COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

MODELISATION DE SIGNAUX CONTINUS ET CARACTERISATIONS DISCRETES

TRANSFORMATION DE LAGUERRE

Claude A. BOZZO

DCAN de TOULON
GESTA/CAPCA

RESUME

Le recours de plus en plus fréquent aux méthodes numériques pour la résolution de problèmes d'Automatique, de Filtrage et de Traitement du Signal, impose pour tout système physique dont on a déterminé une caractérisation continue (ou modèle ; par exemple système d'équations différentielles) d'élaborer une représentation discrète. Dans de nombreuses applications les entrées et les sorties du processus sont des signaux continus, mais le traitement est effectué sous forme digitale. Ceci implique que l'entrée soit représentée par une séquence et qu'une fois cette séquence traitée, la sortie soit reconvertie en un signal continu.

La méthode la plus connue, quand le signal continu est à bande limitée, pour lui associer une séquence, (c'est-à-dire un signal discret) consiste à l'échantillonner dans le domaine temporel et avec une période fixe en faisant correspondre à ce signal la suite des échantillons. Cette transformation n'est pas la seule qui permette de faire correspondre une séquence à une fonction continue du temps.

Dans cette communication une classe particulière de représentation des signaux continus est introduite et analysée. On montre également qu'il existe dans le domaine discret une classe analogue de transformations permettant de représenter une séquence discrète donnée par une autre séquence discrète.

Ces deux classes de transformations sont caractérisées par des substitutions de variables (p ou z) qui, dans certains cas, sont très simples et s'appuient sur l'exploitation des propriétés de certaines bases de fonctions et en particulier des bases de LAGUERRE continues ou discrètes.

SUMMARY

In processing continuous-time signal by digital means, it is necessary to represent the signal by a digital sequence. In many applications, the input and output of the system are continuous time signals but the processing is digital. In such cases the input must be represented by a sequence and after this sequence is processed, the output sequence must then be reconverted to a continuous time signal.

The most common procedure, when the continuous time signal is band limited is to choose the sequence values to be samples of the continuous time function equally spaced in time. This representation (periodic sampling) is however one of the ways in which a continuous time function can be represented by a sequence.

In this paper a class of representations of continuous time functions by sequences is introduced. It is also shown that a parallel notion may be developed : the representation of a sequence by other sequences.

These two classes of representations are equivalent to substitutions of variables (p or z). Some of the transformations introduced are based on the use of bilinear transformations related to the notion of LAGUERRE basis (Continuous or discrete representations).

MODELISATION DE SIGNAUX CONTINUS
ET CARACTERISATIONS DISCRETES

TRANSFORMATION DE LAGUERRE

1. - INTRODUCTION

Bien que l'origine des travaux sur les représentations discrètes de signaux soit relativement ancienne puisque les publications classiques de WIENER [1] et de Y.W LEE [3] datent des années 1930-1935, c'est à partir de 1965 que l'étude de cette classe de transformations s'est développée aux Etats Unis avec les travaux remarquables de K. STEIGLITZ [6] à [9], de L.P. BOLGIANO [21] à [24] et de A.V. OPPENHEIM [19] .

K. STEIGLITZ s'est plus particulièrement intéressé aux bases de LAGUERRE continues et a étudié un isomorphisme entre l'espace des signaux continus et l'espace des signaux discrets ainsi que son application à l'analyse spectrale.

L.P BOLGIANO a développé la notion de transformée de POISSON et a montré qu'elle permettait de passer du produit de convolution continu au produit de convolution discret.

A.V OPPENHEIM dans un article très connu [19] a généralisé les notions introduites par les professeurs BOLGIANO et STEIGLITZ et analysé les propriétés des transformations équivalentes dans le domaine discret.

Parallèlement un certain nombre de recherches étaient effectuées en France dans le même domaine par C. BOZZO [10] à [14], R. GENIN et L.C CALVEZ [27] à [30] (Université de Brest), J. RAGOT et M. ROESCH [15] et [16] (Université de Nancy), G. BORGET et P. FAURE (EDF) [25] et enfin J.P SAGASPE [17] (Université de Bordeaux)

A partir des travaux de K. STEIGLITZ, C. BOZZO introduit et définit la transformée de LAGUERRE (transformée en ζ), en étudie les principales propriétés et les applique à des problèmes de caractérisation, de commande et d'identification. J. RAGOT et M. ROESCH reprenant la même définition, traitent des problèmes d'identification [15] dans le domaine déterministe et, plus récemment [16], dans le domaine stochastique. M. ROESCH effectue d'autre part, une étude complète des propriétés de la transformée de LAGUERRE discrète.

J.P. SAGASPE généralise l'application de la transformation de LAGUERRE à certaines classes de systèmes non linéaires et développe des résultats originaux.

G. BORGET et P. FAURE analysent [25] les propriétés des fonctions de LAGUERRE dans le cadre du problème de caractérisation des fonctions de corrélation des processus stationnaires. L.C. CALVEZ [30] traite de façon très complète les propriétés de la transformation en z et des fonctions de LAGUERRE continues généralisées.

La communication présentée comporte des résultats qui apparaissent déjà dans d'autres articles ou rapports techniques. Il nous a cependant semblé souhaitable de faire en langue Française une synthèse sommaire des travaux effectués depuis une dizaine d'année en y associant certains résultats obtenus par l'auteur.

On présente dans une première partie certaines définitions générales sur les signaux continus et les signaux discrets, puis l'on étudie successivement le cas des transformations continues, et enfin celui des transformations discrètes.

2. - NOTION DE SIGNAL CONTINU ET DE SIGNAL DISCRET DETERMINISTES

2.1 - Définition

Soit $L^2\ [-\infty,\infty]$ l'espace de HILBERT des fonctions de LEBESGUE mesurables $f(t)$ d'une variable t de valeurs complexes et de carré intégrable.

L^2 est considéré comme l'espace des signaux du temps continus. L'espace de HILBERT l^2 des séquences de nombres complexes $[f_n]_{n=-\infty}^{+\infty}$ de carré sommable sera considéré de la même manière comme l'espace des signaux discrets.

Une fonction dans L^2 et une séquence de nombres dans l^2 seront appelés respectivement signal continu et signal discret.

2.2 - Transformation de FOURIER et espace $\mathbf{z}\ l^2$

2.21 - Espace $\mathbf{P}\ L^2$

La transformation de FOURIER appliquée à un signal appartenant à $L^2(-\infty,\infty)$ donne un signal appartenant à un autre espace L^2 que nous appellerons domaine des transformées de FOURIER et que nous noterons $\mathbf{P}\ L^2(-\infty,\infty)$.

