QUATRIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

DETECTION ET ESTIMATION SIMULTANEES D'UN SIGNAL

P.-Y. ARQUES *, O. MACCHI **, G. VEZZOSI **

* Laboratoire Traitement du Signal, Université de Rennes.

** Laboratoire d'Etude des Phénomènes Aléatoires,
Université de Paris Sud.

RESUME

On reprend les principes théoriques de résolution du problème de détection, dans l'optique de Bayes, lorsqu'une estimation y est adjointe. On envisage trois méthodes permettant d'effectuer la détection et l'estimation à partir de la même observation. Les deux premières donnent la priorité l'une à la détection, l'autre à l'estimation. La troisième méthode envisage la détection et l'estimation comme un problème de décision unique et aboutit à une structure optimale.

SUMMARY

We reconsider the theoretical derivation, using Bayes method, of the detection problem; when an estimation is associated. We investigate three methods of jointly performing detection and estimation based on the same observation. The first method begins with a detection, the second with an estimation. In the third method, detection and estimation are considered as an unique decision problem resulting in an optimum receptor.

1 - GENERALITES

On formule habituellement le problème de détection de la manière suivante : étant donnée une réalisation x, pouvant être engendrée soit par un processus aléatoire "bruit seul" soit par un processus aléatoire "bruit et signal", l'observateur doit décider lequel des deux processus a engendré la réalisation x. Le problème de détection est alors réduit à un problème de "détection de présence". La réalisation donnée est généralement contenue dans une tranche temporelle $[t-T,t]$. Le processus aléatoire peut être vectoriel ; c'est le cas lorsqu'une antenne à n entrées explore le milieu [1].

Traditionnellement on distingue :

- la détection des signaux certains, représentés par une fonction S déterministe, connue, du temps t et dépendant éventuellement d'un paramètre multidimensionnel inconnu θ ;

- la détection des signaux aléatoires, représentés par une réalisation d'un processus stochastique de loi connue dépendant éventuellement d'un paramètre multidimensionnel inconnu.

Il existe cependant, entre les deux catégories précédentes, des situations intermédiaires telles que celle d'un signal obtenu par filtrage aléatoire d'un signal déterministe [2].

Dans la pratique, la détection d'un signal non complètement connu est inséparable de l'estimation de ses caractéristiques importantes pour l'observateur ; le véritable problème est donc un problème global que l'on appellera dans la suite "détection-estimation". Que le signal soit aléatoire ou certain, l'un des paramètres inconnus généralement rencontrés est son instant d'arrivée : celui-ci est inconnu, contenu dans la tranche temporelle $[t-T,t]$. Suivant la durée de cette tranche, et les contraintes du problème, on est amené à considérer deux approches.

- On recherche la présence du signal, supposé unique, dans la tranche : on accepte de différer la décision en fin de tranche t. Une éventuelle estimation des paramètres n'est faite qu'a posteriori.

- On s'impose de détecter la présence éventuelle du signal à chaque instant, le retard permis étant de l'ordre de la durée du signal ; ce dernier peut apparaître plusieurs fois. Une estimation du temps d'arrivée et des paramètres du signal est faite simultanément avec la détection. Ce dernier problème est un cas particulier de "détection-estimation" renouvelée à chaque instant.

Exprimée dans le cadre de la théorie de la décision, cette approche se distingue par le fait que le problème de décision unique $(\Delta , \Theta , \mathfrak{X} , L)$ (Δ est l'espace de décision , Θ l'espace paramétrique, $\mathfrak{X}$ l'espace des observations et L la fonction de perte) est remplacé par une suite de problèmes de décisions instantanées $\{\Delta(t) , \Theta(t) , \mathfrak{X}(t) , L(t) , t \in J\}$ où J désigne l'ensemble des instants de décision. Moyennant un choix convenable de la perte globale, on montre que la stratégie optimale revient à optimaliser chaque décision instantanée [3].

2 - LE PROBLEME DE DETECTION-ESTIMATION

2-1- Types de solutions

Les problèmes de détection-estimation peuvent être abordés de 3 manières différentes :

- détection de présence suivie d'une estimation conditionnelle à la décision de présence ;

- estimation avec incertitude sur la présence, suivie d'une détection de présence du signal estimé ;

- estimation et détection simultanées.

