QUATRIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

METHODE ITERATIVE POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME POSE PAR LA SYNTHESE D'UN FILTRE NUMERIQUE TRANSVERSAL DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES

par Jean POUGET et Alain VINCENT-CARREFOUR

Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 190

Université de NICE

RESUME

On présente une nouvelle méthode itérative de synthèse des filtres transversaux en moyenne quadratique.

Bien que la phase soit inconnue, la méthode n'utilise que des résolutions de systèmes linéaires.

On démontre que l'algorithme conduit à une suite convergente de fonctions. Le résultat est identique à celui obtenu par les méthodes non linéaires classiques.

La méthode est plus simple et la mise en équations est plus rapide que les méthodes non linéaires classiques.

SUMMARY

A new mean-square-error iterative method for the transversal digital filters synthesis is developed in the frequency domain.

Although the phase is not known, the method uses linear equations and operates by successive substitutions.

It is proved that the algorithm converges to the same solution as the one given by the classical non-linear methods.

The method is simpler and quicker for the user than the classical non-linear ones.

METHODE ITERATIVE POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME POSE PAR LA SYNTHESE D'UN FILTRE NUMERIQUE TRANSVERSAL DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES

I - DESCRIPTION DU PROBLEME

I.1 - INTRODUCTION

Le traitement des signaux délivrés par les lignes de transmission conduit à réaliser des filtres numériques transversaux [1], dont la réponse en fréquence est une approximation d'une fonction donnée : c'est le problème classique de la synthèse d'un filtre dans le domaine des fréquences [4] [5] point de vue que nous adoptons ici.

La réponse en fréquence d'un filtre numérique transversal est de la forme :

$$P(\nu) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \, e^{-2\pi i n \nu T} \qquad (c_n \in \mathbb{R})$$

T : période d'échantillonnage

$\frac{1}{2T} = f_N$: fréquence de Nyquist

Nous avons donc une contrainte due à la réalité des coefficients c_n :

$$P(-\nu) = P^*(\nu)$$

L'amplitude $|P(\nu)|$ est une fonction $2 f_N$- périodique et paire ; la phase $\mathrm{Arg}\{P(\nu)\}$ est $2 f_N$- périodique et impaire.

Nous supposerons que la fonction donnée $G(\nu)$ que l'on souhaite approcher, a les mêmes propriétés de périodicité et de parité que $P(\nu)$ et nous nous limiterons à l'intervalle :

$$\nu \in [-f_N, f_N].$$

Pour résoudre le problème posé, il faut définir un critère d'approximation ; nous allons en préciser deux et proposer une variante qui conduit à un algorithme d'utilisation simple.

I.2 - SYNTHESE D'UN FILTRE DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES

1ère méthode (A) : on minimise un écart défini à partir de l'amplitude $|G(\nu)|$ de la réponse harmonique souhaitée et de l'amplitude $|P(\nu)|$ de la réponse du filtre numérique ; cet écart dépend de $2N+1$ paramètres réels et s'écrit :

$$d_A = \| \, |G(\nu)| - |P(\nu)| \, \|$$

$$= \sqrt{\int_{-f_N}^{f_N} \left[|G(\nu)| - \left| \sum_{n=-N}^{N} c_n \, e^{-2\pi i n \nu T} \right| \right]^2 W(\nu) \, d\nu}$$

où $W(\nu)$ est une fonction de poids positive et paire.

METHODE ITERATIVE POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME POSE PAR LA SYNTHESE D'UN FILTRE NUMERIQUE TRANSVERSAL DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES

Cette méthode conduit à la résolution numérique d'un système d'équations non linéaires ou à l'utilisation de méthodes d'optimisation d'une fonction non linéaire de 2 N+1 variables.

Elle a l'avantage de ne pas nécessiter la connaissance de la phase de la réponse harmonique $G(\nu)$, qui n'est pas indépendante de l'amplitude pour un filtre causal. Par contre, sa mise en oeuvre nécessite des programmes relativement importants.

<u>2ème méthode</u> (B) : on suppose la phase $\phi(\nu)$ de $G(\nu)$ connue et on définit la distance :

$$d_B = \| G(\nu) - P(\nu) \|$$

$$= \sqrt{\int_{-f_N}^{f_N} \left| G(\nu) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-2\pi i n \nu T} \right|^2 W(\nu)\, d\nu}$$

La recherche du minimum de d_B est un problème d'analyse numérique classique et conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires. Lorsque la fonction de poids est constante, le problème se ramène au calcul des (2 N+1) premiers coefficients de FOURIER de la fonction périodique $G(\nu)$.

L'avantage pratique est évident : les programmes sont simples et le temps de calcul beaucoup plus court.