Théorème 1 (PLANCHEREL). Si $f_R(t) \in L^2(-\infty,\infty)$ alors :

$$(1)\quad F(p) = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(t)\ e^{-pt}\ dt$$

existe pour $p = j\omega \in L^2(-\infty,\infty)$ et

$$(2)\quad \langle f, f\rangle = \int_{\infty}^{\infty} |f(t)|^2\ dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |F(p)|^2\ dp$$

avec $f(t) = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-jR}^{jR} F(p)\ e^{pt}\ dp \qquad (3)$

L'extension de $F(j\omega)$ à l'ensemble du plan en p quand elle existe, constitue la transformée de LAPLACE bilatérale.

Théorème 2 (PARSEVAL) : Si $f(t)$ et $g(t) \in L^2(-\infty,\infty)$ alors

$$(4)\quad \langle f,g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ g_*(t)\ dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(p)\ G_*(p)\ dp$$

2.22 - Espace $\mathbf{z}l^2$ - soit $[f_n]$ une séquence de nombres appartenant à l^2

Théorème 3 (RIESZ-FISCHER) : Si $[f_n] \in l^2$ alors

$$(5)\quad F(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f_n z^{-n}$$ existe pour $z = e^{j\omega T}$ et $F[e^{j\omega T}] \in L^2[0,2\pi/T]$

où ω est la variable indépendante de $L^2[0,2\pi/T]$. De plus

$$(6)\quad \langle [f_n],[f_n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma |F(z)|^2 \frac{dz}{z}$$ avec

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma F(z)\ z^n \frac{dz}{z}$$ les intégrales étant prises autour du cercle unité dans le plan en z.

Théorème 4 (PARSEVAL) : Si $[f_n]$ et $[g_n]$ appartiennent à l^2, alors

$$(7)\quad \langle [f_n],[g_n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_n)(g_n)_* = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)\ G_*(z) \frac{dz}{z}$$

* dénotant, comme dans le théorème 2, la conjugaison $(p \to -p,\ z \to z^{-1})$. Nous appellerons $\mathbf{z}l^2$ l'espace des transformées en z des signaux discrets.

Comme dans le cas continu, l'extension de $F[e^{j\omega T}]$ au reste du plan en z constitue la transformée en z bilatérale de $[f_n]$.

Notons que les variables ω et z ne sont pas en général reliées aux variables ω du plan de LAPLACE et Z de la transformée associée à la théorie des systèmes échantillonnés

3. - ETUDE DU CAS DES SIGNAUX CONTINUS [19]

3.1 - Etude du développement d'un signal f(t) sur une base de fonctions $\Phi(t)$ linéairement indépendantes

3.11 - Convolution continue - convolution discrète

Un filtre linéaire stationnaire est décrit par l'intégrale de convolution reliant l'entrée x(t) à la sortie y(t) et faisant intervenir la réponse impulsionnelle g(t).

(8) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \triangleq x(t) * g(t)$

Soient $[x_n]$, $[y_n]$ et $[g_n]$ les représentations discrètes de x(t), y(t) et g(t).

$[x_n]$, $[y_n]$ et $[g_n]$ doivent correspondre respectivement à l'entrée, la sortie et la réponse impulsionnelle d'un filtre discret stationnaire $[y_n]$étant la convolution de $[x_n]$ par $[g_n]$

(9) $y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, g_{n-k} \triangleq x_n * g_n$

L'équation (9) est vérifiée si, et seulement si la représentation d'une fonction continue est linéaire.

(10) Si $f(t) = f_1(t) + \alpha\, f_2(t)$

(11) alors $f_n = f_{1n} + \alpha\, f_{2n}$

3.12 - Analyse des propriétés de la base $\Phi(t)$

Soit une base $\Phi(t)$ de fonctions linéairement indépendantes et telle que, à la fonction $\Phi_n(t)$ soit associée dans la représentation considérée, la séquence $[\delta_{i-n}]$ avec :

(12) $[\delta_{i-n}] = [o, o, o \ldots, 1, o, o \ldots]$

(13) $\delta_{i-n} = o$ sauf pour $i = n$ et donc $\delta_o = 1$

Une séquence quelconque $[f_i]$ peut toujours se représenter sous la forme :

(14) $f_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, \delta_{i-n}$

et la fonction $\underline{f}(t)$ correspondant à $[f_i]$ par

(15) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, \Phi_n(t)$ en tenant compte de la propriété de linéarité.

Cette décomposition est unique puisque les $\Phi(t)$ sont linéairement indépendantes.

En appliquant la transformation de LAPLACE, il vient :

(16) $F(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, \Phi_n(p)$

et en appliquant donc cette relation à chacun des termes du produit de convolution (8)

(17) $Y(p) = G(p)\, X(p)$

(18) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n\, \Phi_n(p) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, g_r\, \Phi_r(p)\, \Phi_k(p)$

Soit en effectuant le changement de variable n=r+k dans le deuxième membre de (18) et en tenant compte de l'expression (9) de y_n dans le premier, il revient

(19) $\boxed{\Phi_n(p) = \Phi_{n-k}(p)\, \Phi_k(p)}$

qui permet de déterminer une forme générale des fonctions $\Phi_n(p)$.

(20) $\boxed{\Phi_n(p) = [\Phi_1(p)]^n}$

Et donc pour une fonction f(t) appartenant à l'espace engendré par $\{\Phi(t)\}$

(21) $F_p(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \left\{[\Phi_1(p)]^{-1}\right\}^{-n}$

Soit $F_z(z)$ la transformée en z de la séquence $[f_n]$. Il vient:

(22) $z^{-1} = \Phi_1(p)$ c'est-à-dire :

(23) $z \triangleq T(p)$

La variable z s'exprime donc en fonction de la variable p. Cette propriété associée à la notion de substitution de variables n'est pas générale et constitue une classe particulière parmi les transformations permettant de passer du plan en p au plan en z.

Les conditions que doivent remplir les $\Phi_n(t)$ pour constituer une base complète, ont été analysées par K. STEIGLITZ [6].

3.2 - Etude de quelques exemples de transformations z=T(p)

3.21 - Analyse des transformations z=T(p) dans l'espace zl^2

On considère le développement (transformée en z bilatérale généralisée).

(24) $F^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, z^{-n}$

D'après un théorème classique :

(25) $f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma F^*_z(z)\, z^n \frac{dz}{z}$ $n = o, 1, 2 \ldots$

Soit encore

(26) $\boxed{f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{-j\infty}^{j\infty} \{F^*[T(p)]\}\{T(p)\}^{n-1} \frac{\partial T(p)}{\partial P}\, dp}$

Soit f(t) une fonction appartenant à $L^2[-\infty, \infty]$ et de transformée de LAPLACE bilatérale $F_p(p)$.

