QUATRIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

FILTRAGE D'UN SIGNAL MARKOVIEN MODULANT UN PROCESSUS PONCTUEL ET LES EQUATIONS APPROCHEES

Pierre BREMAUD

Ingénieur de l'Armement

Direction des Recherches et Moyens d'Essais - PARIS

RESUME

Nous dérivons les équations de filtrage d'un signal markovien modulant un processus ponctuel (SMPP) sous une forme vraiment récursive en adaptant une méthode déjà connue en théorie du filtrage d'un signal markovien mélangé de façon additive à du bruit blanc (SMBB). Ces équations permettent d'obtenir des estimations de fonctions d'une intensité aléatoire avec une précision arbitraire. Aussi, l'analogie formelle qui existe entre les équations de filtrage pour les problèmes SMPP et SMBB est expliquée.

SUMMARY

We obtain the equations for the filtering of a markovian signal modulating a point process (MSPP) in a truly recursive form by adapting a method already used to derive the filtering equations for a markovian signal corrupted by white noise (MSWN). These equations allow us to give a procedure to obtain approximate estimates of functions of a random intensity with an arbitrary precision. Also, comments are made concerning the similarity of the MSPP and MSWN filtering equations.

FILTRAGE D'UN SIGNAL MARKOVIEN MODULANT UN PROCESSUS PONCTUEL ET LES EQUATIONS APPROCHEES

Pierre BREMAUD

Dans cet article, nous dérivons des équations récursives pour le filtrage des processus ponctuels dont l'intensité est modulée par un processus markovien.

Les équations obtenues sont formellement semblables aux équations du filtrage d'un signal markovien mélangé de façon additive à un bruit blanc. Cette analogie formelle a été remarquée par D.L. SNYDER [3] . Il est montré dans les pages qui suivent que cette analogie n'est pas fortuite : les deux théories peuvent être mises en parallèle dès la formulation du problème dans le langage de la théorie des martingales (cf. § 7).

D'autre part, l'utilisation d'une pseudo-densité (cf. § 4) pour décrire la statistique a posteriori du processus markovien modulant l'intensité permet d'obtenir des équations plus simples que celles obtenues dans [3] , en ce sens que l'estimation de l'intensité n'intervient pas dans le second membre d'une équation précisément destinée à estimer cette intensité (cf. [3] p.9) : la manipulation des équations de filtrage dans des cas concrets est ainsi rendue plus facile et une méthode pour obtenir des résultats approchés avec une précision arbitraire est donnée. Cette méthode est implicitement décrite dans un exemple de filtrage de variable aléatoire mélangée additivement à un bruit blanc : elle est due, dans ce dernier cas, à E. WONG [5] .

../...

Enfin, les bases théoriques nécessaires à la formulation précise du problème (existence des processus ponctuels dont l'intensité est donnée, rapport de vraisemblance) sont prouvées dans [1] et rappelées dans le présent article sans démonstration.

DEFINITIONS -

On se donne un espace mesurable (Ω, F) et un processus $X = (X_t, t \geqslant 0)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) - X est une fonction étagée continue à droite et prenant ses valeurs dans $N = \{0,1,2, \dots\}$

b) - $X_0 = 0$ et $X_t - X_{t-} = 0$ ou 1

Un tel processus est appelé processus de comptage. Associé à un processus d'événements ponctuels sur la demi-droite $(t \geqslant 0)$, X représente le nombre d'événements dans l'intervalle $[0, t]$

Une mesure de probabilité P étant donnée sur (Ω, F) le doublet (X, P) est appelé processus point sur (Ω, F).

../...

Exemple :

On connaît l'existence de processus points (X, P_o) tels que :

a) - X est, sous la mesure P_o, un processus à accroissements indépendants ;

b) - $X_t - X_s$ est une variable aléatoire poissonienne de paramètre $t - s$ $(t - s \geqslant 0)$.

Un tel processus point est appelé processus de Poisson standard (fin d'exemple).