<u>Variante proposée</u> (méthode C) [5]

Nous proposons une méthode itérative ne supposant pas la connaissance préalable de la phase $\phi(\nu)$ de la fonction $G(\nu)$, utilisant à chaque itération les avantages de la méthode (B) (équations linéaires) et conduisant au même résultat que la méthode (A). L'algorithme obtenu est plus simple à mettre en oeuvre que la méthode (A).

I.3 - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

Posons $\rho(f) = |G(f)|$ donné.

1°/ On choisit une phase $\phi_0(f)$, $2 f_N$- périodique et **impaire**, indépendante ou non de $\rho(f)$, ce qui définit une réponse harmonique $\rho(f)\, e^{j\phi_0(f)}$ qui n'est pas nécessairement celle d'un filtre causal.

2°/ La méthode (B) qui minimise la distance d_B conduit à un filtre numérique $|P_1(f)|\, e^{j\phi_1(f)}$, $\phi_1(f)$ étant évidemment une fonction $2 f_N$- périodique et impaire.

3°/ On utilise $\phi_1(f)$ pour définir une réponse harmonique $\rho(f)\, e^{j\phi_1(f)}$. On résout à nouveau par la méthode (B) et on calcule la phase du filtre numérique obtenu...

METHODE ITERATIVE POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME POSE
PAR LA SYNTHESE D'UN FILTRE NUMERIQUE TRANSVERSAL
DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES

On opère ainsi par itérations successives, c'est-à-dire qu'au kième pas, on calcule le filtre numérique $|P_K(f)|e^{j\phi_K(f)}$ par la méthode (B) et à partir de la réponse harmonique $\rho(f)\ e^{j\phi_{K-1}(f)}$:

$$|P_K(f)|\ e^{j\phi_K(f)} = \sum_{n=-N}^{N} c_n^{[K]}\ e^{-j2\pi nfT}$$

4°/ Nous allons montrer dans la suite de l'exposé que le filtre $P_\infty(f) = |P_\infty(f)|\ e^{j\phi_\infty(f)}$ minimise l'écart d_A.

II - FORMULATION MATHEMATIQUE

II.1 - POSITION DU PROBLEME

Considérons l'espace de HILBERT $V : L^2([a,b], \mu(\nu))$ des fonctions de carré sommable et à valeurs complexes ; $\mu(\nu)$ est une mesure réelle positive.

Nous noterons :

$$\begin{cases} \|f\|^2 = \int_a^b |f(\nu)|^2\, d\mu(\nu) \\ (f, g) = \int_a^b f(\nu)\, g^*(\nu)\, d\mu(\nu) \end{cases}$$

Considérons l'ensemble convexe $A_\rho \subset V$ défini par :

$$\begin{cases} \rho(\nu) \in V \\ \rho(\nu) \text{ à valeurs réelles positives} \\ A_\rho : \{ f \ / \ f(\nu) \leqslant \rho(\nu) \} \end{cases}$$

Considérons enfin le sous-espace E_ϕ de V, de dimension 2 N+1, engendré par les fonctions de base ϕ_n (n = -N, ..., +N)

Dans l'exemple proposé :

$a = -f_N$; $b = f_N$; $d\mu(\nu) = W(\nu)\, d\nu$ $\qquad (W(\nu) = W(-\nu))$

$\rho(\nu) = |G(\nu)|$ amplitude de la fonction à optimiser.

$\phi_n = e^{-2\pi i n\nu T}$

E_ϕ : ensemble de toutes les réponses en fréquences possiblespour un filtre numérique transversal.

METHODE ITERATIVE POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME POSE PAR LA SYNTHESE D'UN FILTRE NUMERIQUE TRANSVERSAL DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES

Problème 1 (méthode A)

On se donne une fonction à valeurs réelles positives $\rho \in V$; trouver $u \in E_\phi$ telle que :

$$u = \sum_{n=-N}^{N} a_n \phi_n \qquad \text{(noté } \sum_n a_n \phi_n\text{)}$$

$$\| \rho - |u| \| = \operatorname*{Inf}_{\alpha_n} \| \rho - | \sum_n \alpha_n \phi_n | \|$$

Problème 2 (méthode B)

On se donne une fonction à valeurs complexes $f \in V$ trouver $v \in E_\phi$ telle que :

$$v = \sum_n b_n \phi_n$$

$$\| f - v \| = \operatorname*{Inf}_{\beta_n} \| f - \sum_n \beta_n \phi_n \|$$

Ce problème admet une solution unique, qui est la projection orthogonale de f sur E_ϕ.

