

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

CALCUL DU TAUX D'ERREURS SUR UN CANAL DE TRANSMISSION NUMERIQUE EN
MODULATION DIFFERENTIELLE A 4 ETATS DE PHASE

M. JOINDOT

Ingénieur des Télécommunications

département "Equipements de Transmission et Laser"

Centre National d'Etudes des Télécommunications à Lannion

RESUME

Le type de modulation dont le principe est exposé au début de cet article trouve une importance particulière aujourd'hui du fait de son utilisation dans le système de transmission à grande capacité sur guides d'ondes circulaires, en cours de développement au C.N.E.T.

Aussi le problème du calcul du taux d'erreurs sur un canal de transmission utilisant ce procédé est-il fondamental car il est nécessaire de déterminer les paramètres du système (les filtres en particulier) afin de rendre la probabilité d'erreur minimale.

C'est à cette question que répond la méthode développée ici. Il ne s'agit que d'une étude théorique et les aspects techniques ne sont pas abordés dans cette étude.

SUMMARY

The 4 phases DCPSK modulation is to day particularly important because it will be used on our high capacity transmission system on the circular waveguide, which is being studied in C.N.E.T.

We give here a method for the determination of bit error-rate on the channel in the presence of filtering and gaussian noise, which can be used to determine the transmission characteristics so that the error rate is the lowest.

It is only a theoritecal study without technical considerations, and with idealized elements ; particularly non linear effects are not considered.

A) - PRINCIPE DE LA MODULATION DIFFERENTIELLE A 4 ETATS DE PHASE

Le signal modulé se présente sous la forme d'une suite de morceaux d'onde porteuse de fréquence $\nu_0 = \omega_0/2\pi$, de durée T (1/T est la rapidité de modulation en bauds). Entre le morceau compris entre les instants θ et $\theta + T$ et le morceau précédent compris entre les instants $\theta - T$ et θ existe un saut de phase $\Delta\psi_0$ susceptible de prendre 4 valeurs : 0, $\pi/2$, π et $3\pi/2$. Chacune d'entre elles est associée à une valeur possible du doublet (A,B), A et B désignant les deux trains numériques de rapidité de modulation 1/T bauds et débit 1/T bit/s attaquant le modulateur. Nous choisirons dans la suite la correspondance ci-dessous :

A	B	$\Delta\psi_0$
0	0	0
0	1	$\frac{\pi}{2}$
1	0	$\frac{3\pi}{2}$
1	1	π

Cependant, les résultats obtenus sont tout à fait transposables, au prix de très légères modifications pour d'autres conventions de codage binaire à signal.

Le morceau de porteuse compris entre les instants $\theta - T$ et θ est donc représenté par l'équation :

$x_{[\theta-T,\theta]} \cos(\omega_0 t + \gamma)$ où γ est une phase qui, nous le verrons, est sans importance et où $x_{[\theta-T,\theta]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[\theta-T,\theta]$ définie par :

$$x_{[\theta-T,\theta]} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [\theta-T,\theta] \\ 0 & \text{si } t \notin [\theta-T,\theta] \end{cases}$$



Le morceau de porteuse suivant est représenté par l'équation :

$$x_{[\theta, \theta+T]} \cos(\omega_0 t + \gamma + \Delta\varphi)$$

où $\Delta\varphi$ est le saut de phase traduisant l'information associée à l'intervalle $[\theta, \theta+T]$ soit 2 éléments binaires.

La démodulation consiste à extraire cette information. Considérons les deux valeurs de temps θ_1 et θ_2 égales à $(2k+1) \frac{T_0}{8}$ et $(2k+3) \frac{T_0}{8}$ où T_0 vaut $\frac{1}{\nu_c} = \frac{2\pi}{\omega_c}$, où k est choisi de manière que :

$$(2k+1) \frac{T_0}{8} \leq T < (2k+3) \frac{T_0}{8}$$

Les deux valeurs θ_1 et θ_2 diffèrent de T au maximum d'une valeur $\frac{T_0}{4}$. Dans le cas de la liaison à 2×290 Mbit avec $\nu_c = 1450$ MHz cela ne représente au maximum que 5 % de la valeur T . En règle générale nous aurons $\theta_1 \neq T$ et $\theta_2 \neq T$ avec $\theta_1 \leq T < \theta_2$.

Multiplions alors le signal par le signal retardé de θ_1 et par le signal retardé de θ_2 . Le morceau de porteuse :

$x_{[\theta, \theta+T]} \cos(\omega_0 t + \gamma + \Delta\varphi)$ se trouve multiplié par :

$$x_{[\theta, \theta+\theta_1]} \cos(\omega_0(t-\theta_1) + \gamma) + x_{[\theta+\theta_1, \theta+T]} \cos(\omega_0(t-\theta_1) + \gamma + \Delta\varphi)$$

d'une part et :

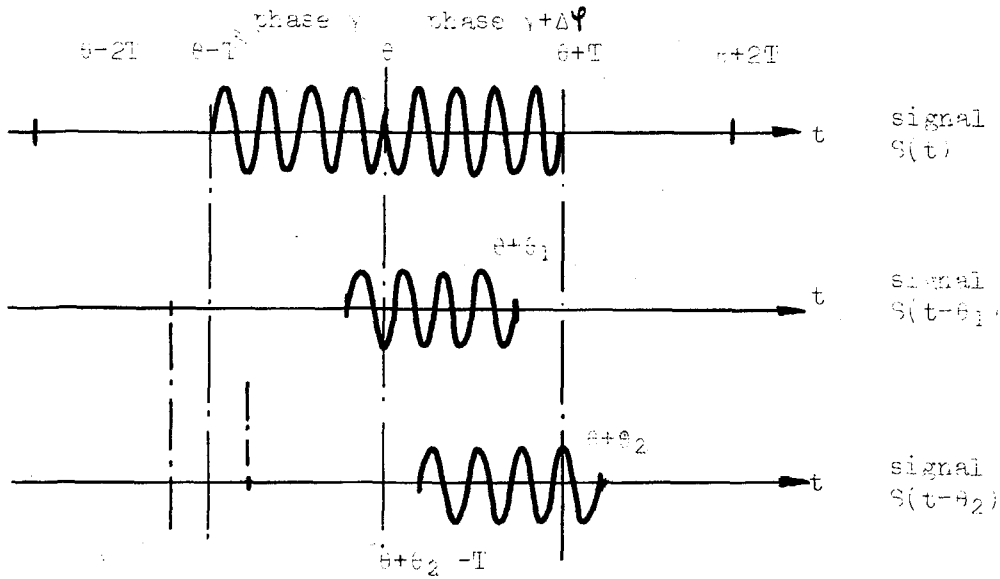
$$x_{[\theta, \theta+\theta_2-T]} \cos(\omega_0(t-\theta_2) + \psi) + x_{[\theta+\theta_2-T, \theta+T]} \cos(\omega_0(t-\theta_2) + \gamma)$$

d'autre part, où ψ est la phase du morceau de porteuse contenu dans l'intervalle $[\theta-2T, \theta-T]$. La figure ci-dessous représente les divers signaux.