Ceci se schématise simplement dans le cas d'un test d'hypothèses multiples dans lequel on considère une observation x d'une variable aléatoire X et n+1 hypothèses H_o , H_1 , ... , H_n,disjointes et complémentaires, relatives à la loi de X. Pour choisir quelle est l'hypothèse H_i qui engendra x, on peut :

- Procédure A : tester H_o contre $\{H_1 , \ldots , H_n\}$ (détection de présence) puis, conditionnellement au rejet de H_o, estimer H_i dans l'ensemble $\{H_1 , \ldots , H_n\}$;

- Procédure B : estimer H_i dans l'ensemble $\{H_1 , \ldots , H_n\}$ puis tester H_o contre H_i ;

- Procédure C : tester simultanément les n+1 hypothèses.

2-2- Cas général

Plus généralement, le problème de détection-estimation considéré n'est autre qu'un problème de décision dont l'espace paramétrique s'écrit :

$$H_o \cup \Theta$$

où H_o désigne l'évènement (ou "hypothèse") bruit seul, et Θ le champ des valeurs possibles du paramètre θ qui décrit le signal et que l'on souhaite estimer ; l'ensemble Θ représente l'ensemble des situations où un "signal est présent". L'espace des décisions s'écrit :

$$\mathcal{a}_o \cup \hat{\Theta}$$

où $\mathcal{a}_o$ désigne la décision d'accepter l'hypothèse H_o et $\hat{\Theta}$ est le champ des estimées possibles $\hat{\theta}$ du paramètre θ ; l'ensemble $\hat{\Theta}$ représente l'ensemble des décisions de présence d'un signal (Θ et $\hat{\Theta}$ sont en général identiques). On désignera par $\overline{H_o}$ l'hypothèse que l'un quelconque des signaux possibles est présent et par $\overline{\mathcal{a}_o}$ la décision d'accepter l'hypothèse $\overline{H_o}$ (c'est-à-dire la décision de présence de signal).

Dans une situation de ce type, et en se limitant aux stratégies non aléatoires, une stratégie est le couple ($\mathcal{X}_o$, δ) d'une partition de l'espace d'observations $\mathcal{X}$ en deux régions disjointes et complémentaires $\mathcal{X}_o$ (région d'acceptation de l'hypothèse bruit seul) et $\overline{\mathcal{X}_o}$ (région d'acceptation de l'hypothèse signal présent), et d'une application δ de $\overline{\mathcal{X}_o}$ dans $\hat{\Theta}$ qui indique l'estimée du paramètre lorsque l'observation appartient à la région $\overline{\mathcal{X}_o}$.

D'autre part, dans une optique bayesienne, aux choix par la nature d'un élément dans l'espace paramétrique $H_o \cup \Theta$, et par l'observateur d'un élément dans l'espace des décisions $\mathcal{a}_o \cup \hat{\Theta}$, on associe un nombre réel positif qui exprime la perte. Compte tenu de la structure particulière de l'espace paramétrique et de l'espace des décisions, cette perte comprend les différents éléments suivants:

. L_{00} : perte consécutive à la décision $\mathcal{a}_o$ lorsque H_o est l'hypothèse correcte.

. $L_{10}(\hat{\theta})$: perte consécutive à la décision qu'un signal de paramètre $\hat{\theta}$ est présent lorsque $\mathcal{a}_o$ est la décision correcte. Cette perte est due à une fausse alarme.

. $L_{01}(\theta)$: perte consécutive à la décision $\mathcal{a}_o$ lorsqu'un signal de paramètre θ est présent. Cette perte est due à une non détection fausse.

. $L_{11}(\hat{\theta},\theta)$: perte consécutive à la décision qu'un signal de paramètre $\hat{\theta}$ est présent, lorsqu'un signal de paramètre θ est présent. Cette perte est due à une erreur d'estimation.

