delta t + x_K \Delta \beta_K$$

où $\Delta \beta_K$ est tiré d'une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées suivant une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance Δt .

Le programme de simulation numérique a effectué 2000 réalisations du processus et donne l'histogramme de ces réalisations au temps $t = 1$. Dans ce même programme on a également réalisé la simulation de l'équation $dx = x d\beta$ que l'on peut obtenir à partir de la solution (10) en appliquant les règles du calcul différentiel ordinaire. Cette équation est donc l'équation de l'I'O d'un autre processus stochastique

$$x = e^{-\frac{1}{2} t + \beta}$$

L'équation a été discrétisée comme la précédente, suivant un schéma d'Euler :

$$(13) \quad x_{K+1} = x_K + x_K \Delta \beta_K$$

Les résultats correspondants à cette simulation numériques sont résumés dans le tableau I. Dans la deuxième colonne sont portées les valeurs théoriques des probabilités de présence de x dans chaque intervalle pour le processus x défini par l'équation (10). Dans la troisième colonne on a porté la fréquence d'apparition dans chaque intervalle du processus correspondant à l'équation (12) et dans la quatrième colonne les résultats relatifs à l'équation (13).

Le simple examen de ce tableau confirme le bon accord entre la prévision théorique et les résultats obtenus dans la simulation de l'équation (12). Par contre les résultats de la dernière colonne indiquent qu'il ne s'agit pas du même processus. Le décalage du maximum de la courbe de densité de probabilité vers zéro pouvant être expliqué par la présence du terme d'amortissement $e^{-1/2 t}$ dans l'expression $x = e^{-1/2 t + \beta}$

Intervalle λ_i	$\text{Pr}[x \in \lambda_i]$	Simulation equation (12)	Simulation equation (13)
0 - 0.1	0.011	0.013	0.034
0.1 - 0.2	0.044	0.043	0.101
0.2 - 0.3	0.060	0.057	0.109
0.3 - 0.4	0.065	0.066	0.088
0.4 - 0.5	0.065	0.065	0.081
0.5 - 0.6	0.059	0.055	0.070
0.6 - 0.7	0.056	0.050	0.061
0.7 - 0.8	0.051	0.051	0.051
0.8 - 0.9	0.046	0.040	0.044
0.9 - 1.0	0.041	0.044	0.040
1.0 - 1.2	0.072	0.073	0.057
1.2 - 1.4	0.058	0.055	0.050
1.4 - 1.6	0.048	0.051	0.036
1.6 - 1.8	0.041	0.038	0.024
1.8 - 2.0	0.034	0.038	0.023
2.0 - 3.0	0.109	0.108	0.066
> 3	0.135	0.150	0.064
> 6	0.037	0.046	0.012

Tableau I



Pour caractériser de façon moins subjective l'accord entre la distribution théorique et la distribution expérimentale on a effectué dans chacun des cas, un test d'ajustement par test du χ^2 on a ainsi déterminé pour chacun des processus un indicateur d'écart suivant la relation :

$$R = \sum_{i=1}^r \frac{(\mathcal{V}_i - n p_i)^2}{n p_i}$$

r étant le nombre d'intervalles, n l'effectif total ici égal à 2000, p_i la probabilité théorique dans chaque intervalle et \mathcal{V}_i/n la fréquence observée.

Le test de χ^2 appliqué aux résultats précédents pour un seuil de signification de 0,05 indique que le processus simulé par l'équation (12), qui est une discrétisation par schéma d'Euler de l'équation (9) a une distribution de probabilité en accord avec l'équation (10), au contraire pour le processus simulé par l'équation (13) la distribution ne correspond pas à la distribution du processus défini par (10) mais à un autre processus défini par l'équation

$$x = e^{-1/2 t + \beta}$$

Ces résultats ont donc permis de vérifier que l'application d'un schéma d'Euler à l'intégration d'une équation différentielle stochastique conduisait bien à la définition de l'intégrale stochastique au sens de ITO.

De la même façon d'autres schémas d'intégration du type prédicteur conduiront, par la définition même de leur principe d'intégration, à une solution au sens de ITO.

Nous avons ainsi appliqué à l'intégration de l'équation différentielle (9) un schéma prédicteur d'ordre 2 d'Adams-Bashforth et effectué 2000 réalisations de ce processus. Le test d'ajustement du χ^2 a permis également de valider l'hypothèse du bon accord entre la distribution expérimentale et la distribution théorique définie à partir de la solution de ITO (10). (tableau II).

