QUATRIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

ESTIMATION OPTIMALE DE LA VARIANCE D'UN PROCESSUS DE WIENER LEVY IMPARFAITEMENT OBSERVE

J. AGUILAR MARTIN* J. PAGES FITA**

* Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du CNRS
7, Avenue du Colonel Roche - B. P. 4036 - 31055 Toulouse Cedex

** Laboratoire d'Automatique de l'ETSII. Université Polytechnique de Barcelone.

RESUME : On considère l'observation d'un signal formé par la somme d'un processus de Wiener Levy et d'un bruit blanc où le deuxième a une variance connue et on se propose d'estimer la variance de l'autre.
L'application du calcul différentiel stochastique de ITO permet l'établissement des équations différentielles du signal ainsi que des différents moments de la densité de probabilité de l'état de ce système différentiel stochastique, conditionnée par la suite des observations.
En observant les formes différentielles stochastiques ainsi obtenues, on constate que l'espérance mathématique de la variance inconnue vérifie l'égalité de Schwarz par rapport au temps et au signal observé.
On se trouve donc dans un cas de filtrage non linéaire admettant une solution optimale complète, ce qui permet de calculer de façon explicite l'estimateur optimal.

SUMMARY: The observed signal is a Wiener-Levy process with unknown variance corrupted by independent white noise.
ITO differential calculus yields the equations of the infinite sequence of moments of the conditional probability of the state of the stochastic differential system so defined, according to the available observations.
In such differential forms one can see that the optimal estimate of the unknown variance satisfies Schwarz equality with respect to time and the observed signal.
A non linear optimal finite filter exists and the optimal estimator is then constructed.

ESTIMATION OPTIMALE DE LA VARIANCE D'UN PROCESSUS DE WIENER LEVY IMPARFAITEMENT OBSERVE

J. AGUILAR MARTIN J. PAGES FITA

POSITION DU PROBLEME

Le modèle de l'observation perturbée d'un processus de Wiener-Levy de variance inconnue est donnée par les équations :

$$(1) \quad \begin{aligned} dx_1 &= \sqrt{x_2}\, d\beta \\ dx_2 &= 0 \\ dz &= x_1\, dt + \sigma\, d\eta \end{aligned}$$

où

$$E\,(x_1\,(t,\omega) - x_1\,(t_0,\omega))\,(x_1\,(\tau,\omega) - x_1\,(t_0,\omega))\,]$$
$$= x_2\,(\min\,(t,\tau) - t_0)$$

$\eta\,(t,\omega)$ et $\beta\,(t,\omega)$ sont des processus de Wiener-Levy indépendants et de variance unité.

L'estimation de la variance du processus de Wiener-Levy $x_1(t,\omega)$ c'est-à-dire de x_2, peut être formulée sous forme d'un problème de filtrage non linéaire.

On prendra donc comme estimateurs l'espérance conditionnée par les observations $z\,(s)$, $t_0 \leq s \leq t$.

DEVELOPPEMENT DU FILTRE NON LINEAIRE

A partir de l'évolution de la densité de probabilité conditionnelle du processus de ITO imparfaitement observé décrit par les équations (1) on obtient l'équation différentielle stochastique de l'estimation optimale de $\hat{g}$ d'une fonction g (x) par

$$(2) \quad d\hat{g} = \widehat{\mathcal{A}g}\, dt + \frac{(\widehat{gx_1} - \hat{g}\,\hat{x}_1)(dz - \hat{x}_1\, dt)}{\sigma^2}$$

L'opérateur inverse de Kolmogorov $\mathcal{A}$ est ici :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\, x_2\, \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}}$$

et le circonflexe indique l'espérance mathématique conditionnée par toutes les observations.

En utilisant la formule (2) et la règle de différenciation de ITO, on établit les équations d'évolution des estimateurs de l'état

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} d\hat{x}_1 &= \frac{P_{11}}{\sigma^2} (dz - \hat{x}_1\, dt) \\ d\hat{x}_2 &= \frac{P_{12}}{\sigma^2} (dz - \hat{x}_1\, dt) \end{aligned}$$

Ces équations font intervenir les moments centrés d'ordre 2

$$P_{ij} = E\,(x_i - \hat{x}_i)\,(x_j - \hat{x}_j) \;\Big|\; z\,(s)\; t_0 \leq s \leq t \,\Big]$$

De la même façon on établit les équations différentielles d'évolution des moments P_{ij}.

$$(4) \qquad d\,P_{ij} = (\hat{x}_2\, \delta_{1i}\, \delta_{1j} - \frac{P_{1i}\, P_{1j}}{\sigma^2})\, dt \; + \frac{P_{1ij}}{\sigma^2} (dz - \hat{x}_1\, dt)$$

Dans l'équation (4) apparaissent à leur tour les moments centrés du 3ème ordre :

$$P_{1ij} = E\,(x_1 - \hat{x}_1)\,(x_i - \hat{x}_i)\,(x_j - \hat{x}_j) \;\Big|\; z\,(s)\; t_0 \leq s \leq t \,\Big]$$

On peut donc se rendre compte que ce filtre non linéaire se compose d'une infinité d'équations faisant intervenir des moments d'ordre de plus en plus élevé. Le filtre optimal est donc irréalisable en pratique sous cette forme.