On appelle P_o la loi de probabilité qui régit l'observation X dans l'hypothèse H_o, P_θ la loi de probabilité qui régit l'observation lorsqu'un signal de paramètre θ est présent, Π la loi a priori du paramètre θ dans l'hypothèse $\overline{H_o}$, et π_o la probabilité a priori de l'hypothèse H_o.

2-3- Expression de la perte moyenne

A toute stratégie est associée :

- une perte moyenne conditionnelle à la situation bruit seul

$$E\{L|H_o\} = L_{00}\int_{\mathfrak{X}_o} P_o(dx) + \int_{\overline{\mathfrak{X}_o}} L_{10}[\delta(x)]\, P_o(dx),$$

- une perte moyenne conditionnelle à la situation "un signal de paramètre θ est présent"

$$E\{L|\overline{H_o},\theta\} = \int_{\mathfrak{X}_o} L_{01}(\theta)\, P_\theta(dx) + \int_{\overline{\mathfrak{X}_o}} L_{11}[\delta(x),\theta]\, P_\theta(dx),$$

- une perte moyenne globale, obtenue par pondération des éléments précédents avec la loi a priori de l'espace paramétrique

$$E\{L\} = \pi_o\left[L_{00}\int_{\mathfrak{X}_o} P_o(dx) + \int_{\overline{\mathfrak{X}_o}} L_{10}[\delta(x)]\, P_o(dx)\right]$$

$$+(1-\pi_o)\left[\int_{\Theta}\int_{\mathfrak{X}_o} L_{01}(\theta)P_\theta(dx)\Pi(d\theta) + \int_{\Theta}\int_{\overline{\mathfrak{X}_o}} L_{11}[\delta(x),\theta]\, P_\theta(dx)\,\Pi(d\theta)\right],$$

qui s'écrit encore, en regroupant les termes correspondant aux mêmes régions d'intégration

$$R = E\{L\} = \int_{\mathcal{X}_o} \left[\pi_o L_{00}\, P_o(dx) + (1-\pi_o) \int_{\Theta} L_{01}(\theta)\, P_\theta(dx)\, \Pi(d\theta)\right]$$
$$+ \int_{\overline{\mathcal{X}_o}} \left[\pi_o\, L_{10}[\delta(x)] P_o(dx) + (1-\pi_o) \int_{\Theta} L_{11}[\delta(x),\theta]\; P_\theta(dx)\, \Pi(d\theta)\right] . \tag{2-1}$$

Dans la suite, nous supposons que $\mathcal{X}$ et Θ sont deux espaces euclidiens de dimension finie, et que les mesures de probabilité P_o , P_θ , Π admettent des densités p_o , p_θ , π par rapport à la mesure de Lebesgue, de sorte que l'expression de la perte moyenne devient :

$$R = E\{L\} = \int_{\mathcal{X}_o} \left[\pi_o\, L_{00}\, p_o(x) + (1-\pi_o) \int_{\Theta} L_{01}(\theta)\, p_\theta(x)\, \pi(\theta)\, d\theta\right] dx$$
$$+ \int_{\overline{\mathcal{X}_o}} \left[\pi_o\, L_{10}[\delta(x)] p_o(x) + (1-\pi_o) \int_{\Theta} L_{11}[\delta(x),\theta] p_\theta(x)\, \pi(\theta) d\theta\right] dx . \tag{2-2}$$

3 - PROCEDURE DE DETECTION PREALABLE (PROCEDURE A)

3-1- Méthode

La méthode généralement suivie en détection-estimation est de s'imposer une décomposition du problème en une opération préalable de détection de présence suivie, conditionnellement à une décision "signal présent", d'une estimation des paramètres intéressant l'observateur (figure 1).