Schémas d'intégration du type Runge-Kutta

Une deuxième partie de cette étude est consacrée à l'application des méthodes d'intégration de Runge-Kutta aux équations différentielles stochastiques. Une première simulation numérique a été effectuée sur l'équation

$$dx = x d\beta,$$

Intervalle λ_i	$\text{Pr}[x \in \lambda_i]$	Simulation équation (9) par schéma d'Adams - Bashforth	Simulation équation $dx = -x d\beta$ par schéma Runge-Kutta
0 - 0.1	0.011	0.012	0.012
0.1 - 0.2	0.044	0.040	0.041
0.2 - 0.3	0.060	0.060	0.059
0.3 - 0.4	0.065	0.069	0.069
0.4 - 0.5	0.065	0.063	0.065
0.5 - 0.6	0.059	0.058	0.058
0.6 - 0.7	0.056	0.052	0.045
0.7 - 0.8	0.051	0.052	0.051
0.8 - 0.9	0.046	0.040	0.042
0.9 - 1.0	0.041	0.049	0.048
1.0 - 1.2	0.072	0.070	0.072
1.2 - 1.4	0.058	0.060	0.054
1.4 - 1.6	0.048	0.043	0.048
1.6 - 1.8	0.041	0.042	0.040
1.8 - 2.0	0.034	0.033	0.035
2.0 - 3.0	0.109	0.107	0.114
> 3	0.135	0.150	0.147
> 6	0.037	0.046	0.045

Tableau II



que l'on a déjà étudiée dans le paragraphe précédent et qui est l'équation au sens de ITO du processus défini par

$$(14) \quad x = e^{-1/2 t + \beta}$$

ou l'équation au sens de Stratonovich du processus

$$(10) \quad x = e^{\beta}$$

les résultats de la simulation numérique et le test d'ajustement correspondant pour la distribution du processus montrent que l'intégration par un schéma de Runge-Kutta (du 4ème ordre dans ce cas) donne la solution au sens de Stratonovich, c'est-à-dire une distribution analogue à celle du processus défini par (10).^{*}

L'intégration par la méthode de Runge-Kutta conduit donc à une définition symétrisée de l'intégrale stochastique comme on peut s'en rendre compte en évaluant les différents termes de l'expression dans un cas général.

Considérons en effet une équation stochastique sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(x) \dot{\beta}$$

où $\dot{\beta}$ représente de manière formelle un bruit blanc gaussien et $\sigma(x)$ est une fonction suffisamment dérivable de x .

Si l'on applique à cette équation la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 il faudra définir le terme :

$$k_1 = \sigma(x_0) u_0$$

avec u_0 tiré d'une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et $E[u_0^2] = 1/\Delta t$.

On définira ensuite :

$$k_2 = \sigma(x_0 + \frac{\Delta t}{2} \sigma(x_0) u_0) u_0$$

ce terme sera développé en série de Taylor ce qui donne :

$$k_2 = \sigma(x_0) u_0 + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\Delta t}{2} \sigma(x_0) u_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \frac{\Delta t^2}{4} \sigma^2 u_0^3 + \dots$$

la non-corrélation entre $\sigma(x_0)$ et u_0 et le fait que la variance de u_0 soit de l'ordre de $1/\Delta t$ permettent d'écrire

* (tableau II)

$$E \left[k_2 - \sigma(x_0) u_0 - \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta t u_0^2 \right] \rightarrow 0 \text{ lorsque } \Delta t \rightarrow 0$$

et de même

$$E \left[k_2 - \sigma(x_0) u_0 - \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta t u_0^2 \right]^2 \rightarrow 0$$

donc en moyenne quadratique :

$$k_2 = \sigma(x_0) u_0 + \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

On définit ensuite le terme :

$$k_3 = \sigma \left(x_0 + \frac{\Delta t}{2} \sigma u_0 + \frac{1}{4} \Delta t \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) u_0$$

et on démontrerait de la même façon que la limite en moyenne quadratique de ce terme est :

$$k_3 = \sigma u_0 + \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

et enfin le terme k_4 qui est exprimé à l'extrémité de l'intervalle d'intégration a pour expression :

$$k_4 = \sigma u_0 + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

en regroupant les différents termes on obtient ainsi :

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{6} \left[6 \Delta t \sigma u_0 + 3 \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta t \right]$$

le résultat précédent signifie que si l'on intègre l'équation $dx = \sigma(x) d\beta$ par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, cela revient à intégrer par un schéma d'Euler l'équation :

$$dx = \sigma(x) d\beta + \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} dt$$

cette dernière équation est une équation au sens de ITO et sa transformation en une équation de Stratonovich donne précisément

$$dx = \sigma(x) d\beta$$



Une autre simulation numérique avec intégration par la méthode de Runge-Kutta a été faite dans un autre cas, pour lequel la fonction $\sigma(x)$ admettait des dérivées d'ordre supérieur à 1 non nulles.