Dans les produits $S(t) S(t-\theta_1)$ et $S(t) S(t-\theta_2)$ on trouve les 2 termes :

$$x_{[\theta, \theta+\theta_1]} \cos(\omega_0(t-\theta_1) + \gamma) \cos(\omega_0 t + \gamma + \Delta\varphi) \quad \text{et}$$

$$x_{[\theta+\theta_2-T, \theta+T]} \cos(\omega_0(t-\theta_2) + \gamma) \cos(\omega_0 t + \gamma + \Delta\varphi)$$



On peut, par passage dans un filtre éliminant le terme à la fréquence $2\omega_0$, ne conserver que les deux composantes (à un facteur $1/2$ près) :

$$\begin{cases} V_1 = X[\theta; \theta + \theta_1] \cos(\Delta\psi + \omega_0 \theta_1) \\ V_2 = X[\theta + \theta_2 - T, \theta + T] \cos(\Delta\psi + \omega_0 \theta_2) \end{cases}$$

Il suffit d'échantillonner la tension détectée V_1 et V_2 à la fréquence $1/T$ au milieu de l'intervalle $[\theta, \theta + T]$ pour obtenir ; de par le signe des deux tensions V_1 et V_2 la valeur de $\Delta\psi$ et directement les valeurs des deux éléments binaires A et B modulateurs. Car nous avons :

$$\begin{cases} V_1(t_e) = \cos(\Delta\psi + (2k+1)\frac{\pi}{4}) \\ V_2(t_e) = \cos(\Delta\psi + (2k+3)\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

où t_e est l'instant d'échantillonnage. V_1 (ou V_2) se réduit en fait à un terme de la forme :



$$A_\lambda = \cos \left(\Delta\varphi + \lambda \frac{\pi}{4} \right) \text{ où } \lambda \text{ vaut } 1, 3, 5 \text{ ou } 7.$$

Chacune des grandeurs A_λ a un signe directement lié à la valeur d'un des éléments binaires, correspondance résumée ci-dessous :

A	B	$\Delta\varphi$	A_1	A_3	A_5	A_7
0	0	0	+	-	-	+
0	1	$\pi/2$	-	-	+	+
1	1	π	-	+	+	-
1	0	$3\pi/2$	+	+	-	-

$$\begin{cases} A_1 > 0 \text{ (resp. } < 0) & \leftrightarrow & B = 0 \text{ (resp. } 1) \\ A_3 > 0 \text{ (resp. } < 0) & \leftrightarrow & A = 1 \text{ (resp. } 0) \\ A_5 > 0 \text{ (resp. } < 0) & \leftrightarrow & B = 1 \text{ (resp. } 0) \\ A_7 > 0 \text{ (resp. } < 0) & \leftrightarrow & A = 0 \text{ (resp. } 1) \end{cases}$$

Le couple (V_1, V_2) correspond à l'une des combinaisons (A_1, A_3) , (A_3, A_1) , (A_3, A_5) , (A_5, A_3) , (A_5, A_7) , (A_7, A_5) , (A_7, A_1) , (A_1, A_7) , donc chacune des deux tensions caractérise directement par son signe, l'information de l'un des éléments binaires.

B) - SCHEMA D'UN CANAL AVEC FILTRAGE

Sur tout système de transmission, on trouvera des filtres destinés à séparer les canaux et à limiter la puissance de bruit. Bien entendu, ils vont déformer le signal. Admettons pour l'instant que nous ayons un filtre de gain complexe donné. Le morceau de porteuse :

$$x_{[\theta-T, \theta]} \cos(\omega_0 t + \gamma)$$

est transformé en un signal de la forme :

$$P(t) \cos(\omega_0 t + \gamma) - Q(t) \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

qui n'est plus à support compact. En conséquence le signal dans

l'intervalle $[\theta-T, \theta]$ a la forme ($t_n = t - nT$)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ P(t-nT) \cos(\omega_0 t_n + \gamma + \Delta\varphi_n) - Q(t-nT) \sin(\omega_0 t_n + \gamma + \Delta\varphi_n) \}$$

où $\Delta\varphi_n$ est l'écart de phase entre le morceau de porteuse situé dans l'intervalle $[\theta+nT, \theta+(n+1)T]$ et le morceau dans l'intervalle $[\theta, \theta+T]$.

On voit facilement que dans l'intervalle $[\theta, \theta+T]$, le signal s'écrit:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ P(t-nT) \cos(\omega_0 t_n + \gamma + \Delta\varphi_{n+1}) - Q(t-nT) \sin(\omega_0 t_n + \gamma + \Delta\varphi_{n+1}) \}$$

A l'instant d'échantillonnage t_e , ce sont donc des quantités dépendant des morceaux voisins que nous allons trouver. Ce phénomène constitue l'interférence intersymboles.

En pratique, pour des raisons de temps de calcul, nous considérons que les valeurs de P et Q sont négligeables au delà d'une certaine valeur de n. Par exemple, dans les cas usuels, on suppose qu'un morceau de porteuse perturbe les deux qui le précèdent et les deux qui le suivent. Nous aurons alors la figure 1.

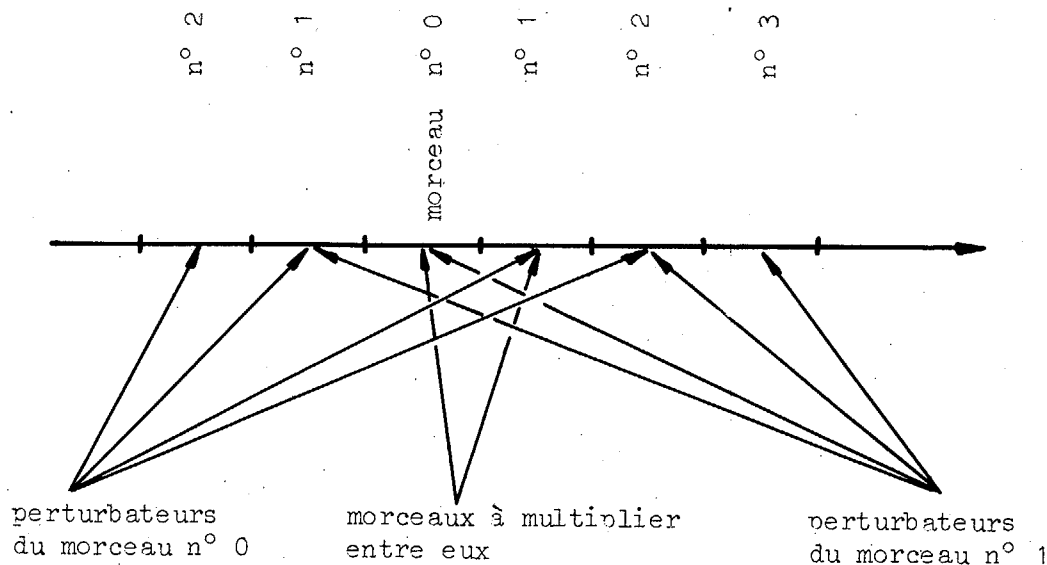


FIGURE 1



Chaque suite $(\Delta\psi_{-2}, \Delta\psi_{-1}, \Delta\psi_0 = 0, \Delta\psi_1, \Delta\psi_2, \Delta\psi_3)$ donne une configuration particulière, il y a en tout :