La transformation z=T(p) conservant le produit de convolution discret, il vient :

(27) $F^*[T(p)] \triangleq F_p(p)$

(28) $\Phi_n(p) \triangleq [T(p)]^{-n} = [\Phi_1(p)]^n$ avec :

(29) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, \Phi_n(t)$

et donc en appliquant le théorème de PARSEVAL à (26)

(30) $f_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi_n(t)\, dt$ avec :

(31) $\varphi_n(-p) = \{T(p)\}^{n-1} \frac{\partial T(p)}{\partial P}$

Soit encore :

(32) $\boxed{\varphi_n(-p) = [\Phi_n(p)]^{-1} \frac{T'(p)}{T(p)}}$ $T'(p) = \frac{\partial T(p)}{\partial P}$

Exemple (Transformées de LAGUERRE et de POISSON)

* Si $z = T(p) = \frac{1+p}{1-p}$

$\frac{T'(p)}{T(p)} = \frac{2}{(1-p)(1+p)}$

(33) $\begin{cases} \Phi_n(p) = \left[\frac{1-p}{1+p}\right]^n = z^{-n} \text{(cf.3.23a)} \\ \varphi_n(p) = \frac{1}{(1+p)(1-p)} \left[\frac{1-p}{1+p}\right]^n \end{cases}$

* Si $z = T(p) = \frac{1}{1-p}$

$\frac{T'(p)}{T(p)} = \frac{1}{1-p}$

(34) $\begin{cases} \Phi_n(p) = \left[\frac{1}{1-p}\right]^n = z^{-n} \\ \varphi_n(p) = \frac{1}{1+p}\left[\frac{1}{1+p}\right]^n \text{(cf.3.23d)} \end{cases}$

Remarque - Les résultats élaborés sont également valables pour les fonctions f(t) causales, les intégrales de la forme

(35) $\int_{-\infty}^{o} f(t)\ \Phi_n(t)\ dt$ étant nulles puisque $f(t) = o$ pour $t < o$

3.22 - Exemples de transformations bilatérales

a) λ-Transformation de LAGUERRE bilatérale et fonctions d'OPPENHEIM

On considère la transformation bilinéaire introduite par STEIGLITZ [6] et dont certaines propriétés ont été développées dans [11].

(36) $$\boxed{z = T(p) = \frac{\alpha + p}{\alpha - p}}$$

Cette transformation constitue un cas particulier (quand $\beta=2\alpha$) de la transformation de LAGUERRE ~~généralisée~~.

(37) $$z = T(p) = \frac{\alpha + p}{\beta - \alpha - p}$$

On retrouve également au signe près la L -Transformée de LAGUERRE (cf. 3.23c) pour $\alpha=o$ $\beta=1$.

En exploitant les théorèmes démontrés ci-dessus, il est aisé de montrer que cette transformation peut également être analysée sous l'aspect (38) de la décomposition d'une fonction $f(t) \in L^2\ [-\infty,\infty]$ suivant les termes d'une série de la forme

(38) $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\ \Phi_n(t)$$

avec (39) $$\Phi_n(p) = \left[\frac{\alpha + p}{\alpha - p}\right]^{-n}$$

b) - Détermination des fonctions $\Phi_n(t)$ - Fonctions de LAGUERRE

Fonctions de LAGUERRE

On considère (cf. Annexes I et II) les polynômes de LAGUERRE $L_n(t)$ et les fonctions de LAGUERRE.

(40) $$\lambda_n(t,\alpha) = (-1)^n \sqrt{2\alpha}\ e^{-\alpha t}\ L_n(2\alpha t) = \sqrt{2\alpha}\ \Lambda_n(t,\alpha)$$

en posant (41) $$\Lambda_n(t,\alpha) = (-1)^n\ e^{-\alpha t}\ L_n(2\alpha t)$$

Il vient, puisque $\mathscr{L}[L_n(t)] = L_n(p) = \frac{1}{p}\left[\frac{p-1}{p}\right]^n$

(42) $$[\lambda_n(t,\alpha)] = \lambda_n(p,\alpha) = (-1)^n\ \sqrt{2\alpha}\ \frac{(p-\alpha)^n}{(p+\alpha)^{n+1}}$$

Soit encore (43) $$\boxed{\lambda_n(p,\alpha) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha+p}\left(\frac{\alpha - p}{\alpha + p}\right)^n}$$

Les polynômes de LAGUERRE constituent une base de fonctions orthogonales dans $L^2\ [o,\infty]$ par rapport à la fonction densité $\alpha\ e^{-\alpha t}$. Il est donc aisé de montrer que les fonctions $\lambda_n(t,\alpha)$ constituent une base de fonction orthonormées sur $[o,\infty]$ (fonction densité 1).

Soit maintenant les fonctions [6], [11] et [15].

(44) $$\lambda_n^b(t,\alpha) \begin{cases} [\lambda_n^b(t,\alpha)]_+ = \lambda_{n-1}(t,\alpha) & \text{pour } n = 1,2,3\ \ldots \\ [\lambda_n^b(t,\alpha)]_- = \lambda_{-n}(-t,\alpha) & \text{pour } n = o,-1,-2\ \ldots \end{cases}$$

Les fonctions $[\lambda_n]_{n=1}^{\infty}$ constituent une base complète de fonctions orthonormées sur $[o,\infty]$.

Les fonctions $[\lambda_{-n}]_{n=o}^{\infty}$ constituent de même une base complète de fonctions orthonormées sur $[-\infty,o]$

avec $$\boxed{\lambda_n(p,\alpha) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha-p}\left[\frac{\alpha - p}{\alpha + p}\right]^n} \qquad (45)$$

Il est donc possible d'écrire

(46) $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\ \lambda_n\ (t,\alpha)$$

avec (47) $$f_n^{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_n(t,\infty)\ f(t)\ dt$$

On montre sans difficulté (cf. Annexe III) que si

(48) $$F_\lambda^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{\lambda}\ z^{-n} \qquad \boxed{F_\lambda^*(z) = \frac{\sqrt{2\alpha}\ z^{-1}}{1 + z^{-1}} F_p\left[\alpha\ \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right]}$$

alors $$\boxed{F_p^*(p) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha - p}\ F_\lambda^*\left[\frac{\alpha + p}{\alpha - p}\right] = F(p)} \qquad (49)$$

Les f_n^{λ} constituent le spectre de LAGUERRE de $f(t)$ et le produit intérieur étant conservé, on peut écrire :

(50) $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n^{\lambda}|^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} |F(p)|^2 dp$$
$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} |F_\lambda^*(z)|^2\ \frac{dz}{z}$$

c) Fonctions d'OPPENHEIM [19]

La conservation du produit de convolution discret exige que :

(51) $$F_p^*(p) = F_{\varphi}^*\left[\frac{\alpha + p}{\alpha - p}\right] = F(p)$$

Il est alors aisé d'établir que les fonctions $\varphi_n^b(t,\alpha)$ sont déterminées par

(52) $$\varphi_n^b(t,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\ [\lambda_n^b(t,\alpha) + \lambda_{n+1}^b(t,\alpha)]$$

3.23 - Exemple de transformation unilatérale

a) Transformation de LAGUERRE unilatérale et fonctions d'OPPENHEIM

Les fonctions considérées sont causales.

* Fonctions de LAGUERRE - La base adoptée est constituée par les fonctions $\lambda_n(t,\alpha)$.

On montre sans difficulté que (cf. méthode de l'Annexe III).