Une famille de sous-tribus de F, $(F_t, t \geqslant 0)$ croissante (c'est-à-dire telle que $t \geqslant s \Rightarrow F_t \supset F_s$) et telle que pour tout $t \geqslant 0$, F_t contienne la tribu $X_o^t = \sigma\{X_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$ engendrée par les variables aléatoires $(X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$ représente un passé du processus de comptage X. Selon cette définition $(X_o^t, t \geqslant 0)$ est un passé : on dira que $(X_o^t, t \geqslant 0)$ est le passé visible de X. La tribu F_t est un passé au temps t de X et X_o^t est le passé visible au temps t.

Un processus $M = (M_t, t \geqslant 0)$ sur un espace de probabilité (Ω, F, P) et une famille $(F_t, t \geqslant 0)$ de sous-tribus croissante de F sont donnés. Si les conditions suivantes sont réunies :

a) - M_t est F_t- mesurable et $E\{|M_t|\} < \infty$, pour tout $t \geqslant 0$

../...

b) - $t \geqslant s \Rightarrow E\{M_t/F_s\} = M_s$ P p.s.

alors on dit que M est une (P, F_t) martingale. Si b) est remplacé par :

b') - $t \geqslant s \Rightarrow E\{M_t/F_s\} \geqslant M_s$ P p.s.

M est une (P, F_t) submartingale.

si au lieu de $E\{|M_t|\} < \infty$ on a la condition plus forte $E\{|M_t|^2\} < \infty$, M est appelée une (P, F_t) L^2 martingale (resp. une (P, F_t) L^2 submartingale).

Exemple :

Si (X, P_o) est un processus de Poisson standard sur (Ω, F) alors $(X_t - t, t \geqslant 0)$ est une (P_o, F_t) L^2 martingale. La vérification de ce fait est laissée au lecteur (fin d'exemple).

Une famille croissante $(F_t, t \geqslant 0)$ de sous-tribus de F étant donnée, un F_t - temps d'arrêt est une variable aléatoire T à valeurs dans $(t \geqslant 0)$ et telle que :

$$\{T \leqslant t\} \in F_t \quad , \forall t \geqslant 0 \tag{1}$$

Exemple :

Si (X, P) est un processus point sur (Ω, F), la variable aléatoire T_n définie par :

$$T_n = \begin{cases} \inf\{t / X_t = n\} & si \ \{t/X_t = n\} \neq \emptyset \\ +\infty & autrement \end{cases} \tag{2}$$

est bien un X_o^t - temps d'arrêt. En effet :

$$\{T_n \leqslant t\} = \{X_t \geqslant n\} \in X_o^t \tag{3}$$

(fin d'exemple)

Nous dirons que le processus (X, P) est <u>non-explosif</u> si :

$$T_n \uparrow \infty \quad P \text{ p.s. quand } n \uparrow \infty \tag{4}$$

Nous dirons que le processus $M = (M_t, t \geqslant 0)$ est une (P, F_t) martingale <u>locale</u> si, et seulement si il existe une suite de F_t - temps d'arrêt $(T_n, n \in N)$ telle que :

a) - $T_n \uparrow \infty$ P p.s quand $n \uparrow \infty$

b) - $(M_{t \wedge T_n}, t \geqslant 0)$ est une (P, F_t) L^2 martingale pour tout $n \in N$.

2.- <u>THEOREMES D'EXISTENCE</u> -

Soit (Ω, F) un espace mesurable et (X, P_o) un processus de Poisson standard sur (Ω, F). Soit une famille croissante $(F_t, t \geqslant 0)$ de sous-tribus de F telle que :

a) - $F_t \supset X_o^t \quad , \forall t \geqslant 0$

b) - $(X_t - t, t \geqslant 0)$ soit une (P_o, F_t) L^2 martingale.

../...