$2^5 = 2^{10} = 1024$ cas à examiner ce qui est déjà considérable sur ordinateur. Nous pouvons, donner une représentation vectorielle du phénomène sur le diagramme de Fresnel :

exemple : le saut de phase initial est $\frac{\pi}{2}$

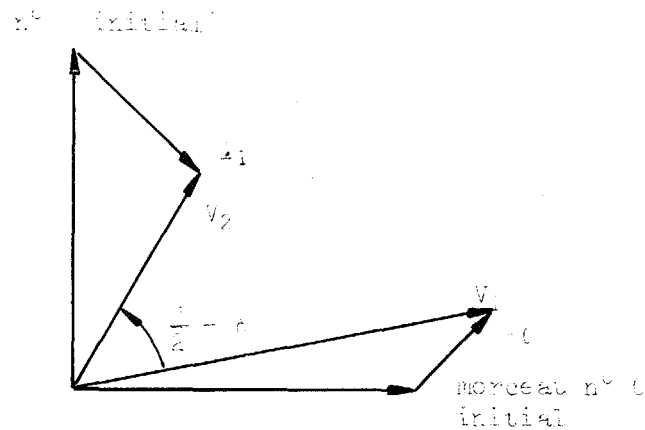


FIGURE 2

Les vecteurs I_0 et I_1 , représentant la perturbation (et qui ne sont pas du tout indépendants) s'ajoutent aux vecteurs initiaux. La configuration sera caractérisée par les deux vecteurs (figure 2). V_1^{\rightarrow} et V_2^{\rightarrow} c'est-à-dire par les 3 nombres $V_1 = |V_1^{\rightarrow}|$, $V_2 = |V_2^{\rightarrow}|$ et $(V_1^{\rightarrow}, V_2^{\rightarrow})$ posé égal à $\frac{\pi}{2} - \delta$.

Une configuration de saut de phase initial $\Delta\phi$ (où $\Delta\phi$ vaut $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$) se retrouve après filtrage représentée par les 3 paramètres :

$$\begin{aligned} V_1 &= |V_1^{\rightarrow}| \\ V_2 &= |V_2^{\rightarrow}| \\ (V_1^{\rightarrow}, V_2^{\rightarrow}) &= \Delta\phi - \delta \quad (\delta \text{ étant algébrique}) \end{aligned}$$

Pour le calcul on représente ces grandeurs sous forme de nombres complexes. A la quantité :

$P(t) \cos \omega_0 t - Q(t) \sin \omega_0 t$ est associé le nombre complexe

$$z(t) = c(t) e^{i\theta(t)} \text{ avec } c(t) = \sqrt{P^2(t) + Q^2(t)}$$

$$\theta(t) = \text{Arctg} \left(-\frac{Q}{P} \right)$$

On caractérise une configuration par les nombres Z_1 et Z_2 avec :

$$Z_1 = \sum c_n c(t_e - nT) \exp(i\theta(t_e - nT))$$

$$Z_2 = \sum c_{n+1} c(t_e - nT) \exp(i\theta(t_e - nT))$$

où c_i vaut 1, -1, +i, ou -i suivant que $\Delta\varphi_i$ vaut 0, π , $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.
La configuration est alors caractérisée par :

$$|Z_1|, \quad |Z_2| \quad \text{et} \quad \text{Arg} \frac{Z_2}{Z_1} = \Delta\varphi - \delta = \text{Arg} c_1 - \delta$$

C) - INFLUENCE DU BRUIT

Le bruit sera supposé être un bruit $n(t)$ gaussien et "blanc" à l'entrée du filtre de gain complexe $G(v)$. Sa densité spectrale est γ . En sortie du filtre nous avons encore un bruit gaussien donc la puissance totale s'écrit :

$$\sigma^2 = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} |G(v)|^2 dv$$

Ce bruit a une certaine fonction de corrélation $C_{nn}(\tau)$. Nous ferons toujours l'hypothèse que $C_{nn}(T)$ est négligeable, c'est-à-dire que les valeurs de $n(t)$ à T secondes d'intervalle sont non corrélées donc indépendantes (car gaussiennes).



Nous devons alors à chacun des 2 vecteurs V_1^{\rightarrow} et V_2^{\rightarrow} ajouter deux "vecteurs de bruit" indépendants, gaussiens. L'angle des deux vecteurs résultants est une variable aléatoire. Représentons alors les régions de décision dans le plan des sauts de phase : (cf. figure 3)

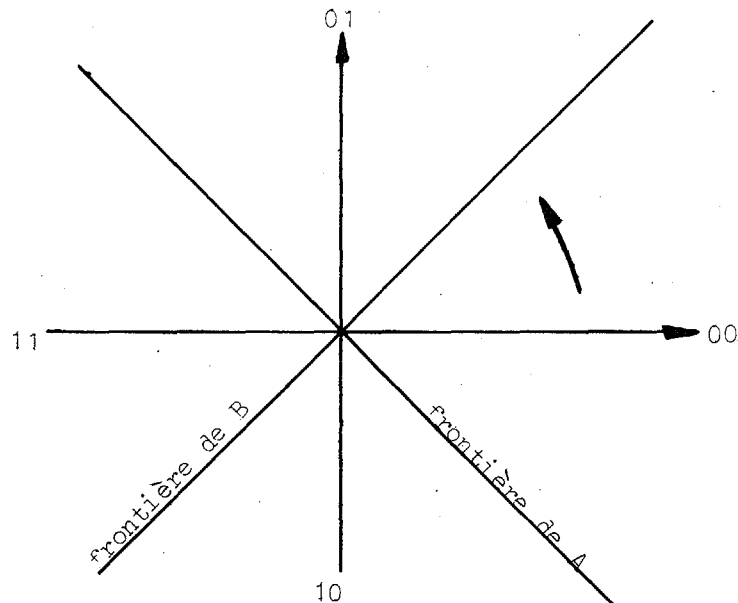


FIGURE 3 : Régions de décision

$$\Delta\phi \text{ initial} = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{2} \quad \Delta\psi = \Delta\phi - \delta$$

$$P_b \{A \text{ faux}\} = P_b \left\{ \Delta\psi \text{ entre } \frac{3\pi}{4} \text{ et } \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$P_b \{B \text{ faux}\} = P_b \left\{ \Delta\psi \text{ entre } \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$\Delta\phi \text{ initial} = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi$$

$$P_b \{A \text{ faux}\} = P_b \left\{ \Delta\psi \text{ entre } -\frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$P_b \{B \text{ faux}\} = P_b \left\{ \Delta\psi \text{ entre } \frac{5\pi}{4} \text{ et } \frac{9\pi}{4} \right\}$$