On peut se demander si l'estimateur généré par ce système différentiel infini serait une fonction uniquement du temps et d'un nombre fini de fonctionnelles des observations. Dans le cas présent nous nous proposons d'étudier la dépendance de t et de z uniquement. Pour ceci nous appliquerons le théorème de Schwarz aux formes différentielles du filtre optimal.

EGALITE DE SCHWARZ DANS LES EQUATIONS DU FILTRE OPTIMAL

Etant données les équations d'un processus de ITO imparfaitement observé :

$$dx = f\,(x,\ t)\ dt + \Lambda\,(x,\ t)\ d\beta$$

$$dz = h\,(x,\ t)\ dt + d\eta$$

on définit les équations du filtre optimal par l'application de la formule (2) sous sa forme générale à la suite infinie des moments de la densité de probabilité conditionnelle. Ceci fournit une suite d'équations différentielles stochastiques du type :

(5) $$d\mu = A\,(\mu,\ t)\ dz + B\,(\mu,\ t)\ dt$$

ou, en faisant apparaître le processus d'innovation

(6) $$d\mu = (B\,(\mu, t) + A\,(\mu,\ t)\ .\ \hat{h})\ dt + A\,(\mu,\ t)\ (dz - \hat{h}\ dt)$$

Le calcul différentiel de ITO nous permet de calculer la différentielle stochastique de $A\,(\mu, t)$ et de $B\,(\mu, t)$ puisque μ est un processus de ITO, car l'innovation dans le filtre optimal est un bruit blancde même variance que $\eta\,(t, \omega)$.

Ainsi nous avons :

$$dA = A_z\,(\mu, t)\ dz + A_t\,(\mu,\ t)\ dt$$

$$dB = B_z\,(\mu, t)\ dz + B_t\,(\mu, t)\ dt$$

Nous interprèterons le cas où

(7) $$A_t\,(\mu,\ t) = B_z\,(\mu,\ t)$$

comme satisfaisant au théorème de Schwarz, et sous cette conjecture μ pourra être considérée comme une fonction uniquement de t et de z.

ETUDE DE LA DEPENDANCE FONCTIONNELLE DE t ET DE z POUR LES ESTIMATEURS ET POUR LA DENSITE DE PROBABILITE CONDITIONNELLE

L'estimation de x_1 donnée par l'équation (3) est une forme différentielle du type (5) où

$$B = \frac{-P_{11}\hat{x}_1}{\sigma^2} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{P_{11}}{\sigma^2}$$

L'égalité (7) n'est pas vérifiée puisque

$$B_z = \frac{\partial B}{\partial z} = \left(\frac{-\hat{x}_1 P_{111} - P_{11}^2}{\sigma^4} \right)$$

et

$$A_t = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{ij} [\Lambda,\Lambda^T]_{ij} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \, \partial x_j} =$$

$$= \frac{\hat{x}_2}{\sigma^2} - \frac{P_{11}^2 - \hat{x}_1 P_{111}}{\sigma^4}$$

donc $\hat{x}_1$ ne peut pas être exprimé par une fonction uniquement de z et de t.

Par contre le même calcul pour $\hat{x}_2$ montre que l'égalité (7) est vérifiée.

En effet, dans ce cas :

$$B = \frac{-\hat{x}_1 P_{12}}{\sigma^2} \qquad A = \frac{P_{12}}{\sigma^2}$$

et

$$B_z = \frac{P_{11} P_{12} + \hat{x}_1 P_{112}}{\sigma^4} = A_z$$

Donc $\hat{x}_2$ peut être exprimé en fonction de t et de z uniquement.

Pour établir cette fonction et donc construire l'estimateur de x_2 nous avons besoin de la densité de probabilité marginale de x_2 conditionnée par z (s) $t_0 \leq s \leq t$.