Remarque :

On sait que $(X_t - t, t \geq 0)$ est une (P_o, X_o^t) L^2 martingale mais ceci n'assure pas que $(X_t - t, t \geq 0)$ soit une (P_o, F_t) L^2 martingale pour toute famille croissante $(F_t, t \geq 0)$ telle que $F_t \supset X_o^t$. Par exemple, $(X_t - t, t \geq 0)$ n'est pas une (P_o, X_o^{t+h}) martingale pour $h > 0$. Par contre, si on prend une famille $(F_t, t \geq 0)$ telle que pour tout $t \geq s$, $X_t - X_s$ soit indépendant de F_s, $(X_t - t, t \geq 0)$ reste une $(P_o, F_t) L^2$ martingale (fin de remarque).

Soit $(\lambda_t, t \geq 0)$ un processus stochastique défini sur (Ω, F, P_o) tel que :

a) - λ_t soit F_t- mesurable et non négatif pour tout $t \geq 0$

b) - $(\lambda_t, t \geq 0)$ soit continu à gauche - P_o p.s.

c) - $(\lambda_t, t \geq 0)$ soit p.s. localement borné, c'est-à-dire tel que si on appelle S_n le F_t - temps d'arrêt défini par :

$$S_n = \begin{cases} \inf \{t / X_t \geq n\} & \text{si } \{t/\lambda_t \geq n\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{autrement} \end{cases} \qquad (5)$$

alors $S_n \uparrow \infty$ P_o p.s. quand $n \uparrow \infty$

../...

Théorème 1 : Dans ces conditions si on définit :

$$L_t = \prod_{t_i \leq t} \lambda_{t_i} \exp\left\{-\int_0^t (\lambda_s - 1)\, ds\right\} \tag{6}$$

alors pour tout $T \geqslant 0$, le processus $(L_{t \wedge T},\ t \geqslant 0)$ est une (P_o, F_t) martingale si $E_o\{L_T\} = 1$. On peut alors définir une probabilité P sur (Ω, F) dont les restrictions à (Ω, F_t) sont absolument continues par rapport aux restrictions de P_o, les dérivés de RADON-NIKODYM de ces restrictions étant :

$$E_o\left\{ \frac{dP}{dP_o} / F_T \right\} = L_T \tag{7}$$

Théorème 2 : $\left(X_{t \wedge T} - \int_0^{t \wedge T} \lambda_s\, ds,\ t \geqslant 0\right)$ est, pour chaque $T \geqslant 0$, une (P_o, F_t) martingale locale.

Remarque : Les théorèmes 1 et 2 sont prouvés dans [1]

Le théorème 2 dit simplement que sous la mesure P, $(\lambda_t, t \geqslant 0)$ est l'intensité du processus point (X, P) relativement à la famille $(F_t, t \geqslant 0)$. (fin de remarque).

3.- LE PROBLEME DU FILTRAGE -

Nous sommes maintenant en mesure de définir le problème du filtrage d'un processus ponctuel dont l'intensité est modulée par un processus markovien.

../...

Soit (X, P_o) un processus de Poisson standard défini sur (Ω, F).

On considère sur (Ω, F, P_o) un processus de MARKOV $Y = (Y_t, t \geq 0)$ à valeurs dans R^n, trajectoires continues à gauche et admettant le noyau de transition $\mu_o(y, s; dz, t)$ défini par :

$$E_o\{g(Y_t)/Y_s = y\} = \int_{R^n} g(z)\,\mu_o(y, s; dz, t) \qquad (8)$$

pour toute fonction borélienne bornée g. On définit sur R^n les mesures $\mu_o(A, t)$ par :

$$\mu_o(A, t) = P_o\{Y_t \in A\} \qquad (9)$$

On supposera que Y est indépendant de X sous la mesure P_o

Posons :

$$Y_o^t = \sigma\{Y_s, 0 \leq s \leq t\} \qquad (10)$$

$$F_t = X_o^t \vee Y_o^t \qquad (11)$$

Il est facile de vérifier que $(X_t - t, t \geq 0)$ est une (P_o, F_t) martingale.

../...