Pour chaque configuration, on calculera les probabilités d'erreur sur les voies A et B

$$P_{eA}(\sigma, V_1, V_2, \delta), \quad P_{eB}(\sigma, V_1, V_2, \delta)$$

et l'on fera la moyenne sur toutes les configurations envisagées supposées équiprobables.

D) - RESOLUTION DU PROBLEME

I - Calcul des composantes en phase et en quadrature P et Q

Pour trouver la réponse du filtre de gain complexe $G(v)$ au signal $x(t) = \cos \omega_0 t \times \chi_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$ on utilise la méthode du filtre "passe bas équivalent". Ce dernier est un filtre non réalisable obtenu en translatant autour de la fréquence 0 la courbe de réponse du filtre initial centrée autour de ν_0 . Sa réponse à l'impulsion carrée représentée par $\chi_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$ est une fonction complexe $R(t)$ qui s'écrit :

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(v) \frac{\sin \pi v T}{\pi v} \exp(2i\pi v t) dv$$

(G_0 gain du filtre passe-bas équivalent). On a directement P et Q en tant que partie réelle et partie imaginaire de $R(t)$. Cette méthode n'est valable que sous l'hypothèse, toujours vérifiée dans la pratique, que $G(v)$ peut être considéré comme nul en dehors d'un intervalle borné autour de ν_0 (et de son symétrique autour de $-\nu_0$).

II - Le bruit

On supposera un bruit gaussien dont la densité spectrale de puissance est constante et égale à γ dans une bande de fréquences limitée autour de ν_0 (et de $-\nu_0$). Après filtrage ce bruit reste gaussien et sa densité spectrale de puissance devient $\gamma |G(v)|^2$.

On raisonnera en considérant la représentation d'un vecteur de bruit dont les deux composantes X et Y sont des fonctions aléatoires gaussiennes (décomposition de Rayleigh). Nous négligerons les fonctions d'autocorrélation de X et Y et la fonction d'intercorrélation de ces 2 variables pour la valeur $\tau = T$, c'est-à-dire que les vecteurs de bruit agissant à deux instants d'échantillonnage successifs sont non corrélés et donc, étant gaussiens,



indépendants. On montre effectivement que, pour les largeurs de bande du filtre $B(\nu)$ utilisé en pratique, ces effets sont totalement négligeables et leur introduction amènerait un alourdissement important des calculs ultérieurs.

III - Calcul de la probabilité d'erreur

1°) - Calcul préliminaire

Nous aurons besoin, dans toute la suite, de la distribution de probabilité de la phase α d'un vecteur \vec{OM} égal à la somme d'un vecteur fixe \vec{OM}_0 , de module 1, et d'un vecteur $\vec{M_0M}$ (vecteur de bruit) dont les composantes sont des variables aléatoires gaussiennes centrées de même variance σ^2 (figure 4)

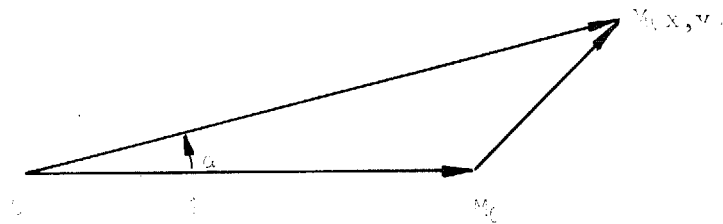


FIGURE 4

Appelons $\pi_0(\alpha)$ la distribution en question. Par un passage en coordonnées polaires à partir de la distribution de la variable (x,y) et une intégration par rapport au rayon vecteur, on trouve :

$$\pi_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cos \alpha \cdot \left(1 + \operatorname{erf} \frac{\cos \alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{\sin^2 \alpha}{2\sigma^2}\right)$$

où $\operatorname{erf} X$ est la fonction d'erreur définie par $\operatorname{erf} X = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X \exp(-u^2) du$

c'est la définition conservée par la suite.

2°) Calcul de la loi de probabilité de l'angle ψ défini ci-dessous

Considérons deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , de modules V_1

et V_2 , faisant un angle $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \theta$. L'origine des phases est arbitraire et nous supposerons que \vec{V}_1 est porté par l'axe Ox (figure 5). A chaque vecteur s'ajoute un vecteur aléatoire dont les composantes sont des variables aléatoires gaussiennes centrées d'écart quadratique moyen σ^2 . Soient \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ces deux vecteurs. Posant :

$$\vec{U}_1 = \vec{V}_1 + \vec{n}_1 \quad , \quad \vec{U}_2 = \vec{V}_2 + \vec{n}_2 \quad ,$$

nous allons chercher la loi de probabilité de l'angle $\psi = (\vec{U}_1, \vec{U}_2)$

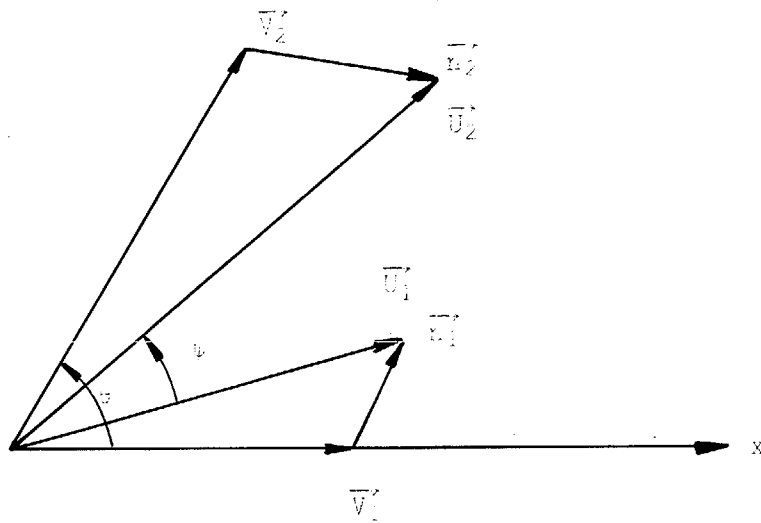


FIGURE 5

Nous supposons que \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont indépendants. Comme nous nous intéressons à la loi de la phase, il sera équivalent de normer les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 et de considérer deux puissances de bruit σ_1^2 et σ_2^2 agissant sur V_1 et V_2 définies par :

$$\frac{V_1^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma_1^2} \quad \frac{V_2^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma_2^2}$$