(53) $$\lambda_n(p,\alpha) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha+p}\left[\frac{\alpha - p}{\alpha + p}\right]^n$$

(54) $$\boxed{F_p(p) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha+p}\ F_\lambda^*\left[\frac{\alpha+p}{\alpha-p}\right]}$$ et donc (55) $$\boxed{F_\lambda^*(z) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{1+z^{-1}} F_p\left[\alpha\ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]}$$

* Fonctions d'OPPENHEIM

Ici par définition

(56) $$\boxed{F_p(p) = F_{\varphi}^*\left[\frac{\alpha+p}{\alpha-p}\right]}$$ soit (57) $$\varphi_n(p,\alpha) = \frac{2\alpha}{(\alpha-p)(\alpha+p)}\left[\frac{\alpha-p}{\alpha+p}\right]^n$$

d'où :

(58) $$\varphi_n(p,\alpha) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha-p}\ \lambda_n(p,\alpha) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha+p}\ \lambda_{n-1}(p,\alpha)$$

(59) $$\varphi_n(t,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\ [\ \lambda_n(t,\alpha) + \lambda_{n-1}(t,\alpha)\ ]$$

et donc (60) $$\boxed{\varphi_n(t,\alpha) = \Lambda_n(t,\alpha) + \Lambda_{n-1}(t,\alpha)}$$

or (61) $$\varphi_n(p,\alpha) = \frac{2\alpha}{(\alpha-p)(\alpha+p)}\left[\frac{\alpha-p}{\alpha+p}\right]^n = -\frac{d}{dp}\left\{\left[\frac{\alpha-p}{\alpha+p}\right]^n\right\}\left\{\frac{1}{n}\right\}$$

et donc, d'après un théorème classique

(62) $$\boxed{\varphi_n(t,\alpha) = \frac{t}{n}\left\{\Phi_n(t,\alpha)\right\}}$$

avec (63) $$\Phi_n(t,\alpha) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\alpha-p}{\alpha+p}\right]^n$$

b) Etude du cas particulier ou $\alpha = 1$

On envisage alors la transformation en ζ introduite dans [11], [15] et [17] et qui possède un certain nombre de propriétés remarquables.

* Variable ζ et ψ. Définitions - Relations fondamentales

(64) On pose $$\boxed{\zeta = \frac{1 + p}{1 - p} = e^{T\psi}}$$

MODELISATION DE SIGNAUX CONTINUS
ET CARACTERISATIONS DISCRETES

TRANSFORMATION DE LAGUERRE

T étant une constante positive, par analogie avec les variables Z et w qui sont associées de manière classique à l'étude des systèmes échantillonnés. L'avantage que présente cette suite de transformations se situe au niveau de la simplicité des relations liant p et ζ qui sont rappelées sur la figure 1.

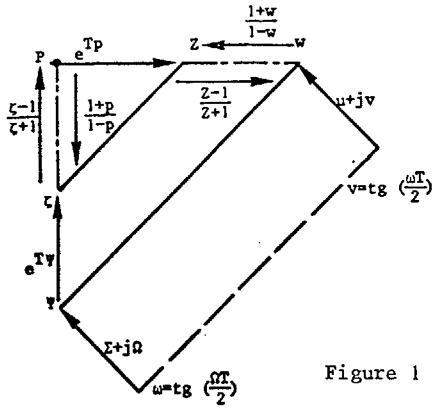


Figure 1

Il s'agit donc, en s'appuyant sur les propriétés classiques des variables Z et w définies à partir de la variable p de Laplace par une exponentiation et une transformation bilinéaire d'étudier les propriétés de la "voie symétrique" consistant à effectuer d'abord une transformation bilinéaire puis une exponentiation.

* Transformée de FOURIER

Soit $f(t) \in L^2\ [o,\infty]$ de transformée de Laplace bilatérale $F_p(p)$.

Soit $[\ f_n^\lambda\ ]_{n=o}^{\infty}$ le spectre de LAGUERRE associé à f(t) et $[\ f_n^\varphi\ ]_{n=o}^{\infty}$ le spectre obtenu en décomposant sur une base d'OPPENHEIM.

Théorème A (65) $f_n^\varphi = \dfrac{f_n^\lambda + f_{n-1}^\lambda}{\sqrt{2\alpha}}$

La démonstration est évidente à partir de la relation (60).

Théorème B La séquence $[\ f_n^\varphi\ ]$ constitue le spectre de FOURIER de la partie réelle (ou de la partie imaginaire) de la transformée de FOURIER de f(t).

La démonstration est donnée en Annexe IV.

c) Polynôme de Laguerre et L-Transformée de Laguerre[11]

On introduit la transformation $z = \dfrac{p}{p-1}$ $p = \dfrac{z}{z-1}$

La L-Transformée de Laguerre d'un signal causal $f(t) \in L^2\ [o,\infty]$ est définie par

(66) $f(t) = \sum_{n=o}^{\infty} f_n^L\ L_n(t)$ (67) $L_n(p) = \dfrac{1}{p}\left[\dfrac{p-1}{p}\right]^n$

avec (68) $f_n^L = \int_o^\infty f(t)\ e^{-t}\ L_n(t)\ dt$ (cf. Annexe I)

Il est très facile de montrer que :

(69) $\boxed{F_p = \dfrac{1}{p}\ F_L^*\left[\dfrac{p}{p-1}\right]}$ avec $F_L^* = \sum_{n=o}^{\infty} f_n^L\ z^{-n}$

La transformation modifie la forme du produit de convolution discret. Les propriétés de cette transformation sont décrites dans [11].

d) Transformation de Poisson et P-Transformée de Poisson

Avec les définitions et les notations proposées par L.P BOLGIANO et M. PIOVOSO [21] en 1968

(70) $P_n(t) = \dfrac{t^n}{n!}\ e^{-t}$ avec (71) $P_n(p) = \dfrac{1}{1+p}\left[\dfrac{1}{1+p}\right]^n$

(72) $f(t) = \sum_{n=o}^{\infty} f_n^P\ P_n(t)$ (73) $f_n^P = \int_o^\infty P_n(t)\ f(t)dt$

On introduit la transformation $z = \dfrac{1}{1-p}$ (74)

et donc $P = 1 - z^{-1} = \dfrac{z-1}{Z}$

qui a une forme inverse de celle introduite pour la L-Transformée de Laguerre

Pour cette transformation, il y a conservation de la forme du produit de convolution discret.

4. - ETUDE DU CAS DES SIGNAUX DISCRETS [19], [11]et[15]

Les résultats obtenus dans le domaine discret sont tout à fait parallèles et semblables à ceux développés dans le domaine continu. Il existe une analogie remarquable entre les conditions qui conduisent à la conservation du produit de convolution discret.