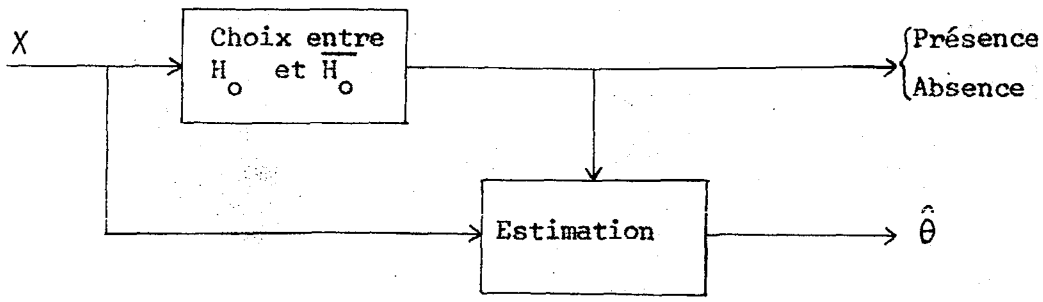

FIGURE 1

On résoud donc deux problèmes de décision successifs :

- La détection de présence qui correspond à un espace paramétrique $H_o \cup \Theta$ et à un espace de décision $\mathcal{A}_o \cup \bar{\mathcal{A}}_o$. La perte moyenne R_D se déduit alors de (2-2) en supposant que :

$$L_{01}(\theta) = L_{01} \,, \tag{3-1}$$

$$L_{10}(\hat{\theta}) = L_{10} \,, \quad L_{10} > L_{00} \,, \tag{3-2}$$

$$L_{11}(\hat{\theta},\theta) = L_{11} \,, \quad L_{11} < L_{01} \,, \tag{3-3}$$

où L_{01}, L_{10}, L_{11} sont des constantes. On obtient :

$$R_D = \int_{\mathfrak{X}_o} \left[\pi_o L_{00} p_o(x) + (1-\pi_o) L_{01} p_1(x)\right] dx + \int_{\bar{\mathfrak{X}}_o} \left[\pi_o L_{10} p_o(x) + (1-\pi_o) L_{11} p_1(x)\right] dx$$

avec $p_1(x) = \int_{\Theta} p_\theta(x)\, \pi(\theta)\, d\theta$.

- L'estimation, conditionnelle à la décision $\overline{a}_o$ qui correspond à un espace paramétrique $H_o \cup \Theta$ et à un espace de décision $\hat{\Theta}$. La perte moyenne R_E se déduit alors de (2-2) en supposant que :

$$L_{00} = L_{01}(\theta) = L_{10}(\hat{\theta}) = 0 \quad , \qquad (3\text{-}4)$$

$$\pi_o = 0 \quad . \qquad (3\text{-}5)$$

On obtient :

$$R_E = \int_{\overline{\mathfrak{X}}_o} \int_{\Theta} L_{11}(\delta(x),\theta)\ p_\theta(x)\ \pi(\theta)\ d\theta\ dx$$

La recherche du détecteur-estimateur dans cette approche est généralement effectuée par optimalisations successives du problème de détection associé à la perte R_D et, éventuellement, du problème d'estimation associé à la perte R_E. Dans la première étape on partage $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}_o$ et $\overline{\mathfrak{X}}_o$; la règle de partage est définie par :

$$\mathfrak{X}_o = \left\{ x \ ; \ \frac{\int_\Theta p_\theta(x)\ \pi(\theta)\ d\theta}{p_o(x)} < \frac{\pi_o}{1-\pi_o}\ \frac{L_{10}-L_{00}}{L_{01}-L_{11}} \right\} .$$

Dans la seconde étape, on recherche la fonction δ définie sur $\overline{\mathfrak{X}}_o$ qui minimalise R_E.

Cette procédure ne sera généralement pas équivalente à celle consistant à minimaliser directement R, même lorsque (3-1) et (3-2) sont vérifiés.

3-2- Exemple d'application

Cette méthode a en particulier été utilisée pour l'étude des systèmes de détection-estimation applicables aux signaux actifs tels qu'on les rencontre en sonar ou en radar [4 à 6]. Au moins en première approximation, ces signaux peuvent être considérés comme étant de type déterministe, c'est-à-dire d'équation connue mais dépendant de certains paramètres tels que :

- la date d'arrivée sur un intervalle de temps [t-T,t] fixé,

- la direction de propagation du signal par rapport à une base à n capteurs,

- l'affaiblissement du à la propagation,

- le Doppler engendré par la vitesse de propagation de la cible.