Nous avons $\psi = (\vec{Ox}, \vec{U}_2) - (\vec{Ox}, \vec{U}_1) = (\vec{Ox}, \vec{V}_2) + (\vec{V}_2, \vec{U}_2) - (\vec{Ox}, \vec{U}_1)$

$$\psi = \theta + \beta - \alpha \quad \text{en posant } \alpha = (\vec{Ox}, \vec{U}_1) \quad \beta = (\vec{V}_2, \vec{U}_2)$$

α obéit à la loi $\pi_{\sigma_1}(\alpha)$, β à la loi $\pi_{\sigma_2}(\alpha)$ et ces deux angles sont par hypothèse des variables indépendantes. La loi de probabilité ψ . $P(\sigma_1, \sigma_2, \psi)$ est donc donnée par le produit de convolution.



$$P(\sigma_1, \sigma_2, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \pi_{\sigma_1}(\alpha) \pi_{\sigma_2}(\psi + \alpha - \theta) d\alpha$$

soit encore en éliminant θ pour se ramener à une fonction unique Π

$$P(\sigma_1, \sigma_2, \psi) = \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \psi - \theta) \text{ où } \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \pi_{\sigma_1}(\alpha) \pi_{\sigma_2}(\alpha + \psi) d\alpha$$

C'est donc à la détermination de cette fonction de 3 variables que nous sommes en définitive ramenés. Les taux d'erreurs dans chaque configuration seront ensuite obtenus par intégration de la fonction Π entre des limites convenables. Dans chaque cas, pour une voie donnée A ou B la zone d'erreur correspond à un demi disque, limité par l'une des bissectrices. D'où la probabilité d'erreur qui est de la forme :

$$P_b \{\text{erreur}\} = P_b \{\alpha_1 < \psi < \alpha_2\} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(\sigma_1, \sigma_2, \psi) d\psi$$

soit encore :

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \psi - \theta) d\psi = \int_{\alpha_1 - \theta}^{\alpha_2 - \theta} \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \psi) d\psi$$

ou bien :

$$\int_{\alpha_1 - \Delta\phi + \delta}^{\alpha_2 - \Delta\phi + \delta} \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \psi) d\psi \text{ en se rappelant que } \theta = \Delta\phi - \delta$$

où $\Delta\phi$ est le saut de phase émis.

Nous avons donc à évaluer la quantité $J(\sigma_1, \sigma_2, \psi_1, \psi_2) = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \Pi d\psi$ et les probabilités d'erreur sur chaque voie dans

les 4 cas possibles pour $\Delta\phi$ sont écrites dans le tableau ci-dessous

$\Delta\phi$	A	B	Pb {A soit faux}	Pb {B soit faux}
0	0	0	$J(\sigma_1, \sigma_2, \frac{3\pi}{4} + \delta, \frac{7\pi}{4} + \delta)$	$J(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \delta, \frac{5\pi}{4} + \delta)$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$J(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \delta, \frac{5\pi}{4} + \delta)$	$J(\sigma_1, \sigma_2, \frac{3\pi}{4} + \delta, \frac{7\pi}{4} + \delta)$
π	1	1	$J(\sigma_1, \sigma_2, \frac{3\pi}{4} + \delta, \frac{7\pi}{4} + \delta)$	$J(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \delta, \frac{5\pi}{4} + \delta)$
$-\frac{\pi}{2}$	1	0	$J(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \delta, \frac{5\pi}{4} + \delta)$	$J(\sigma_1, \sigma_2, \frac{3\pi}{4} + \delta, \frac{7\pi}{4} + \delta)$

3°) - Calcul de Π et de J

Nous écrivons :

$$\left[\Pi(\sigma_1, \sigma_2, \Psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi\sigma_1} \cos\alpha \left(1 + \operatorname{erf} \frac{\cos\alpha}{\sigma_1\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{\sin^2\alpha}{2\sigma_1^2}\right) \right] \right. \\ \left. \left[\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi\sigma_2} \cos(\alpha + \Psi) \cdot \left(1 + \operatorname{erf} \frac{\cos(\alpha + \Psi)}{\sigma_2\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{\sin^2(\alpha + \Psi)}{2\sigma_2^2}\right) \right] d\alpha \right.$$

Ce qui donne :

- . un terme $\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_2^2}\right)$
- . un terme de la forme :

$$\left[\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\alpha + \Psi)}{2\sqrt{2}\pi\sigma_2} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{\cos(\alpha + \Psi)}{\sigma_2\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{\sin^2(\alpha + \Psi)}{2\sigma_2^2}\right) d\alpha \right.$$

- . un terme analogue obtenu en échangeant σ_1 et σ_2 et en changeant $\alpha + \psi$ en α .
- . un quatrième terme qui sera traité ensuite.

a) - Calculs du second et troisième terme

Compte tenu de ce que la fonction sous le signe somme dans le second terme est intégrée sur un intervalle période (2π) nous pouvons voir que le résultat ne dépend pas de ψ . On est donc ramené pour évaluer les deuxième et troisième terme à étudier



l'intégrale :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha \left(1 + \operatorname{erf} \frac{\cos \alpha}{\sigma_i \sqrt{2}} \exp \left(-\frac{\sin^2 \alpha}{2\sigma_i^2}\right)\right) d\alpha \quad (i = 1 \text{ ou } 2)$$

qui se réduit à $\int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha \operatorname{erf} \frac{\cos \alpha}{\sigma_i \sqrt{2}} \exp \left(-\frac{\sin^2 \alpha}{2\sigma_i^2}\right) d\alpha = A(\sigma_i)$

ou encore : $4 \int_0^{\pi/2} \dots$ en utilisant les symétries de la fonction,

ce qui donne :

$$\frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \exp \left(-\frac{\sin^2 \alpha}{2\sigma_i^2}\right) \cos \alpha \left(\int_0^{\frac{\cos \alpha}{\sigma_i \sqrt{2}}} \exp(-y^2) dy \right) d\alpha$$

soit en posant $x = \frac{\sin \alpha}{\sigma_i \sqrt{2}}$

$$\frac{8\sigma_i}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2}}} \exp(-x^2) dx \int_0^{\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2}} \sqrt{1-x^2}} \exp(-y^2) dy$$

$$= \frac{8\sigma_i}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2} \iint_{\Delta} \exp(-x^2 - y^2) dx dy \quad \text{où } \Delta \text{ est le premier qua-}$$

drant du cercle de centre 0, rayon $\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2}}$. En intégrant en coordonnées polaires il vient :

$$A(\sigma_i) = 2\sqrt{2\pi} \sigma_i \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2}\right)\right)$$