4.1 - Opérations sur des séquences conservant la forme du produit de convolution [19]

On fait l'hypothèse que f(t) peut être représentée par deux séquences différentes $\{f_k\}$ et $\{\underline{f}_n\}$ telles que :

(73) $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\ \phi_k(t)$

(74) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{f}_n\ \underline{\Phi}_n(t)$

Si on fait l'hypothèse que la base de fonctions $\{\phi_k(t)\}$ est complète, de telle sorte que chaque $\underline{\Phi}_n(t)$ puisse être développée suivant les $\phi_k(t)$, il vient :

(75) $\underline{\Phi}_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{n,k}\ \phi_k(t)$

avec pour les séquences

(76) $f_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{f}_n\ \psi_{n,k}$

L'équation (76) peut être considérée comme représentant le développement de la séquence f_k sur la base des séquences $\{\psi_{n,k}\}$. Ces séquences $\{\psi_{n,k}\}$ jouent donc le même rôle que les fonctions $\phi_k(t)$ du paragraphe 3.12.

Transformation du produit de convolution

$x_k \longrightarrow \boxed{g_k} \longrightarrow y_k$

$\underline{x}_n \longrightarrow \boxed{\underline{g}_n} \longrightarrow \underline{y}_n$

Figure 2

Soit y_k le produit de convolution $y_k = x_k * g_k$ (77)

Si $\underline{x}_n$ et $\underline{g}_n$ sont respectivement les coefficients des développements de x_k et g_k sur la base des $\psi_{n,k}$, une transformation conservant le produit de convolution sera telle que si $\underline{y}_n$ est le développement de y_k alors :

(78) $\underline{y}_n = \underline{x}_n * \underline{g}_n$

Soit $\psi_n(z)$ la transformée en z de $\psi_{n,k}$

Si l'on cherche la transformée en z de chacun des termes du produit de convolution, il vient :

(79) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k\ z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{y}_n\ \psi_{n,k}\ z^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{y}_n\ \psi_n(z)$

Comme $y_k = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_r \, g_{k-r}$

Il vient : $\boxed{\psi_n(z) = \psi_r(z)\, \psi_{n-r}(z)}$ (80)

qui a pour solution générale $\psi_n(z) = [\psi_1(k)]^n$ (81)

Quand $\{\psi_n(z)\}$ satisfait (81), les transformées en z des séquences f_k et $\underline{f}_n$, peuvent être associées par une transformation de variables. Soit F(z), la transformée en z de f(t). Si

$$F_z(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \, z^{-k}$$

Soit

$$F_z(z) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{f}_n \, \psi_{n,k}\right] z^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{f}_n \, \psi_n(z)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{f}_n [\psi_1(z)]^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{f}_n \left\{[\psi_1(z)]^{-1}\right\}^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{f}_n \, \underline{z}^{-n}$$

On pose donc $\underline{z} = [\psi_1(z)]^{-1} = \underline{T}(z)$ (82)

4.2 - Etude d'un exemple de transformation $\underline{z}=\underline{T}(z)$ Fonctions de Laguerre discretes

4.21 - Fonctions de Laguerre (cf Annexe IV et [15])

On considère les polynômes $L^*_n(kT,\beta)$ de la variable kT dont les transformées en E ($E = z^{-1}$) sont de la forme :

$$(83) \quad L^*_n(E,\beta) = \frac{1}{1-E}\left[\frac{e^{-\frac{\beta T}{2}} - e^{\frac{\beta T}{2}} E}{1-E}\right]^n$$

quand $E=e^{-Tp}$ et quand la période d'échantillonnage T tend vers zéro, les $L^*_n(E,\beta)$ sont déterminés par la même équation récurrente que les polynômes de LAGUERRE $L_n(t,\beta)$. Nous les appellerons donc polynômes de LAGUERRE discrets.

Les fonctions de LAGUERRE discrètes seront définies par :

$$(84) \begin{cases} \lambda^*_n(E,\alpha,\beta) = \sqrt{1-e^{-\beta T}}\, \Lambda^*_n(E,\alpha,\beta) = \mathcal{Z}_E\left\{(-1)^n \sqrt{1-e^{-\beta T}}\, e^{-\alpha kT} L^*_n(kT,\beta)\right\} \\ \Lambda^*_n(E,\alpha,\beta) = \dfrac{1}{1-e^{-\alpha T} E}\left[e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}} \dfrac{E-e^{-(\beta-\alpha)T}}{1-e^{-\alpha T} E}\right]^n \end{cases}$$

Pour $\beta=2\alpha$ on obtient des fonctions constituant une base orthonormée sur $[o,\infty]$ (fonction densité 1).

$$(85) \quad \boxed{\lambda^*_n(E,\alpha) = \frac{\sqrt{1-e^{-2\alpha T}}}{1-e^{-\alpha T} E}\left[\frac{E-e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T} E}\right]^n}$$

De même que dans le cas continu on peut définir des fonctions constituant une base sur $[-\infty,\infty]$.

$$(86)\ \lambda^{b*}_n(kT,\alpha) \begin{cases} [\lambda^{b*}_n(kT,\alpha)]_+ = \lambda^*_{n-1}[(k-1)T,\alpha] \text{ pour } n=1,2,3\ldots \\ [\lambda^{b*}_n(kT,\alpha)]_- = \lambda^*_{-n}[-kT,\alpha] \text{ pour } n=o,-1,-2, \text{ et } k \leqslant o \end{cases}$$

avec

$$\boxed{\lambda^{b*}_n(E,\alpha) = E\,\frac{\sqrt{1-e^{-2\alpha T}}}{E-e^{-\alpha T}}\left[\frac{E-e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T} E}\right]^n}$$

4.22 - λ^*-Transformation de LAGUERRE bilatérale et fonctions d'OPPENHEIM

On considère la transformation introduite dans [11], [15] et [19] :

$$(87) \quad \underline{z} = \underline{T}(z) = \frac{1-e^{-\alpha T} E}{E-e^{-\alpha T}} \qquad (88) \quad z = e^{-\alpha T}\frac{1+\underline{z}\, e^{\alpha T}}{1+\underline{z}\, e^{-\alpha T}} = E^{-1}$$

Cette transformation constitue un cas particulier (quand $\beta=2\alpha$) de la transformation de LAGUERRE discrète généralisée.

$$(89) \quad \underline{z} = \underline{T}(z) = \frac{z - e^{-\alpha T}}{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}} - e^{-\frac{\beta T}{2}} z}$$