La procédure A a été appliquée à la détection-estimation de certains signaux actifs, noyés dans un bruit gaussien. Le détecteur de présence qui donne une décision à l'instant t de fin de tranche d'observation, comporte 3 parties :

. une opération linéaire du type filtrage adapté (système obtenu dans la recherche du détecteur optimal de présence d'un signal complètement connu),

. une opération non linéaire,

. une opération linéaire du type intégration ou sommation sur les différents paramètres inconnus du signal.

L'estimateur selon le maximum de vraisemblance a posteriori, qui est l'estimateur de Bayes pour une fonction de perte particulière, est du type "maximum du filtre adapté sur la tranche d'observation" [7].

4 - PROCEDURE D'ESTIMATION PREALABLE (PROCEDURE B)

4-1- Méthode

Le deuxième point de vue pourrait se définir comme une procédure de détection "adaptative" au signal. La méthode adoptée consiste à estimer d'abord les caractéristiques du signal en le supposant présent, puis à se servir de ces renseignements pour décider de la présence du signal. Dans un premier temps, le temps "d'adaptation", on recherche la valeur $\hat{\theta}$ des paramètres décrivant le signal que l'on veut détecter. Cette recherche se fait à l'aide d'un estimateur de Bayes (maximum de vraisemblance a posteriori ou erreur quadratique moyenne). Dans un deuxième temps on cherche à optimaliser le simple choix entre les deux hypothèses H_o et $H_{\hat{\theta}}$. La décomposition correspondante du récepteur est schématisée sur la figure 2.

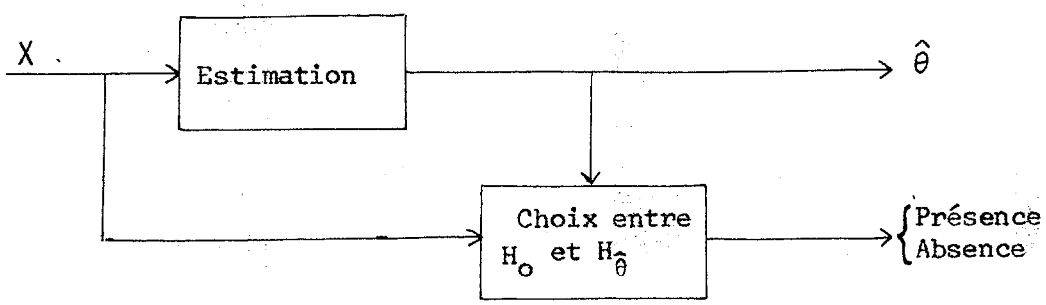

FIGURE 2

Le premier problème de décision, c'est-à-dire l'estimation, correspond à un espace paramétrique $H_o \cup \Theta$ et à un espace de décision $\hat{\Theta}$. La perte moyenne R_E se déduit alors de (2-2) en supposant

que $\quad L_{00} = L_{01}(\theta) = 0 \quad , \pi_o = 0 \quad ,$

et que $\quad \overline{\mathcal{X}}_o = \mathcal{X}$.

On obtient :

$$R_E = \int_{\mathcal{X}} \int_{\Theta} L_{11}[\delta(x),\theta]\ p_\theta(x)\ \pi(\theta)\ d\theta\ \ dx \qquad (4\text{-}1)$$

Le deuxième problème de décision, celui de détection, correspond à un espace paramétrique $H_o \cup \Theta$ et à un espace de décision $\mathcal{a}_o \cup \hat{\theta}$. La perte moyenne R_D se déduit de (2-2) en supposant que (3-1) , (3-2) , (3-3) sont vérifiées et en supposant que $\pi(\theta)$ est une distribution de Dirac au point $\hat{\theta}$. On obtient :

$$R_D = \int_{\mathcal{X}_o} \left[\pi_o L_{00} p_o(x) + (1-\pi_o) L_{01} p_{\hat{\theta}}(x)\right] dx + \int_{\bar{\mathcal{X}}_o} \left[\pi_o L_{10} p_o(x) + (1-\pi_o) L_{11} p_{\hat{\theta}}(x)\right] d$$

Le détecteur correspondant, compare à un seuil le rapport de vraisemblance :

$$\frac{p_{\hat{\theta}}(x)}{p_o(x)}$$

4-2- Application

La procédure en deux temps que nous venons de développer comporte une estimation avec incertitude [8], c'est-à-dire que l'on n'est pas sûr de la présence du signal dont on estime les paramètres. Si la mise en oeuvre de l'estimation est assez complexe et coûteuse on peut regretter que le système l'effectue chaque fois, puisqu'elle peut être fréquemment sans objet. En fait dans les systèmes basés sur ce principe, l'estimateur peut être d'un type simple, impliquant une plus grande facilité de réalisation pour la procédure B que pour la procédure A.