Problème 3 (méthode C)

On se donne une fonction à valeurs réelles positives $\rho \in V$; trouver $w \in E_\phi$ et $f \in V$ telles que :

$$\begin{cases} w = \sum_n c_n \phi_n \\ |f| = \rho \\ \| f - w \| = \operatorname*{Inf}_{\gamma_n \text{ et } |g| = \rho} \| g - \sum_n \gamma_n \phi_n \| \end{cases}$$

$\| f - w \|$ représente donc la distance de E_ϕ à A_ρ

II.2 - THEOREME D'EXISTENCE

Etant donné une fonction à valeurs réelles positives $\rho \in V$, il existe au moins une fonction $u \in E_\phi$ telle que :

$$\| \rho - |u| \| = \operatorname*{Inf}_{\alpha_n} \| \rho - | \sum_n \alpha_n \phi_n | \|$$

En général, cette solution n'est pas unique.

La démonstration se fait de façon classique en utilisant le lemme suivant que nous admettrons [2] :

Lemme L'ensemble des fonctions réelles positives

$\psi = \left| \sum_n \alpha_n \phi_n \right|$ telles que :

$\phi_n \in E_\phi$ et $\| \psi \| \leqslant M \quad (0 < M < \infty)$

est compact.

Considérons donc une suite $\{\psi_\ell\}$ telle que :

$$\psi_\ell = \sum_n \alpha_{n_\ell} \phi_n \in E_\phi$$

telle que $\lim_{\ell \to \infty} \| \rho - |\psi_\ell| \| = \operatorname{Inf}_{\alpha_{n_\ell}} \| \rho - |\psi_\ell| \|$

Il en résulte que :

$$\| \psi_\ell \| \leqslant \| \rho \| + \| \rho - |\psi_\ell| \| \leqslant \| \rho \| + A = M$$

donc $\| \psi_\ell \|$ est borné.

D'après le lemme, on peut en extraire une sous-suite $\{\psi_\ell^j\}$ convergeant fortement vers une fonction $u \in E_\phi$ telle que :

$$\| \rho - |u| \| = \operatorname{Inf}_{\alpha_n} \| \rho - \left| \sum_n \alpha_n \phi_n \right| \|$$

II.3 - THEOREME 2

Toute solution du problème 1 est solution du problème 3 et réciproquement.

Considérons une solution $u \in E_\phi$ du problème 1. Soit $r \in V$ telle que :

$$f = \rho \cdot r \qquad (|r| = 1 \; ; \; f \in V)$$

où f est solution du problème 3. Posons :

$$u' = |u| \, r.$$

Nous pouvons écrire :

$$\| f - u' \| = \| \rho \, r - |u| \, r \| = \| \rho - |u| \|$$

Considérons une solution w au problème 3 ; on a :

$$\| f - w \| \leqslant \| f - u' \| \qquad (w \in E_\phi)$$

d'où :

$$\| f - w \| \leqslant \| \rho - |u| \| \tag{1}$$

D'autre part, considérons la fonction $t \in V$ définie par :

$$w = |w| \cdot t \qquad (|t| = 1)$$

Nous pouvons écrire :

$$||f - w|| = || \rho\, r - |w|\, t || = || \rho\, r\, t^* - |w| ||$$

De l'inégalité classique entre le module de la différence de deux nombres complexes a et b et la différence des modules, $| a - b | \geqslant | \; |a| - |b| \; |$, on déduit :

$$|| f - w || \geqslant || \rho - |w| \, || \geqslant || \rho - |u| \, || \qquad (2)$$

car u est solution du problème 1.

Des relations (1) et (2), il résulte :

$$|| f - w || = || \rho - |w| \, || = || \rho - |u| \, ||$$

donc <u>w est solution du problème 1</u> et <u>u est solution du problème 3</u>.

III - <u>ALGORITHME DE DETERMINATION D'UNE SOLUTION DU PROBLEME 3. JUSTIFICATION DE LA CONVERGENCE</u>

On part d'une fonction $f_0 \in V$ définie par $|f_0| = \rho$ et, d'une façon générale, on considère les fonctions $v_K \in E_\phi$ et $f_K \in V$ telles que :

$$\begin{cases} | f_K | = \rho \\ v_K = \mathrm{proj}_{E_\phi} f_K \\ f_{K+1} = \mathrm{proj}_{A_\rho} v_K \end{cases} \qquad \text{(problème 2)}$$

On peut montrer que cette dernière hypothèse est équivalente à :

$$\mathrm{Arg}\ (f_{K+1}) = \mathrm{Arg}\ (v_K)$$

Les deux ensembles A_ρ et E_ϕ sont deux convexes fermés de V.