En exploitant les théorèmes démontrés ci-dessus, et comme dans le cas continu, il est aisé de montrer que cette transformation conduit à écrire :

$$(90) \quad f_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{f}_n \, \psi_{n,k} \qquad \text{avec } \Psi_n(E) = \left[\frac{1-e^{-\alpha T} E}{E-e^{-\alpha T}}\right]^{-n}$$

a) Fonctions de LAGUERRE - Transformation bilatérale

On montre que si (cf. Annexe VI)

$$(91) \quad F^*_\lambda(\underline{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{f}^\lambda_k \, \underline{z}^{-k} \qquad \text{alors}$$

$$(92) \quad \boxed{F^*_z(z) = \frac{\sqrt{1-e^{-2\alpha T}}}{E-e^{-\alpha T}}\, F^*_\lambda\left[\frac{1-e^{-\alpha T} E}{E-e^{-\alpha T}}\right]}$$

$$(93) \quad \boxed{F^*_\lambda(\underline{z}) = \frac{\sqrt{1-e^{-2\alpha T}}}{\underline{z}+e^{-\alpha T}}\, F^*_z\left[\frac{\underline{z}+e^{-\alpha T}}{1+\underline{z}\, e^{-\alpha T}}\right]}$$

quand $T \to o$ $F^*_z(z) \to F^*_p(p)$ a une fonctionnelle de T près

Les $\underline{f}^\lambda_n$ constituent le spectre de LAGUERRE discret de $\{f_k\}$ (qui peut par exemple être constitué des échantillons de f(nT)). Il y a conservation du produit intérieur, mais pas du produit de convolution.

b) Fonctions d'OPPENHEIM [19]

La conservation du produit de convolution discret exige que :

$$(94) \quad F^*_z(z) = F^*_\Psi\left[\frac{1-e^{-\alpha T} E}{E-e^{-\alpha T}}\right]$$

soit en utilisant la définition de $\underline{f}^\lambda_k$ (cf Annexe VI)

$$(95) \quad \Psi_n(E^{-1},\alpha) = \frac{z(1-e^{-2\alpha T})}{(1-e^{-\alpha T} z)(z-e^{-\alpha T})}\left[\frac{z-e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T} z}\right]^n$$

$$\text{d'où} \quad \Psi_n(E,\alpha) = \frac{\sqrt{1-e^{-2\alpha T}}}{1-E\, e^{-\alpha T}}\, \lambda^{b*}_n = \frac{\sqrt{1-e^{-2\alpha T}}}{E-e^{-\alpha T}}\, \lambda^{b*}_{n+1}$$

$$(96) \quad \Psi_n(kT,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\alpha T}}}\left[\lambda^{b*}_n(kT,\alpha) + e^{-\alpha T} \lambda^{b*}_{n+1}(kT,\alpha)\right]$$

4.23 - λ^*-Transformation de LAGUERRE monolatérale et fonctions d'OPPENHEIM

Il vient ici :

$$(97) \quad \Psi_n(kT,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\alpha T}}}\left[e^{-\alpha T} \lambda^*_n(kT,\alpha) + \lambda^*_{n-1}(kT,\alpha)\right]$$

$$(98) \quad \boxed{\Psi_n(kT,\alpha) = [e^{-\alpha T} \Lambda^*_n(kT,\alpha) + \Lambda^*_{n-1}(kT,\alpha)]}$$

$$\text{Soit} \quad \Psi_n(E,\alpha) = \left[\frac{E-e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T} E}\right]$$

$$\Psi_n(E,\alpha) = \frac{(1-e^{-2\alpha T})\, E}{(1-e^{-\alpha T}E)(E-e^{-\alpha T})}\left(\frac{E-e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}E}\right)^n$$

$$= -\frac{z}{n}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[\frac{1-e^{-\alpha T} z}{z-e^{-\alpha T}}\right]^n\right\} \quad \text{et donc} \quad \boxed{\Psi_n(k,\alpha) = \frac{k}{n}\left\{\psi_n(k,\alpha)\right\}}$$

MODELISATION DE SIGNAUX CONTINUS
ET CARACTERISATIONS DISCRETES

TRANSFORMATION DE LAGUERRE

BIBLIOGRAPHIE

Il n'est pas possible de présenter une liste de références bibliographiques complète, même en éliminant certaines publications. L'auteur a en effet établi une liste comportant plus de trois cents titres. On ne citera donc que les principaux documents en les classant par auteur et par sujet.

A) Utilisation des fonctions de Laguerre, publications de base

[1] N. WIENER "Generalized Harmonic Analysis" Acta Mathematica - Volume 55 pages 117-258 1930

[2] N. WIENER "Non linear Problems in Random Theory" The Technology Press of MIT and John WILEY and Sons Inc. NEW YORK 1958

[3] Y.W LEE "Synthesis of Electrical Network by Means of the FOURIER Transforms of LAGUERRE Functions" J. Math. Physi. 11 - 83/113 - 1931

[4] J.W HEAD and W.P WILSON "LAGUERRE Functions - Tables and Properties" - Monograph number 183-R of the Institut of Electrical Engineers - GB - 1956

[5] F. TRICOMI "Transformazione di Laplace e Polinomi di Laguerre" - RC Accad-Naz.Lincei - Ser.6,21-1935

B) Transformée bilinéaire en P - Travaux de K.STEIGLITZ

[6] K. STEIGLITZ "The General Theory of Digital Filters with Applications to Spectral Analysis" - AFOSR Report, n°64-1664(Eng.Sc.D.Dissertation NEW YORK University - NEW YORK) - 1963

[7] K. STEIGLITZ "The Approximation Problem of Digital Filters" - Tech.Report, n°400-56 (Dep.of Electrical Engineering, NEW YORK University,NEW YORK 1963

[8] K. STEIGLITZ "Rational Transform Approximation via the LAGUERRE Spectrum" - Journal of the Franklin Institute, Volume 280,number 5 Novembre 1965

[9] K. STEIGLITZ "The Equivalence of Digital and Analog Signal Processing" - Information and Control 8, pages 455 à 467 - 1965

C) Transformée bilinéaire en P - Transformée en ζ - Applications

[10] C. BOZZO "Identification expérimentale des processus Analyseur de Spectre de LAGUERRE" Etude A 20 GESA CAPCA du 14 Février 1969 (DCAN de TOULON).

[11] C. BOZZO "Etude d'un isomorphisme entre l'espace des signaux continus et l'espace des signaux discrets. Différentes applications" - Thèse de Doctorat es Sciences Marseille - 1970

[12] C. BOZZO "Notion de Transformée de LAGUERRE d'un signal continu" RAIRO J1 - 1972

[13] C. BOZZO"Transformée de LAGUERRE d'un signal continu : relation entre les transformées en ζ et en Z" CRAS t 277 P. 189-192 - 1973

[14] C. BOZZO "Transformée de LAGUERRE d'un signal continu - Application à l'étude du régime asymptotique du filtre de KALMAN" - CRAS t 277 P. 225-228 1973

Identification

[15] M. ROESCH "Identification des Systèmes linéaires par Intégration et récurrence" - Thèse de 3ème cycle - NANCY - 1973

[16] M. ROESCH, J. RAGOT, P. HEITZMANN "Identification d'un système linéaire sous forme d'une série de fonctions de LAGUERRE à l'aide de séquences binaires - Revue A Volume 17 n°1 - BRUXELLES 1976

[17] J.P SAGASPE "Contribution à l'identification non linéaire par la représentation fonctionnelle et la transformée de LAGUERRE - BORDEAUX 1976

D) Transformée bilinéaire en z - Transformée en ζ - Applications

[18] M.L MINTZ and J.S THORP "A method for discrete System Identification and Approximation" - Journal of Franklin Institute - Vol. 283 n° 5 (May) 1967