L'exemple le plus important est celui où l'on adopte l'estimateur du maximum de la fonction de vraisemblance

$$\hat{\theta}(x) = \left\{ \theta\ ;\ \frac{p_\theta(x)}{p_o(x)}\ \ \text{maximum} \right\}$$

Dans ce cas l'estimateur et le détecteur correspondent au même organe qui construit $p_\theta(x)/p_o(x)$.

DETECTION ET ESTIMATION SIMULTANEES D'UN SIGNAL

Pour détecter un signal de temps d'arrivée inconnu dans une tranche $[t-T,t]$, le récepteur correspondant est celui qui compare à un seuil le maximum de la sortie du filtre adapté, en estimant son instant d'arrivée comme l'instant qui correspond au maximum.

5 - PROCEDURE DE DETECTION-ESTIMATION GLOBALE (PROCEDURE C)

5-1- Méthode

Sur le plan théorique, aucune des deux méthodes précédentes n'est complètement satisfaisante, car ni l'une ni l'autre n'optimalise globalement la détection et l'estimation, en minimalisant la perte moyenne (2-2) [9 à 12]. Elles n'ont pas été conçues dans ce but, mais pour faciliter la résolution du problème. Pour déterminer la stratégie optimale, il faut revenir à l'expression de la perte moyenne (2-2) et déterminer le couple ($\mathcal{X}_o,\delta$) qui minimalise cette quantité. Pour cela, on détermine d'abord la fonction $\delta_{\mathcal{X}_o}$ qui, pour une région $\mathcal{X}_o$ fixée, minimalise le second terme de l'expression (2-2) :

$$F(\mathcal{X}_o,\delta) = \int_{\overline{\mathcal{X}_o}} \left[\pi_o L_{10}[\delta(x)]p_o(x)+(1-\pi_o)\int_{\Theta} L_{11}[\delta(x),\theta]p_\theta(x)\pi(\theta)d\theta\right]dx. \quad (5\text{-}1)$$

Puis on détermine la région $\mathcal{X}_o$ qui minimalise :

$$R(\mathcal{X}_o) = \int_{\mathcal{X}_o} \left[\pi_o L_{00}p_o(x)+(1-\pi_o)\int_{\Theta} L_{01}(\theta)p_\theta(x)\pi(\theta)d\theta\right] dx+F(\mathcal{X}_o,\delta_{\mathcal{X}_o}) \ .$$

5-2- Recherche de l'estimateur

L'intégrant de (5-1) est non négatif. Par suite, s'il existe une fonction $\delta^*(x)$ qui minimalise

$$\pi_o L_{10}[\delta(x)]p_o(x)+(1-\pi_o) \int_{\Theta} L_{11}[\delta(x),\theta]p_\theta(x)\pi(\theta)d\theta \quad (5\text{-}2)$$

pour tout x, elle minimalise aussi

$$\int_{\mathcal{X}} \left[\pi_o L_{10}[\delta(x)]p_o(x)+(1-\pi_o) \int_{\Theta} L_{11}[\delta(x),\theta]p_\theta(x)\, \pi(\theta)d\theta\right] dx \quad (5\text{-}3)$$

et sa restriction à $\overline{\mathcal{X}_o}$ minimalise (5-1).

La fonction δ^* n'est autre que l'estimateur optimal pour le problème d'estimation pur (cf 4-1). Ainsi l'estimateur optimal $\delta_{\mathcal{X}_o}$ pour le problème de détection-estimation est la restriction à la région critique $\overline{\mathcal{X}_o}$, de l'estimateur optimal pour le problème d'estimation pur.