Si on désigne par P_E et P_A les opérateurs de projection respectivement pour E_ϕ et A_ρ, c'est à dire les opérateurs qui, à tout $u \in V$ associent :

1°/ $v = P_E\, u = \mathrm{Proj}_{E_\phi}\, u$

2°/ $w = P_A\, u = \mathrm{Proj}_{A_\phi}\, u$

On peut leur associer l'opérateur $Q = P_E\, P_A$.

La convergence des suites f_K et v_K précédentes est assurée par application du théorème suivant [3] :

THEOREME 3 :

Soient K_1 et K_2 deux convexes fermés d'un espace de HILBERT et Q l'opérateur composé $P_1\, P_2$ de leurs opérateurs de projection. Pour v arbitraire dans K_1, la convergence de la suite $\{ Q^n v \}$ est assurée lorsque :

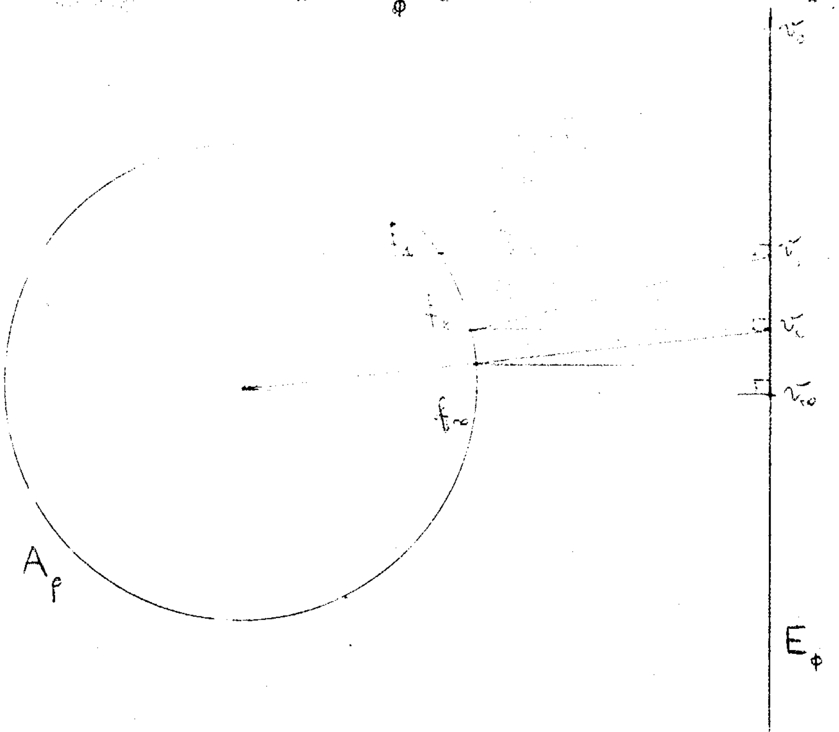
a) un des ensembles est compact

ou

b) un des ensembles est un sous-espace de dimension finie ; la distance entre les deux convexes est atteinte.

ANALOGIE GEOMETRIQUE

L'interprétation des résultats précédents peut être donnée sous forme géométrique en schématisant le convexe A_ρ par un cercle et le sous-espace E_ϕ par une droite dans le plan.



IV - APPLICATION

Cet algorithme a fait l'objet d'une simulation sur ordinateur IBM 360/50 au Centre d'Etudes et de Recherches d'IBM à LA GAUDE.

Des essais ont été effectués sur un filtre coupe-bande et sur un filtre passe-bas et ont permis de véfifier :

1. l'identité des résultats avec ceux obtenus par une méthode classique (méthode de FLETCHER et POWEL).

2. la facilité de mise en oeuvre et la rapidité de la convergence.

Les auteurs tiennent à remercier Monsieur NUSSBAUMER, de la Compagnie IBM - France (LA GAUDE) qui a fourni les moyens de travail.

Ils remercient également Monsieur A. DESBLACHE et Monsieur D. ESTEBAN pour l'aide importante qu'ils ont bien voulu leur apporter.

BIBLIOGRAPHIE

1 - ROBINSON E.A. et TREITEL S. , "Principles of digital filtering" , Geophysics, 1964, vol.29, pp 395-404.

2 - LORENTZ (G.G.) , "Approximation of functions", Rinehart & Winston Coop, 1966.

3 - GOLDSTEIN Allen A., "Constructive real analysis", Harper & Row, N.Y., Evanston & London, 1967 (pp 98-102).

4 - GOLD B. et RADER C.M. , "Digital processing of signals", McGraw-Hill Book Co, 1969.

5 - VINCENT-CARREFOUR A. , BOERI F. , DUBUS F. et ESTEBAN D. , "Synthèse d'un filtre numérique transversal défini dans le plan complexe" - à paraître prochainement aux Annales des Télécommunications.