[19] A.V. OPPENHEIM and D.M JOHNSON "Discrete Representation of Signals" Proceeding of the IEEE - Vol. 60 n° 6 (June) - 1972

E) Transformée de POISSON - Travaux de L.P BOLGIANO et M.J PIOVOSO

[20] F.W. FAIRMAN and DWC SHEN "Process Parameter Determination via POISSON Filtering" ASME 69-WA/Aut 10 - NEW YORK - 1969

[21] L.P BOLGIANO and M.J PIOVOSO "POISSON Transform Signal Analysis" - IEEE Transactions on Information Theory - Vol. IT-14 pp 600-601 (July) 1968

[22] M.J PIOVOSO and L.P BOLGIANO "Digital Simulation using POISSON Transform Sequences" Dans "Computer Processing in Communications" édité par J. FOX MRI Symposia Series Vol.19, pp 505-514 - Polytechnic Press BROOKLYN - 1970

[23] L.P BOLGIANO and L.T QUICK "Obtaining Digital Signals for POISSON Filtering from Periodic Samples" Proc. IEEE Vol.63 (September) pp 1366 1367 - 1975

[24] L.T QUICK and L.P BOLGIANO "Deconvolution by POISSON Transformation" Conference Record IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, PHILADELPHIA, Pa - pp 350-353 - 1976

F) Application à l'identification de caractéristiques statistiques de bruits

[25] G. BORGET et P. FAURE "Algorithmes de factorisation approchée utilisant les fonctions orthogonales" RAIRO J - 1973

[26] G. BORGET et P. FAURE "Propriétés des fonctions de LAGUERRE dans les espaces de SOBOLEV d'indice entier.EDF - Bulletin de la direction des études et recherches - Série C n° 1 - p. 71-90 - 1971

G) Transformée en z - Propriétés - Fonctions génératrices - Fonctions $\lambda_n(t,\alpha,\beta)$

[27] R. GENIN et L.C CALVEZ "Sur quelques propriétés de la Transformation de LAGUERRE" - CRAS 267 A pp.108 110 - PARIS 1968

[28] R. GENIN et L.C CALVEZ "Inversion numérique de la transformation de LAPLACE à l'aide des polynômes de LAGUERRE"Electron.Lett.n°4 pp.461-462 - 1968

[29] R. GENIN et L.C. CALVEZ "LAGUERRE Transform Signal Analysis" Electron.Lett. n°6 pp.587-588 - 1970

[30] L.C. CALVEZ "Contribution à l'étude des propriétés de la transformation en z et de la transformation de LAGUERRE - Applications à l'analyse des signaux et circuits - Thèse de Doctorat d'Etat - BREST 1973

ANNEXE I

POLYNOMES ET FONCTIONS DE LAGUERRE ET DE POISSON - NOTATIONS

1\. - NOTATION DE LAGUERRE - 1880

(1) $$\boxed{f_n(u) = \sum_{i=o}^{n} \frac{n^2(n-1)^2\dots(i+1)^2}{(n-i)!}\, u^i}$$

Les polynômes $f_n(u)$ sont reliés aux polynômes $L_n(u)$ que nous avons définis par la relation :

(2) $$\boxed{f_n(u) = n!\, L_n(-u)}$$

En effet le terme général de $L_n(u)$ est de la forme :

(3) $$(-1)^j \frac{C_n^j}{j!} u^j = (-1)^j \frac{n!}{[j!]^2\,(n-j)!}\, u^j = \frac{(-1)^j}{n!}\, \frac{[n(n-1)\dots(j+1)]^2\,[j!]^2}{[j!]^2\,(n-j)!}\, u^j$$

La transformée de LAPLACE de $L_n(u)$ étant

(4) $$\mathcal{L}[L_n(u)] = L_n(p) = \frac{1}{p}\left[\frac{p-1}{p}\right]^n$$

2\. - NOTATION DE VAN DER POL et MADELUNG

(5) $$\boxed{P_n(u) = \sum_{i=o}^{n} (-1)^i\, \frac{n^2(n-1)^2\dots(i+1)^2}{(n-i)!}\, u^i = e^u\, \frac{d^n(e^{-u}u^n)}{du^n}}$$

On a donc (6) $P_n(u) = n!\, L_n(u)$

3\. - NOTATION DE WIENER [1] et de STEIGLITZ [6] 1965

(7) $$\boxed{e^{-u}\sqrt{2} \sum_{i=o}^{n} (-1)^{n+i}\, \frac{n!}{(n-i)!\,[i!]^2}\, (2u)^i}$$

Il s'agit donc des fonctions :

(8) $$(-1)^n \sqrt{2}\, e^{-u} L_n(2u) = \lambda_n(t,2) = \sqrt{2}\, \Lambda_n(t) = \lambda_n(t)$$

avec les conventions que nous avons prises.

La transformée de LAPLACE de $\lambda_n(u)$est de la forme:

(9) $$\mathcal{L}[\lambda_n(u)] = \lambda_n(p) = \frac{\sqrt{2}}{1+p}\left[\frac{1-p}{1+p}\right]^n$$

4\. - NOTATION DE WAGNER, TRICOMI, DOETSCH, MAC LACHLAN, HEAD et WILSON [4]

Polynômes (10) $$\boxed{L_n(u) = \sum_{i=o}^{n} (-1)^n\, \frac{n!}{(n-i)!\,[i!]^2}\, u^n = \frac{e^u}{n!}\, \frac{d^n(e^{-u}\,u^n)}{du^n}}$$

C'est la notation que nous avons adoptée pour les polynômes de LAGUERRE.

Fonctions HEAD et WILSON adoptent comme définition des fonctions de LAGUERRE de la variable 2u.

(11) $$\boxed{e^{-u}\, L_n(2u) = (-1)^n\, \Lambda_n(u)}$$

5\. - NOTATIONS DE BOZZO, ROESCH, GENIN et CALVEZ [11] FONCTIONS $\lambda_n(t, \alpha, \beta)$

a) Polynômes $L_n(\beta t)$

Les polynômes de LAGUERRE de la variable βt sont de la forme :

(12) $$L_n(\beta t) = L_n(t,\beta) = \frac{1}{n!}\, e^{\beta t}\, \frac{d^n}{dt^n}\left[\, t^n\, e^{-\beta t}\right] \text{avec } \beta > o$$

et sont tels que $\int_o^\infty \beta e^{-\beta t}\, L_n^2(\beta t)\, dt = 1$ (13)

C'est-à-dire qu'ils constituent une suite de polynômes orthonormées par rapport à la fonction densité $\beta\, e^{-\beta t}$ sur $[o,\infty]$.