Nous avons ainsi choisi l'équation :

$$(15) \quad dx = \sqrt{1+x^2} \, d\beta$$

qui correspond à l'équation au sens de ITO :

$$dx = \frac{1}{2} x \, dt + \sqrt{1+x^2} \, d\beta$$

le processus ainsi défini est

$$(16) \quad x = \text{sh } \beta.$$

dont on peut déterminer la loi de probabilité.

La simulation et l'intégration numérique de l'équation (15) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et le test d'ajustement sur la distribution correspondant à (16) ont montré ici aussi que l'intégration par la méthode de Runge-Kutta donne la solution au sens de Stratonovich.

Méthode évitant l'intégration d'une équation différentielle stochastique

Dans certains cas on peut produire un processus défini par une équation différentielle stochastique à partir d'une réalisation de mouvement brownien dont on a changé l'échelle de temps. Cette méthode est décrite dans [1] et [2] et nous l'exposerons brièvement avant de montrer son application sur les exemples précédents.

Soit une équation différentielle stochastique définie par :

$$dx = f(x) \, dt + \sigma(x) \, d\beta$$

on va définir une transformation du processus telle que l'on puisse annuler le coefficient de "dérive" dans la nouvelle équation. Par application des règles du calcul différentiel stochastique à une fonction $s(x)$ on a :

$$ds(x) = \left(f \frac{ds}{dx} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2s}{dx^2} \right) dt + \frac{ds}{dx} \sigma \, d\beta$$

l'annulation du terme de dérive conduit à :

$$s(x) = \int_{-\infty}^x \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\xi} \frac{2 f(\lambda)}{\sigma^2(\lambda)} d\lambda \right\} d\xi$$

et on a alors :

$$ds(x_t) = r(s(x_t)) d\beta$$

avec

$$r(s(x_t)) = \sigma(x_t) \left(\frac{ds}{dx} \right)_{x=x_t}$$

on constate donc que l'on est ramené à un mouvement brownien avec un facteur d'échelle différent. On va effectuer un changement d'échelle des temps en considérant un temps d'arrêt $t_*(t)$ défini par :

$$\int_0^{t_*(t)} \frac{1}{r^2(\beta(l))} dl = t$$

et on démontre alors que l'on a :

$$s(x_t) = \beta(t_*(t))$$

ou encore

$$x_t = s^{-1}(\beta(t_*(t)))$$

Si l'on applique ces résultats aux équations différentielles stochastiques étudiées au paragraphe précédent on voit tout d'abord que dans le cas de l'équation (9)

$$dx = \frac{1}{2} x dt + x d\beta$$

la fonction $s(x) = \text{Log } x$

et dans ce cas $ds(x) = d\beta$

on a donc $t_*(t) = t$

et $x_t = e^{\beta(t)}$



on retrouve donc le résultat (10) et l'on peut effectivement produire le processus x à partir du mouvement brownien β , avec dans ce cas la même échelle de temps.

Le deuxième exemple choisi est l'équation au sens de ITO :

$$dx = \sqrt{1 + x^2} d\beta$$

Dans ce cas $s(x) = x$ puisque le terme de dérive est déjà éliminé dans cette équation. le temps d'arrêt sera défini par :

$$(17) \int_0^{t_t(t)} \frac{d\beta}{1 + \beta^2} = t$$

et le processus x_t sera donné par la valeur du mouvement brownien au temps $t_t(t)$. On peut donc à l'aide de la réalisation d'un mouvement brownien, produire le processus x_t en évaluant l'intégrale (17) qui permettra de définir le temps d'arrêt $t_t(t)$.

Cette méthode qui permet de produire un processus stochastique plus complexe à partir du processus élémentaire qu'est le mouvement brownien est limitée dans les résultats précédents au cas d'un processus scalaire et il serait intéressant d'avoir une généralisation pour des processus vectoriels.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.S. BUCY - P.D. JOSEPH
Filtering for stochastic processes with applications to
guidance.
Interscience publishers 1968.

- [2] K. ITO - H.P. Mc KEAN
Diffusion processes and their sample paths.
Springer Verlag. 1965.

- [3] W. FÉLLER
An introduction to probability theory and its applications
Volume II. John Wiley. 1966.

- [4] A.H. JAZWINSKI
Stochastic processes and filtering theory.
Mathematics in Science and Engineering, vol. 64.
Academic Press, 1970.