On suppose que δ^* existe et on appelle f(x) la valeur minimale correspondante de l'intégrant (5-2).

5-3- Cas où $L_{10}[\hat{\theta}] = L_{10}$ constante

Dans le cas où la perte due à une fausse alarme est indépendante de l'estimation réalisée sur le paramètre, c'est-à-dire sous l'hypothèse L_{10} = cte , les résultats se simplifient. En effet, minimaliser la quantité (5-3) équivaut alors à minimaliser

$$\int_{\mathcal{X}} \cdot \int_{\Theta} L_{11}[\delta(x),\theta] \; p_\theta(x) \; \pi(\theta) \; d\theta \; dx \; , \qquad (5\text{-}4)$$

qui n'est autre que l'expression (5-3) avec $\pi_o = 0$, c'est-à-dire lorsque le signal est toujours présent. Ainsi, lorsque $L_{10}[\hat{\theta}] = C^{te}$, l'estimateur optimal a la même structure que dans le problème d'estimation avec certitude de présence.

Si en particulier θ est un paramètre scalaire, et si la perte est quadratique :

$$\delta^*(x) = E\{\theta|x\} \; ,$$

$$f(x) = \pi_o L_{10} p_o(x) + (1-\pi_o) \mathrm{var}(\theta|x) \; p_1(x) \; , \qquad (5\text{-}5)$$

où les moments sont conditionnels à x et à l'hypothèse $\overline{H_o}$ (présence de signal) et où $p_1(x)$ désigne la loi moyenne de l'observation dans la situation signal présent

$$p_1(x) = \int_{\Theta} p_\theta(x) \; \pi(\theta) \; d\theta$$

5-4- Recherche de la partition optimale

Il s'agit alors de déterminer la partition qui minimalise:

$$R(\mathfrak{X}_o) = \int_{\mathfrak{X}_o} \left[\pi_o L_{00} p_o(x) + (1-\pi_o)\int_{\Theta} L_{01}(\theta) p_\theta(x)\pi(\theta)d\theta\right]dx + \int_{\overline{\mathfrak{X}}_o} f(x)\ dx.$$

Cette perte moyenne s'écrit :

$$R(\mathfrak{X}_o) = A + \int_{\overline{\mathfrak{X}}_o} \left[f(x) - \pi_o L_{00} p_o(x) - (1-\pi_o)\int_{\Theta} L_{01}(\theta) p_\theta(x)\,\pi(\theta)d\theta\right]\ dx$$

avec

$$A = \int_{\mathfrak{X}} \left[\pi_o L_{oo}\ p_o(x)\ + (1-\pi_o)\ \int_{\Theta} L_{01}(\theta) p_\theta(x)\pi(\theta)\ d\theta\right]\ dx\ .$$

Si la région $\overline{\mathfrak{X}}_o$ contient tous les points où l'intégrant est négatif et ne contient aucun des points où l'intégrant est positif, alors $R(\mathfrak{X}_o)$ est minimale. Quant aux points où l'intégrant est nul, ils peuvent appartenir indifféremment à la région $\mathfrak{X}_o$ ou $\overline{\mathfrak{X}}_o$.

Le détecteur correspondant a pour règle de décision :

$$f(x) - \pi_o L_{oo}\ p_o(x) - (1-\pi_o)\int_{\Theta} L_{01}(\theta) p_\theta(x)\pi(\theta)\ d\theta \ \underset{a_o}{\overset{\bar{a}_o}{\lessgtr}}\ 0\ . \qquad (5\text{-}6)$$

Cette expression, jointe à la fonction δ^*, définit la stratégie optimale pour la détection-estimation globale.