La somme des premier, second, et troisième terme se réduit alors à :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_2^2}\right) - \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}\right)\right) \\ & - \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\right) \end{aligned} \right.$$

soit :

$$\frac{1}{2\pi} \left[\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_2^2}\right) \right] = K$$

b) - Le dernier terme :

Compte tenu du changement de signe de certains termes si α change en $\alpha + \pi$ il reste :

$$I = \frac{1}{8\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \psi) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\cos\alpha}{\sigma_1\sqrt{2}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\cos(\alpha + \psi)}{\sigma_2\sqrt{2}}\right) + 1 \right] \exp\left(-\frac{\sin^2\alpha}{2\sigma_1^2} - \frac{\sin^2(\alpha + \psi)}{2\sigma_2^2}\right) d\alpha$$

et nous avons $\Pi = K + I$

c) - Calcul de J

Nous allons chercher à évaluer $\int_{\psi_1}^{\psi_2} \Pi d\psi$

Il vient $K(\psi_2 - \psi_1) + \int Id\psi$

Or I se décompose en deux termes et compte tenu de ce que la longueur de l'intervalle d'intégration est π (d'après la position des frontières de décision) et de ce que la fonction

$$\cos\alpha \operatorname{erf}\left(\frac{\cos\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{\sin^2\alpha}{2\sigma^2}\right) \text{ a pour période } \pi$$

le premier terme de I (dans l'ordre de la formule du b) se calcule très aisément et vaut :

$$\frac{1}{8\pi\sigma_1\sigma_2} A(\sigma_1) A(\sigma_2)$$

Ce terme s'additionne à K déjà calculé et il reste seulement $\frac{1}{2}$.

Il nous reste donc :

$$J = \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha \exp\left(-\frac{\sin^2\alpha}{2\sigma_1^2}\right) \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos(\alpha + \psi) \exp\left(-\frac{\sin^2(\alpha + \psi)}{2\sigma_2^2}\right) d\psi d\alpha$$



Compte tenu que dans notre étude, ψ_2 est de la forme $\psi_1 + \pi$ il reste pour le second terme :

$$\frac{1}{8\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha \exp\left(-\frac{\sin^2 \alpha}{2\sigma_1^2}\right) \left[\int_{\alpha+\psi_1}^{\alpha+\psi_1+\pi} \cos \theta \exp\left(-\frac{\sin^2 \theta}{2\sigma_2^2}\right) d\theta \right] d\alpha$$

On effectue dans l'intégrale en θ un changement de variable $u = \frac{\sin \theta}{\sigma_2 \sqrt{2}}$ et il vient sans difficulté :

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{8\pi\sigma_1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha \exp\left(-\frac{\sin^2 \alpha}{2\sigma_1^2}\right) \operatorname{erf} \frac{\sin(\alpha+\psi_1)}{\sigma_2 \sqrt{2}} d\alpha$$

L'intégrale (en omettant pour l'instant le coefficient numérique) peut s'écrire :

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \exp\left(-\frac{\sin^2 \alpha}{2\sigma_1^2}\right) \left(\int_0^{\frac{\sin(\alpha+\psi_1)}{\sigma_2 \sqrt{2}}} \exp(-y^2) dy \right) d\alpha$$

car la fonction à intégrer est de période π .

Soit encore en faisant le changement de variable :

$$\alpha \longrightarrow x = \sin \alpha$$

et en réintégrant les constantes :

$$C = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right) \left(\int_0^{\sin(\alpha+\psi_1)} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}\right) dy \right) dx$$

Examinons le domaine d'intégration. Pour chaque x , y varie de 0 à $\sin(\alpha+\psi_1)$ qui s'écrit, compte tenu de la définition de x :

$$x \cos \psi_1 + \sqrt{1-x^2} \sin \psi_1$$

La courbe d'équation $y = x \cos \psi_1 + \sqrt{1-x^2} \sin \psi_1$ est un arc de l'ellipse d'équation :

$$x^2 - 2xy \cos \psi_1 + y^2 = \sin^2 \psi_1$$

centrée en 0 et inscrite dans le carré limité par les droites $x = \pm 1, y = \pm 1$.