Soit une fonction non négative $\lambda_t(x)$ borélienne en (t, x) et continue à gauche en t pour tout $x \in R^n$. Supposons, en outre, que $(\lambda_t(Y_t), t \quad 0)$ soit localement bornée (par exemple : Y est localement borné et $\lambda_t(x)$ est localement borné pour tout $x \in R^n$). On se trouve alors dans les conditions de validité des théorèmes 1 et 2.

On peut donc définir un processus ponctuel (X, P) sur (Ω, F) dont $(\lambda_t(Y_t), t \in 0)$ est l'intensité. Pour tout $t \geqslant 0$ la restriction de P à (Ω, F_t) est absolument continue par rapport à la restriction de P_o à (Ω, F_t) et :

$$E_o \left\{ \frac{dP}{dP_o} / F_t \right\} = L_t \tag{12}$$

Dans un contexte de théorie des communications, on appelle Y le <u>message</u> et $(\lambda_t(Y_t), t \geqslant 0)$ le <u>signal</u>.

Le problème du filtrage est le suivant : pour toute fonction borélienne bornée $f : R^n \rightarrow R$ trouver une expression pour $\widehat{f(Y_t)} = E\{f(Y_t) / X_o^s\}$

4. - L'EQUATION FONDAMENTALE DU FILTRAGE NON LINEAIRE -

Avant de donner l'équation générale du filtrage, nous allons montrer que sous la probabilité P, Y reste un processus de MARKOV avec les mêmes probabilités de transition que sous P_o : en effet, la restriction de P à (Ω, Y_o^t) est égale à la restriction de P_o à (Ω, Y_o^t).

Démonstration : Prenons $A \in Y_o^t$, d'après la definition de L_t comme dérivée de RADON-NIKODYM :

$$P(A) = \int_A L_t \, dP_o \tag{13}$$

D'autre part, puisque sous P_o, X et Y sont indépendants :

$$\int_A L_t \, dP_o = \int_{A\times\Omega} L_t \, dP_o^{X_o^t} \, dP_o^{Y_o^t} \tag{14}$$

Le théorème de FUBINI donne alors :

$$\int_{A\times\Omega} L_t \, dP_o^{X_o^t} \, dP_o^{Y_o^t} = \int_A \Big[\int_\Omega L_t \, dP_o^{X_o^t} \Big] \, dP_o^{Y_o^t} \tag{15}$$

Pour Y_o^t donné, $(L_t, t \geq 0)$ est d'après le théorème 1 une $(P_o^{X_o^t}, X_o^t)$ martingale telle que $\int_\Omega L_t \, dP_o^{X_o^t} = 1$.

On a donc :

$$\int_A \Big[\int_\Omega L_t \, dP_o^{X_o^t} \Big] \, dP_o^{Y_o^t} = \int_A \Big[\int_\Omega dP_o^{X_o^t} \Big] \, dP_o^{Y_o^t}$$

$$= \int_A dP_o = P_o(A) \tag{16}$$

(fin de démonstration)

Définissons maintenant la pseudo-densité :

$$U(t, y, X_o^t) = E_o \{ L_t / X_o^t, Y_t = y \} \tag{17}$$

.../...

On a le résultat classique suivant :

Lemme

Soit f une fonction borélienne telle que :

$$E\{|f(Y_t)|\} < \infty \tag{18}$$

alors :

$$\widehat{f(Y_t)} = \frac{\int_{R^n} f(z)\, U(t,z,X_0^t)\, \mu_0(dz,t)}{\int_{R^n} U(t,z,X_0^t)\, \mu_0(dz,t)} \tag{19}$$