On peut établir que

$$p\left[x_2 \mid z(s)\quad t_0 \leqslant s \leqslant t\right] = p\left[x_2 \mid z(t)\right]$$

dans ce cas, en vérifiant l'égalité (7) pour la suite des moments donnée par les équations suivantes

$$d\widehat{x_2^n} = (\widehat{x_2^n x_1} - \widehat{x_2^n}\,\hat{x}_1)\,\frac{1}{\sigma^2}\,(dz - \hat{x}_1\,dt)$$

$$d\,\widehat{x_2^n x_1} = (\widehat{x_2^n x_1^2} - \widehat{x_2^n x_1}\,\hat{x}_1)\,\frac{1}{\sigma^2}\,(dz - \hat{x}_1\,dt)$$

$$\sigma^2\,\frac{\partial \widehat{x_2^n}}{\partial z} = \widehat{x_2^n x_1} - \widehat{x_2^n}\,\hat{x}_1$$

$$\sigma^2\,\frac{\partial \widehat{x_2^n}}{\partial t} = -\hat{x}_1\,(\widehat{x_2^n x_1} - \widehat{x_2^n}\,\hat{x}_1)$$

où l'on peut constater que :

$$\sigma^4\,\frac{\partial^2 \widehat{x_2^n}}{\partial t\,\partial z} = -\hat{x}_1(\widehat{x_2^n x_1^2} - \widehat{x_2^n x_1}\,\hat{x}_1)$$

$$+\hat{x}_1^2(\widehat{x_2^n x_1} - \widehat{x_2^n}\,\hat{x}_1) + \widehat{x_2^n}\,\hat{x}_1(\widehat{x_1^2} - \hat{x}_1^2)$$

$$-(\widehat{x_2^n x_1} - \widehat{x_2^n}\,\hat{x}_1)(\widehat{x_1^2} - \hat{x}_1^2) = \sigma^4\,\frac{\partial^2 \widehat{x_2^n}}{\partial z\,\partial t}$$

CONSTRUCTION EXPLICITE DE L'ESTIMATEUR OPTIMAL

Nous pouvons donc utiliser le théorème de Bayes qui nous donnera

$$p\left[x_2 \mid z\right] = \frac{p\left[z \mid x_2\right]\,p\left[x_2\right]}{\int p\left[z \mid x_2\right]\,p\left[x_2\right]\,dx_2}$$

à partir de laquelle nous pouvons construire l'estimateur optimal en vertu de la seule dépendance de z et de t que nous avons établie.

A l'aide de l'équation de l'observation on a

$$z(t,\omega) = \int_0^t x_1(s,\omega)\,ds + \eta(t,\omega) - \eta(0,\omega)$$

en faisant $z(0) = 0$

d'autre part

$$x_1(s,\omega) - x_1(0,\omega) = \int_0^s \sqrt{x_2}\,d\beta$$

$$= \sqrt{x_2}\,\left[\beta(s,\omega) - \beta(0,\omega)\right]$$

donc

$$z(t,\omega) = \left[\eta(t,\omega) - \eta(0,\omega)\right] + x_1(0,\omega)\,.\,t$$

$$+ \sqrt{x_2} \int_0^t (\beta(s,\omega) - \beta(0,\omega))\,ds$$

Nous pouvons obtenir la loi de probabilité conditionnelle de $z(t,\omega)$ par rapport à x_2 puisque c'est la somme des trois variables aléatoires gaussiennes et indépendantes suivantes :

① $\eta(t,\omega) - \eta(0)$ de moyenne nulle et variance $\sigma^2 t$

② $x_1(0)\,t$ de moyenne $\overline{x_1}(0)\,.\,t$ et variance $\sigma_0^2\,t^2$

③ .... $\sqrt{x_2}\int_0^t (\beta(s,\omega) - \beta(0,\omega))ds$

que l'on peut démontrer a pour variance $x_2\,t^3/3$ et pour moyenne 0.

Dans le cas où la condition initiale $x_1(0,\omega)$ est gaussienne la densité de probabilité de $z(t,\omega)$ est gaussienne, de moyenne $\overline{x_1}(0)\,.\,t$ et de variance $\sigma^2 t + \sigma_0^2 t^2 + x_2 t^3/3$

dans ce cas et en supposant connue la densité de probabilité à priori de x_2

$$p\left[x_2\right] = f(x_2)$$

on peut expliciter l'estimateur optimal sous la forme :

$$\hat{x}_2(t) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2\, e^{-\frac{(z - t\,\overline{x_1}(0))^2}{2(\sigma^2 t + \sigma_0^2 t^2 + x_2 t^3/3)}}}{\sqrt{\sigma^2 t + \sigma_0^2 t^2 + x_2 t^3/3}}\, f(x_2)\, dx_2}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(z - t\,\overline{x_1}(0))^2}{2(\sigma^2 t + \sigma_0^2 t^2 + x_2 t^3/3)}}}{\sqrt{\sigma^2 t + \sigma_0^2 t^2 + x_2 t^3/3}}\, f(x_2)\, dx_2}$$