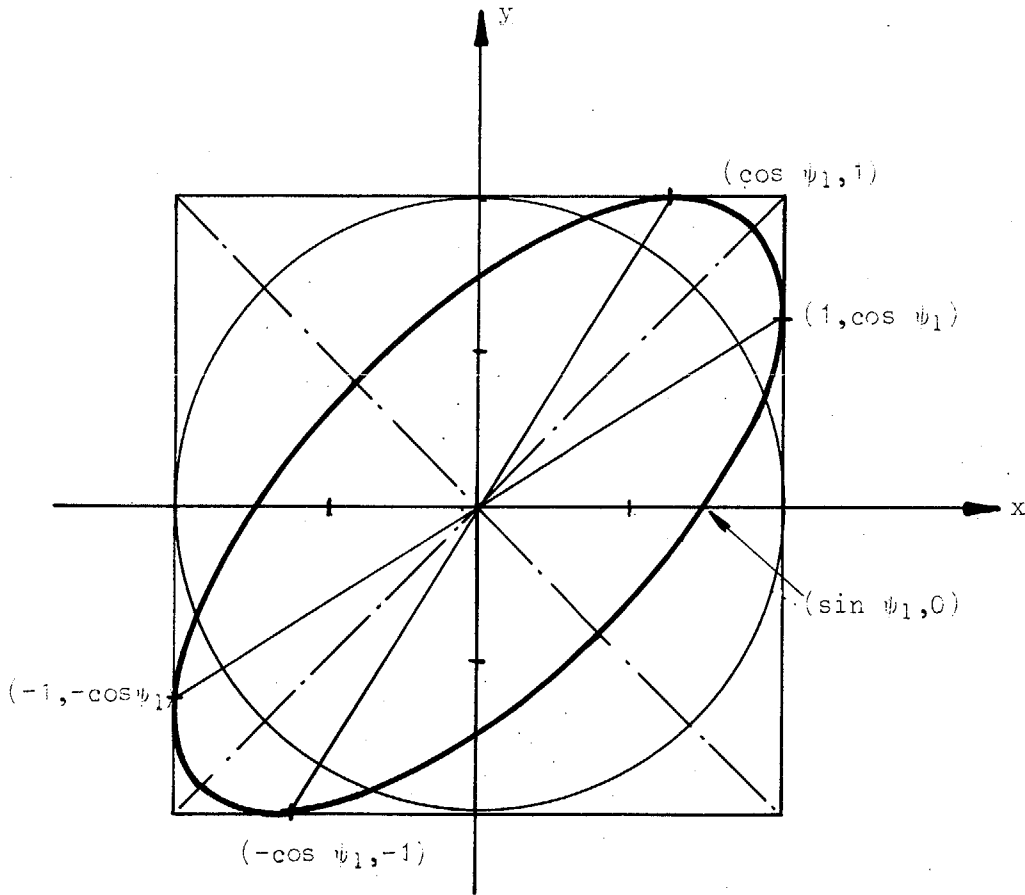


FIGURE 6

Nous allons maintenant regarder en fonction de la valeur de l'angle ψ_1 , comment se présente l'arc d'ellipse qui limite le domaine d'intégration, et par là même quel est ce dernier (figure 7 ci-dessous). Soit Δ le diamètre passant par les points de contact avec les droites $x = 1$ et $x = -1$.



$0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2}$ il s'agit de la demi-ellipse située au dessus de Δ
 $-\frac{\pi}{2} < \psi_1 < 0$ " " " " en dessous de Δ
 $\frac{\pi}{2} < \psi_1 < \pi$ " " " " au dessus de Δ
 $\pi < \psi_1 < \frac{3\pi}{2}$ " " " " au dessous de Δ

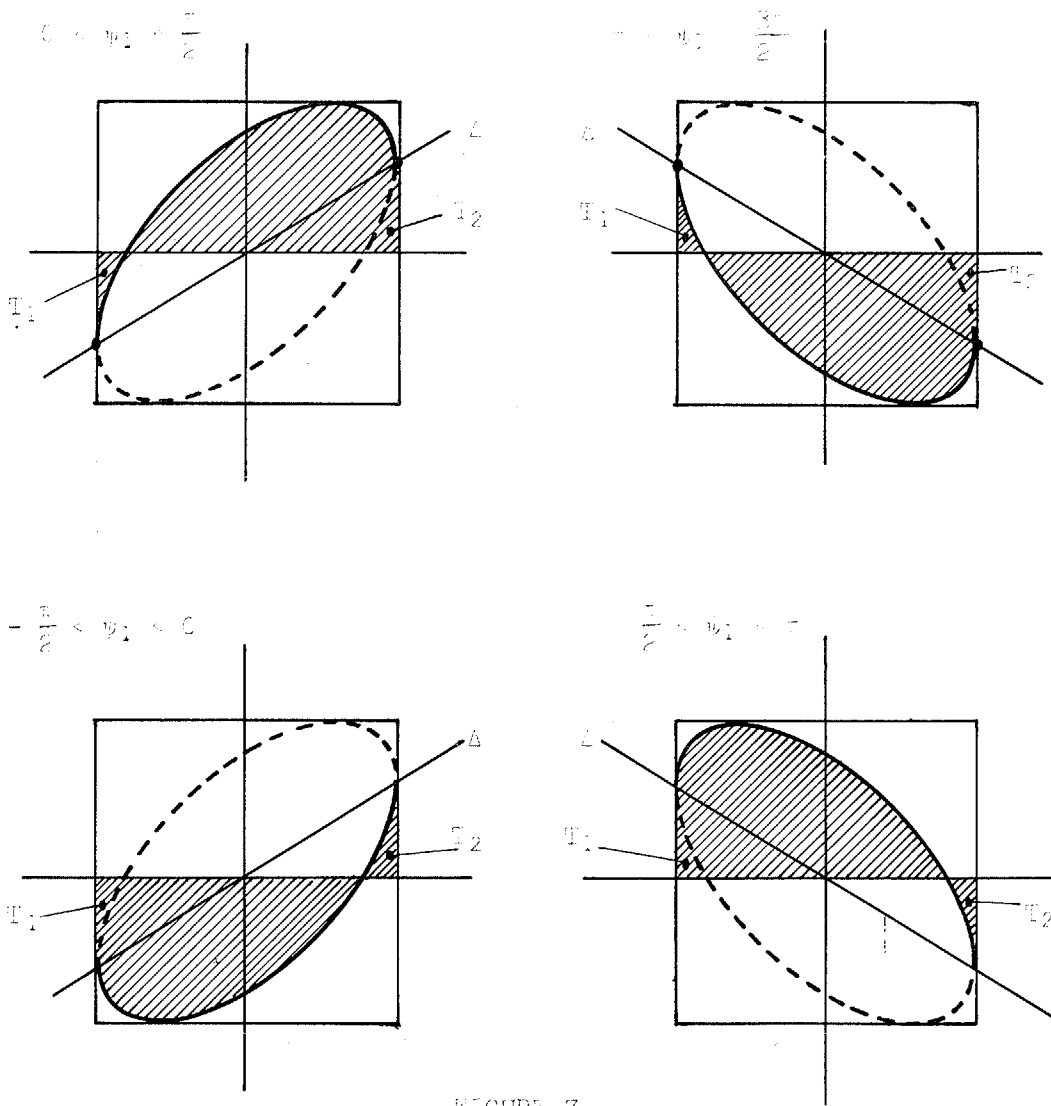


FIGURE 7



On en déduit alors :

$$C = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \iint_{E_1} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{y^2}{2\sigma_2^2}\right) dx dy$$

où E_1 est le domaine quadrillé dans les figures ci-dessus.

On remarquera que les contributions des triangles curvilignes T_1 et T_2 s'annulent et il reste :

$$C = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \iint_E \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{y^2}{2\sigma_2^2}\right) dx dy$$

où E est la demi-ellipse située suivant le cas, au dessus ou au dessous de l'axe Ox .