Démonstration

Par définition de l'espérance conditionnelle :

$$\int_A \widehat{f(Y_t)}\, dP = \int_A f(Y_t)\, dP \quad , \quad A \in X_0^t \tag{20}$$

mais, puisque :

$$L_t = E_0\left\{\frac{dP}{dP_0} / F_t\right\} \quad \text{et :} \quad E_0\left\{\frac{dP}{dP_0} / X_0^t\right\} = E_0\{L_t / X_0^t\} \tag{21}$$

on obtient en effectuant le changement de mesure $P \rightarrow P_0$:

$$\int_A E\{f(Y_t)/X_0^t\}\, dP = \int_A E\{f(Y_t)/X_0^t\}\, E_0\{L_t/X_0^t\}\, dP_0 \tag{22}$$

de même on a :

$$\int_A f(Y_t)\, dP = \int_A f(Y_t)\, L_t\, dP_0 \tag{23}$$

et par définition de l'espérance conditionnelle :

$$\int_A f(Y_t)\, L_t\, dP_0 = \int_A E_0\{f(Y_t)\, L_t / X_0^t\}\, dP_0 \tag{24}$$

../...

En combinant les équations (20), (22), (23) et (24), on obtient :

$$E\left\{f(Y_t)/X_o^t\right\} = \frac{E_o\left\{L_t f(Y_t)/X_o^t\right\}}{E_o\left\{L_t/X_o^t\right\}} \tag{25}$$

puisque A est arbitraire dans X_0^t.

Pour passer de l'équation (25) au résultat décrit dans le lemme, il suffit de réécrire :

$$\begin{aligned} E_o\left\{L_t f(Y_t)/X_o^t\right\} &= E_o\left\{E_o\left\{L_t f(Y_t)/X_o^t, Y_t\right\}/X_o^t\right\} \\ &= E_o\left\{f(Y_t)\, E_o\left\{L_t/X_o^t, Y_t\right\}/X_o^t\right\} \\ &= E_o\left\{f(Y_t)\, U(t, Y_t, X_o^t)/X_o^t\right\} \end{aligned} \tag{26}$$

Et comme sous P_o, X et Y sont indépendants :

$$E_o\left\{f(Y_t)\, U(t, Y_t, X_o^t)/X_o^t\right\} = \int_{R^n} f(z)\, U(t, z, X_o^t)\, \mu_o(dz, t) \tag{27}$$

De même, en faisant $f(z) = 1$ on obtient :

$$E_o\left\{U(t, Y_t, X_o^t)/X_o^t\right\} = \int_{R^n} U(t, z, X_o^t)\, \mu_o(dz, t) \tag{28}$$

(fin de démonstration)

5. - ESTIMATION RECURSIVE -

Nous allons montrer que la pseudo-densité satisfait bien aux conditions de récursivité, c'est-à-dire (en termes non rigoureux) : si on pose $U_t(z) = U(t, z, X_o^t)$, $U_{t+dt}(z)$

dépend seulement de U_t (z) et de la nouvelle observation $X_{t+dt} = X_t = dX_t$

De façon plus précise, nous avons le résultat suivant :

Théorème :

La pseudo-densité $U_t(z) = U(t, z, X_0^t)$ satisfait à l'équation :

$$U_t(z) = 1 + \int_0^t \Big[\int_{R^n} (\lambda_s(y) - 1)\, U_{s-}(y)\, \mu_0(dy, s; z, t) \Big] (dX_s - ds) \tag{29}$$

où l'intégration par rapport à $X_t - t$ est une intégration de STIELTJES et

$$\mu_0(A, s; z, t) = P\{ Y_s \in A / Y_t = z \} = P_0 \{ Y_s \in A / Y_t = z \} \tag{30}$$

Démonstration :

Nous commencerons par remarquer que :

$$L_t = \prod_{t_i \leq t} \lambda_{t_i} \exp \Big\{ - \int_0^t (\lambda_s - 1)\, ds \Big\} \quad \text{où } \lambda_s \triangleq \lambda_s(Y_s) \tag{31}$$

peut s'écrire sous la forme :

$$L_t = 1 + \int_0^t L_{s-} (\lambda_s - 1)(dX_s - ds) \tag{32}$$

On peut supposer que toutes les quantités dont on considère l'espérance conditionnelle sont intégrables : on stoppera au besoin par S_n le premier instant où λ_t . (Y_t) dépasse le niveau n. On a alors :

$$E_0 \{ L_t / X_0^t, Y_t \} = 1 + \int_0^t E_0 \{ L_{s-} (\lambda_s(Y_s) - 1) / X_0^t, Y_t \} (dX_s - ds) \tag{33}$$