Dans le cas particulier où le paramètre est scalaire, où (3-1) et (3-2) sont vérifiées et où la perte d'estimation est quadratique, la règle de décision (5-6) devient :

$$\pi_o L_{10} p_o(x) + (1-\pi_o)\mathrm{var}(\theta|x) p_1(x) - \pi_o L_{oo}\ p_o(x) - (1-\pi_o) L_{01} p_1(x)\ \underset{a_o}{\overset{\bar{a}_o}{\lessgtr}}\ 0$$

qui s'écrit encore (avec $L_{11}(\hat{\theta},\theta) < L_{01}$) :

$$\frac{p_1(x)}{p_o(x)}\left[1 - \frac{1}{L_{01}}\ \mathrm{var}\ (\theta|x)\right] \underset{\bar{a}_o}{\overset{a_o}{\lessgtr}}\ \frac{\pi_o}{1-\pi_o}\ \frac{L_{10}-L_{00}}{L_{01}} \qquad (5\text{-}7)$$

6 - CONCLUSION

On considère souvent la détection et l'estimation comme des opérations distinctes, optimalisables séparément. Cependant, nombre de situations rencontrées dans la réalité se formalisent comme un problème de détection-estimation : c'est la même observation qui doit permettre, d'une part, la prise de décision présence ou absence de signal, d'autre part, l'évaluation des caractéristiques intéressantes du signal.

La décomposition du problème de détection-estimation en deux problèmes successifs soit de détection puis d'estimation, soit d'estimation puis de détection ne conduit généralement pas au récepteur optimal. Celui-ci est obtenu par résolution globale du problème posé, ce que l'on a considéré dans l'optique bayesienne.

On peut en particulier constater, si les pertes sont choisies de manière suffisamment simple, que la stratégie, optimale pour le problème de détection-estimation, consiste à effectuer l'estimation à l'aide de l'estimateur de Bayes optimal pour le problème d'estimation pur. Et qu'elle consiste, dans le cas d'un paramètre scalaire, à effectuer la détection par comparaison d'un rapport de vraisemblance généralisé à un seuil mobile mettant en jeu la variance de l'erreur d'estimation du paramètre. La modulation du seuil de détection décroît avec cette variance c'est-à-dire lorsque croît la qualité de l'estimation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MERMOZ H. : Antennes de détection optimales et adaptatives. Théorie et applications. Collection Technique et Scientifique du CNET, Paris, 1971.

[2] SOURROUILLE L. : Détection dans un bruit d'un signal perturbé par un filtrage linéaire aléatoire. Thèse de 3ème Cycle, Centre d'Orsay, Université de Paris-Sud. 1973.

[3] VEZZOSI G. : Essai de formalisation des problèmes de détection adaptative. Actes du "4e Colloque National sur le Traitement du Signal et ses applications" (GRETSI), Nice 7 au 12 Mai 1973.

[4] MACCHI O. : Détection optimale d'un signal de temps d'arrivée inconnu et estimation de ce temps. Annales des Télécommunications, 25, N°7-8, Juillet-Août 1970. p. 312-318.

[5] MACCHI C., MACCHI O. : Détection optimale adaptative d'un signal vectoriel de temps d'arrivée inconnu. Annales des télécommunications, 26, N°9-10, Sept.-Oct. 1971, p. 363-370.

[6] ARQUES P.-Y. : Détection, estimation et performances de signaux certains de date d'arrivée et de direction inconnues. Annales des Télécommunications, 26, N°9-10, Sept-Oct. 1971, p. 371-380.

[7] HELSTROM C.W. : Statistical theory of signal detection. Pergamon Press, New York, 1968.

[8] SHEINBERG R.: Uncertainty hypothesis estimation of non random parameters using a generalized least square procedure. Hughes Report, N°214.340/195, 1971.

[9] MIDDLETON D., ESPOSITO R. : Simultaneous Optimum Detection and Estimation of Signals in Noise. IEEE Trans. on I.T., 14, N°3, May 1968, p. 434-444.

[10] JAFFER A.G., GUPTA S.C. : Coupled Detection-Estimation of Gaussian Processes in Gaussian Noise. IEEE Trans. on I.T., 18, N°1, Jan. 1972, p. 106-110.

[11] PARK S.K., LAINIOTIS D.G. : Joint Detection-Estimation of Gaussian Signals in white Gaussian Noise. Information Sciences 4, N°4, Oct. 1972, p. 315-325.

[12] FREDRIKSEN A., MIDDLETON D., VANDELINDE D. : Simultaneous Signal Detection and Estimation Under Multiple Hypotheses. IEEE Trans. on I.T., 18, N°5, Sept. 1972, p. 607-614.