L'intégrale s'évalue alors par passage en coordonnées elliptiques $x = \lambda\sigma_1 \cos \xi$ $y = \lambda\sigma_2 \sin \xi$

$$dx dy = \begin{vmatrix} \sigma_1 \cos \xi & -\lambda\sigma_1 \sin \xi \\ \sigma_2 \sin \xi & \lambda\sigma_2 \cos \xi \end{vmatrix} d\lambda d\xi = \lambda\sigma_1\sigma_2 d\lambda d\xi$$

. Il vient alors dans le cas où le domaine est le domaine supérieur

$$C = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\xi \int_0^{\lambda_1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) \lambda d\lambda$$

où λ_1 est la valeur de λ sur le contour de l'ellipse soit :

$$\lambda_1^2 = \frac{\sin^2 \psi_1}{\sigma_1^2 \cos^2 \xi - 2\sigma_1\sigma_2 \cos \psi_1 \sin \xi \cos \xi + \sigma_2^2 \sin^2 \xi}$$

L'intégration en λ est immédiate et il reste :

$$J = \frac{1}{2} - C \text{ soit}$$



$$J(\sigma_1, \sigma_2, \psi_1, \psi_1 + \pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{2}\right) d\xi$$

Et on écrira (avec une petite modification de bornes vu que $\lambda_1^2(\xi)$ est de période π)

$$J(\sigma_1, \sigma_2, \psi_1, \psi_1 + \pi) = F(\sigma_1, \sigma_2, \psi_1)$$

avec :

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{-\sin^2 \phi}{2(\sigma_1^2 \cos^2 \xi - \sigma_1 \sigma_2 \sin 2\xi \cos \psi_1 + \sigma_2^2 \sin^2 \xi)}\right) d\xi$$

Dans le cas où le domaine utile est le domaine inférieur, nous avons :

$$J(\sigma_1, \sigma_2, \psi_1, \psi_1 + \pi) = 1 - F(\sigma_1, \sigma_2, \psi_1)$$

car dans ce cas il faut intégrer sur ξ variant de π à 0 et l'intégrale C change de signe.

4°) - Expression de la probabilité d'erreurs sur le canal

Dans le cas où l'angle δ ne dépasse pas $\frac{\pi}{4}$ en valeur absolue, c'est-à-dire où l'effet de filtrage seul ne déforme pas la phase au point de causer un franchissement de la frontière de décision en l'absence de bruit, ψ_1 qui est de la forme $\frac{\pi}{4} + \delta$ ou $\frac{3\pi}{4} + \delta$ reste compris entre 0 et π et le domaine utile de l'ellipse est le domaine supérieur. La probabilité d'erreur est donc donnée par :

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \delta) \text{ ou } F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{3\pi}{4} + \delta) \text{ suivant le cas.}$$

Si l'on remarque que la fonction F vérifie $F(\sigma_1, \sigma_2, \phi) = F(\sigma_1, \sigma_2, \pi - \phi)$ (il suffit de faire le changement de variable de ξ en $-\xi$) la quantité $F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{3\pi}{4} + \delta)$ s'écrit aussi $F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} - \delta)$



Les taux d'erreurs sont :

	0	$\pi/2$	π	$-\pi/2$
VOIE A	$F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} - \delta)$	$F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \delta)$	$F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} - \delta)$	$F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \delta)$
VOIE B	$F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \delta)$	$F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} - \delta)$	$F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \delta)$	$F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} - \delta)$

On obtient donc le taux d'erreurs sur chacune des 2 voies par :

$$P_e = \frac{1}{N} \left\{ \begin{array}{ll} \sum F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} - \varepsilon\delta) & \text{cas où} \\ \Delta\phi = 0 \text{ ou } \pi & \end{array} \right. \left. \begin{array}{ll} \sum F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \varepsilon\delta) & \text{cas où} \\ \Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2} & \end{array} \right\}$$

où N est le nombre de configurations (1024 dans notre cas) et où ε vaut + 1 pour la voie A, - 1 pour la voie B. Ces deux valeurs obtenues sont en général distinctes.

Remarque : Dans le cas où l'angle δ dépasse en valeur absolue $\frac{\pi}{4}$ alors la probabilité d'erreur sur la configuration est $1 - F(\sigma_1, \sigma_2, \frac{\pi}{4} + \varepsilon\delta)$.
C'est dans ce cas, le bruit qui peut éventuellement amener une décision correcte. Une telle situation ne se présente jamais sur un canal de transmission exploitable.

Conclusion

Cette méthode de calcul, utilisée dans un programme sur calculateur, a déjà été utilisée pour obtenir le taux d'erreurs avec divers modèles de filtres (filtre gaussien sans distorsion de temps de propagation de groupe). En effet, il existe un compromis entre les effets du bruit et ceux de l'interférence intersymboles :



un filtre large distord peu le signal mais coupe très peu le bruit, un filtre étroit au contraire le coupe énergiquement mais déforme beaucoup le signal.

Il faut donc déterminer les caractéristiques optimales de filtrage et nous allons maintenant indiquer quelques résultats, entre autres, obtenus à l'aide du programme.

EX - APPLICATION DE LA METHODE A UNE FAMILLE DE FILTRES

Nous avons par exemple recherché quelle est la bande passante à 3 décibels BT (en valeurs réduites) qui donne le meilleur taux d'erreurs, pour une famille de filtres gaussiens à phase linéaire (supposée sans restriction nulle) de gain :

$$G(\nu) = \exp \left(- 2 \log_e 2 \frac{\nu^2}{BZ} \right)$$

(il s'agit du gain du filtre passe-bas équivalent).

On trace les courbes donnant le taux d'erreurs en fonction du rapport C/N_0 de la puissance de la porteuse à la puissance de bruit blanc à l'entrée du filtre dans la bande de Nyquist. La dégradation minimale de ce rapport par rapport à la courbe théorique correspondant à l'équation :

$$P_e = F \left(\sigma, \sigma, \frac{\pi}{4} \right)$$

est obtenue pour $BT = 1,10$ environ. Nous donnons ci-dessous les valeurs du taux d'erreurs (dans ce cas, on montre qu'il est le même pour les 2 voies), dans le cas de la courbe théorique et dans celui d'un filtre gaussien sans distorsion de temps de propagation de groupe de bande passante à 3 décibels réduite 0,70, 1,10, 1,40 pour des valeurs de C/N_0 variant de 14 à 19 décibels.



C/N ₀ (dB)	14	15	16	17	18	19
Courbe Théorique	$0,7 \cdot 10^{-4}$	$0,9 \cdot 10^{-5}$	$0,7 \cdot 10^{-6}$	$0,3 \cdot 10^{-7}$	$0,7 \cdot 10^{-9}$	$0,5 \cdot 10^{-11}$
Gaussien						
BT = 0,70	$0,2 \cdot 10^{-2}$	$0,8 \cdot 10^{-3}$	$0,4 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-4}$	$0,2 \cdot 10^{-4}$
BT = 1,10	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,4 \cdot 10^{-4}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$	$0,4 \cdot 10^{-7}$	$0,1 \cdot 10^{-8}$
BT = 1,40	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-4}$	$0,3 \cdot 10^{-5}$	$0,2 \cdot 10^{-6}$	$0,9 \cdot 10^{-8}$

Des calculs ont été faits sur ce même filtre gaussien en introduisant des distorsions de phase ou de gain, linéaires, quadratiques, ou oscillatoires en vue de déterminer ce qui est tolérable en ce domaine.

Enfin des applications à des filtres réels de Butterworth ou Tcheytcheff ont permis des estimations théoriques afin de préparer le plan de fréquences du système de transmission sur guide d'ondes circulaire.