../...

c.à.d.

$$E_o\{L_t/X_o^t, Y_t\} =$$

$$1 + \sum_{t_i \leq t} E_o\{L_{t_i-}(\lambda_{t_i}(Y_{t_i})-1)/X_o^t, Y_t\} + \int_0^t E_o\{L_{s-}(\lambda_s(Y_s)-1)/X_o^t, Y_t\}ds \qquad (33')$$

D'autre part :

$$E_o\{L_{s-}(\lambda_s(Y_s)-1)/X_o^t, Y_t\} = E_o\{L_{s-}(\lambda_s(Y_s)-1)/X_o^s, X_s^t, Y_t\} \qquad (34)$$

mais comme, sous la mesure P_o X_s^t est indépendant de $X_o^s \vee Y_o^s$ et de $X_o^s \vee Y_t$ le premier membre de (34) est égal à :

$$E_o\{L_{s-}(\lambda_s(Y_s)-1)/X_o^s, Y_t\} \qquad (35)$$

Compte tenu de l'indépendance de Y et de X et du fait que Y est un processus de MARKOV, pour tout $s \leqslant t$, Y_t est conditionnellement indépendant de $X_o^s \vee Y_o^s$ étant donné Y_s. L'expression (35) se transforme alors de la façon suivante :

$$E_o\{L_{s-}(\lambda_s(Y_s)-1)/X_o^s, Y_t\} =$$

$$E_o\{E_o\{L_{s-}/Y_s, Y_t, X_o^s\}(\lambda_s(Y_s)-1)/Y_t, X_o^s\} =$$

$$E_o\{E_o\{L_{s-}/Y_s, X_o^s\}(\lambda_s(Y_s)-1)/Y_t, X_o^s\} \qquad (36)$$

../...

Comme $Y_s = Y_{s-}$ et $X_o^s = \bigvee_{h>0} X_o^{s-h}$ on a : $E_0(L_{s-}/Y_s, X_o^s) = U_{t-}(z)$

d'où finalement :

$$E_0 \{ L_{s-}(\lambda_s(Y_s) - 1) / Y_t = z , X_o^t \} =$$

$$E_0 \{(\lambda_s(Y_s) - 1) U_{s-}(Y_s) / Y_t = z , X_o^t \} =$$

$$\int_{R^n} (\lambda_s(y) - 1) U_{s-}(y) \mu_0(dy, s/z, t) \qquad (37)$$

ce qui reporté dans (33) donne finalement :

$$U_t(z) = 1 + \int_0^t [\int_{R^n} (\lambda_s(y) - 1) U_{s-}(y) \mu_0(dy, s/z, t)](dX_s - ds) \qquad (38)$$

(fin de démonstration)

6. - APPROXIMATION DES EQUATIONS DE FILTRAGE -

Une équation telle que (38) permet de calculer en temps réel une valeur $U_t(z)$ et l'ensemble des valeurs de $U_t(z)$ pour $z \in R^n$ permet de calculer l'estimation $E\{f(Y_t)/X_o^t\}$ pour toute fonction borélienne f. Au point de vue des calculs, il faut donc en principe connaître $(U_t(z), z \in R^n)$ ce qui n'est pas praticable, sauf dans le cas où Z ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\{z_1, \dots, z_K\}$ auquel cas $(U_t(z), z \in R^n)$ devient un vecteur $(U_t(z_i), i = 1 \text{ à } K)$

../...

Cependant, il existe un cas simple ou $\widehat{f(Y_t)}$ elle-même satisfait une équation récursive. Nous traiterons cet exemple et nous utiliserons l'idée de base qui permet d'obtenir l'équation récursive, pour donner des équations de filtrage approchées qui mettent en jeu $\widehat{f(Y_t)}$ directement sans passer par l'intermédiaire de $(U_t(z), z \in R^n)$

Exemple 1 : Taux exponentiel décroissant.

Cet exemple a un analogue en théorie du filtrage d'un signal markovien mélangé de façon additive à du bruit blanc /qui a été résolu dans ce cas par E. WONG (cf. 5 p. 238). Nous adaptons ici la solution donnée par E. WONG au problème du filtrage des processus ponctuels :

On prend $\lambda_t(Z) = \exp(-Zt)$ et $Y_t = Z$ où Z est une variable aléatoire de distribution F.

Posons :

$$\hat{Z}_t = E\{Z / X_o^t\} \tag{39}$$

on a d'après l'équation fondamentale du filtrage non linéaire

$$\hat{Z}_t = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z\, U_t(z)\, F(dz)}{\int_{-\infty}^{+\infty} U_t(z)\, F(dz)} \tag{40}$$

où :

$$U_t(z) = \exp\left\{-z\int_o^t s\, dX_s - \int_o^t (\exp(-zs) - 1)\, ds\right\} \tag{41}$$

../...

Si on pose :

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-zx - \int_0^t (\exp(-zs)-1)\,ds\right\} F(dz) \qquad (42)$$

et :

$$h(t,x) = \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{-z \exp\left\{-zx - \int_0^t (\exp(-zs)-1)\,ds\right\} F(dz)\right. \qquad (43)$$

d'où
$$\hat{Z}_t = -h\left(t, \int_0^t s\,dX_s\right) \Big/ v\left(t, \int_0^t s\,dX_s\right) \qquad (44)$$

ce qui est bien une équation qui donne $\hat{Z}_t$ en temps réel.

Bien que le cas d'un taux exponentiel décroissant soit un cas intéressant en pratique, nous ne rencontrons pas une telle situation idéale dans des problèmes d'estimation de variables aléatoires modulant un processus ponctuel. Il faudra alors recourir à des approximations. Ces approximations obéissent au même principe de base que celui de l'exemple traité ci-dessus.

<u>Exemple 2</u> : Filtrage approché.

Supposons que l'intensité du processus ponctuel soit une variable aléatoire Z positive, de distribution F. Soit f une fonction borélienne telle que :

$$E\{|f(Z)|\} < \infty \qquad (45)$$

../...

et notons :

$$\widehat{f_t(Z)} = E\{f(Z)/X_0^t\} \tag{46}$$

on a d'après l'équation générale du filtrage non linéaire (19) :

$$\widehat{f_t(Z)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, U_t(z)\, F(dz)}{\int_{-\infty}^{+\infty} U_t(z)\, F(dz)} \tag{47}$$

où

$$\begin{aligned} U_t(z) &= 1 + \int_0^t (z-1)\, U_{s-}(z)\, (dX_s - ds) \\ &= \exp\{X_t \log z - (z-1)t\} \end{aligned} \tag{48}$$

Supposons que Z ait un domaine borné dans lequel f ($\cancel{z}$) admette un développement :

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{K} a_n (\log z)^n + r_K(z) \tag{49}$$

où

$$|r_K(z)| \leq \varepsilon_K \quad \text{et} \quad \lim_{K\to\infty} \varepsilon_K = 0 \tag{50}$$

Si on pose :

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{(-x \log z) - (z-1)t\}\, F(dz) \tag{51}$$

../...

on a :

$$\frac{\partial v^n(t,x)}{\partial x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\log z)^n \exp\{-x \log z - (z-1)t\}\ F(dz) \tag{52}$$

alors :

$$\widehat{f_t(Z)}^{(K)} = \sum_{n=0}^{K} (-1)^n a_n \frac{\partial v^n(t, X_t)}{\partial x^n} \tag{53}$$

approxime à ε_K près $\widehat{f_t(Z)}$.

7. - COMMENTAIRES ET CONCLUSIONS -

L'analogie qui existe entre le filtrage d'un signal markovien mélangé de façon additive à du bruit blanc (SMBB) et le filtrage d'un signal markovien modulant un processus ponctuel (SMPP) a été remarquée au niveau de l'équation (33) par D.L. SNYDER dans [3]. La dérivation des équations récursives qui est donnée dans cet article rend cette analogie formelle plus profonde puisqu'elle est une adaptation pure et simple de la dérivation des équations de filtrage dans le cas SMBB [5]. Des analogies encore plus intéressantes se dégagent lorsqu'on étudie les processus ponctuels en prenant le point de vue de la théorie des martingales [1]. En particulier, le modèle mathématique pour un signal $(\lambda_t, t \geq 0)$ modulant un processus ponctuel, est le suivant :

../...

On se donne sur (Ω, F) une probabilité P et un processus de compt de X tel que : $(X_t - \int_0^t \lambda_s ds, t \geq 0)$ soit une (P, F_t) martingale locale, où $(F_t^{\bullet}, t \geq 0)$ est une famille croissante de sous-tribus de F, telle que λ_t soit F_t - mesurable pour tout $t \geq 0$.

Le modèle mathématique pour un signal $(\lambda_t, t \geq 0)$ mélangé de façon additive à un bruit blanc est :

On se donne sur (Ω, F) une probabilité P et un processus continu X tel que : $(X_t - \int_0^t \lambda_s ds, t \geq 0)$ soit un mouvement brownien relativement à (P, F_t) où $(F_t, t \geq 0)$ est une famille croissante de sous-tribus de F, telle que λ_t soit F_t - mesurable pour tout t. Or, un théorème de KUNITA et WATANABE [2] dit que pour le processus continu $W = (W_t, t \geq 0)$ soit un (P, F_t) - mouvement brownien, il faut et il suffit que $(W_t, t \geq 0)$ et $(W_t^2 - t, t \geq 0)$ soient des (P, F_t) martingales locales.

Un théorème analogue à celui de KUNITA WATANABE et dû à WATANABE [4] est d'ailleurs valable pour les processus de Poisson, ce qui renforce encore l'analogie formelle. En fait, toute une théorie peut être développée et ce nouveau point de vue conduit à un grand nombre de résultats d'intérêt pratique. L'exemple du filtrage montre bien que la caractérisation des processus ponctuels en termes de martingales est très adaptée à l'étude de problèmes dynamiques, par opposition du point de vue

../...

de la théorie de la mesure qui est plus adaptée aux problèmes stationnaires.

REMERCIEMENTS -

Je tiens à remercier le Professeur Eugène WONG du Département d'Electrical Engineering de l'Université de Californie pour avoir dirigé avec compétence et dévouement la thèse de Ph. D. dont le présent article développe un passage.

L'auteur de cet article fait partie actuellement du Groupe 2 ("Télécommunications et Détection") du Service des Recherches de la Direction des Recherches et Moyens d'Essais. La thèse de Ph. D. [1] a été écrite lors d'un stage de formation à l'Université de Californie (Berkeley) organisé par la D.M.A.

*

*   *

B I B L I O G R A P H I E

1. – P.M. BREMAUD : A martingale approach to the Study of Point Processes on the real line ; Doctoral Dissertation for the Ph. D. in Electrical Engineering and Computer Sciences, U of California, Berkeley, Aug. 1972.

2. – H. KUNITA and S. WATANABE : On square integrable martingales ; Nagoya Journal Of Mathematics 1967.

3. – D.L. SNYDER : Filtering and Detection for Doubly Stochastic Poisson Processes ; Washington University School of Medecine (St.Louis, Mo) Biomedical Computer Laboratory Monograph 145, Dec. 1970.

4. – S.WATANABE : On discontinuons additive functionals and Lévy measures of a Markov Process Japanese Journal of mathematics 36, 1964.

5. – E. WONG : Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems ; Mc Graw Hill Series in System Sciences, 1971.