Les fonctions $\lambda_n(t,\beta) = (-1)^n\, \sqrt{\beta}\, e^{-\frac{\beta t}{2}}\, L_n(t,\beta)$ (14)

constituent également une suite de fonctions orthonormées.

b) Fonctions $\lambda_n(t,\alpha,\beta)$ [11] Par définition on pose :

(15) $\lambda_n(t,\alpha,\beta) = (-1)^n\, e^{-\alpha t}\sqrt{\beta}\, L_n(\beta t) = \sqrt{\beta}\, \Lambda_n(t,\alpha,\beta)$ avec $\beta > o$

dont la transformée de LAPLACE est :

(16) $$\boxed{\lambda_n(p,\alpha,\beta) = \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha + p}\left[\frac{\beta-\alpha-p}{\alpha+p}\right]^n}$$

En exploitant la relation (13) il est aisé de montrer que ces fonctions sont orthonormées par rapport à la fonction densité.

(17) $$e^{-(\beta-2\alpha)t}$$

pour $\begin{cases} \alpha = o \ \ \beta = 1 & \text{on retrouve au signe près } L_n(t) \\ \alpha = \frac{\beta}{2} & \text{on retrouve } \lambda_n(t, \alpha) \end{cases}$

avec quand $\alpha = 1$ $\beta = 2$ la fonction $\lambda_n(t)$

Relations de récurrence

(18) $n\, L_n(\beta t) = (2n-1-\beta t)\, L_{n-1}(\beta t) - (n-1)\, L_{n-2}(\beta t)$

Cette relation se conserve au signe près pour les fonctions λ_n.

ROESCH [15] ainsi que GENIN et CALVEZ [30] adoptent également la même notation sans faire intervenir le facteur $(-1)^n$ et la pondération $\sqrt{\beta}$ dans l'expression de $\lambda_n(t,\alpha,\beta)$.

6\. - OPPENHEIM (1972 [19] étudie les propriétés des décompositions sur les bases de fonctions de la forme :

(19) $$\boxed{\varphi_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, [\lambda_n(u) + \lambda_{n-1}(u)]}$$

7\. - BOLGIANO (1968) [21] considère les propriétés des bases de POISSON avec :

(20) $$P_n(u) = \frac{u^n}{n!}\, e^{-u}$$

Il vient bien entendu :

(21) $$e^{-u}\, L_n(u) = e^{-u} \sum_{k=o}^{n} (-1)^k\, C_n^k\, \frac{u^k}{k!}$$

(22) $$\boxed{e^{-u}\, L_n(u) = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k\, C_n^k\, P_k(u)}$$

et puisque $\frac{u^n}{n!} = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k\, C_n^k\, L_k(u)$ (23)

(24) $$\boxed{P_n(u) = e^{-u} \sum_{k=o}^{n} (-1)^k\, C_n^k\, L_k(u)}$$

formule symétrique de la précédente.

ANNEXE II

RAPPEL DES PRINCIPALES PROPRIETES DES POLYNOMES DE LAGUERRE $L_n(t)$ ET DES FONCTIONS DE LAGUERRE $\Lambda_n(t)$

On ne rappelle que les propriétés les plus importantes pour l'étude des transformations en z. On trouvera dans [11], [15], [17] et [30] des analyses détaillées de ces propriétés (cas particuliers $\alpha=1$ $\beta=2$; $\alpha=o$ $\beta=1$ ou cas général).

MODELISATION DE SIGNAUX CONTINUS
ET CARACTERISATIONS DISCRETES

TRANSFORMATION DE LAGUERRE

- Définition

$$(1)\ \begin{cases}(n+1)\ L_{n+1}(t) - (2n+1-t)\ L_n(t) + n\ L_{n-1}(t) = 0\\ \dot{L}_n(t) - \dot{L}_{n-1}(t) + L_{n-1}(t) = 0\end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases}(n+1)\ \Lambda_{n-1}(t) + (2n+1-2t)\ \Lambda_n(t) + n\ \Lambda_{n-1}(t) = 0\\ \dot{\Lambda}_n(t) + \dot{\Lambda}_{n-1}(t) = -\Lambda_n(t) + \Lambda_{n-1}(t)\\ 2\ t\ \dot{\Lambda}_n(t) = -(n+1)\ \Lambda_{n+1}(t) - \Lambda_n(t) + n\Lambda_{n-1}(t)\end{cases}$$

- Formule de Christoffel-Darboux

$$(3)\quad \sum_{n=0}^{n} \Lambda_n(x)\ \Lambda_n(y) = \frac{N+1}{2}\ \frac{\Lambda_{N+1}(x)\ \Lambda_N(y) - \Lambda_N(x)\ \Lambda_{N+1}(y)}{x-y}$$

- Formule du retard

$$(4)\quad e^{-\tau p} = e^{-\tau}\sum_{i=0}^{\infty} L_i(p) L_i(\tau) = 2\sum_{i=0}^{\infty}\Lambda_i(p)\ \Lambda_i(\tau)$$

$$(5)\quad L_n(t-\tau) = e^{-\tau}\left[\sum_{i=0}^{\infty} L_i(\tau)\ [L_{n+i}(t) - L_{n+i+1}(t)]\right]$$

$$(6)\quad \Lambda_n(t-\tau) = \sum_{i=0}^{\infty}\Lambda_i(\tau)\ [\Lambda_{n+i}(t) + \Lambda_{n+i+1}(t)]$$

$$= e^{\tau}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\ \Lambda_i(t)\Delta_{n-i}(-2\tau) \text{ avec } \Delta_j(t) = \Lambda_j(t) - \Lambda_{j-1}(t)$$

- Application d'un coefficient d'échelle

$$\Lambda_n(t) = e^{-t}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\ C_n^i(2)^i\ L_i(t)$$

$$\text{et}\quad L_n(t) = e^t\ 2^{-n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\ C_n^i\ \Lambda_i(t) \qquad (7)$$

$$\Lambda_n\ [(\alpha+\beta)t] = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\sum_{i=0}^{n} C_n^i\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^i\ \Lambda_i(\beta t)e^{-\alpha t} \qquad (8)$$

- Différentiation et intégration

$$(9)\quad \frac{d}{dt}\ [e^t(\Lambda_{n+1}(t) + \Lambda_n(t))] = 2\ e^t\ \Lambda_n(t)$$

$$(10)\quad \frac{\partial\Lambda_n(t)}{\partial n} = -2\int_0^t \Lambda_n(t-\tau)\ \frac{\text{sh}\ \tau}{\tau}\ d\tau$$

$$(11)\quad \int_0^{\infty} e^{-t}\ \Lambda_n(\beta\ t)\ dt = \frac{(\beta-\alpha)^n}{(\beta+\alpha)^{n+1}} \qquad \text{et}$$

$$(12)\quad \frac{2^{m+1}}{n!}\int_0^{\infty} e^{-t}\ t^m\ \Lambda_n(t)\ dt = C_m^n \qquad \text{pour}\quad m \geqslant n$$

ANNEXE III

TRANSFORMEE DE LAGUERRE CONTINUE BILATERALE - RELATIONS AVEC LA TRANSFORMEE DE LAPLACE BILATERALE

PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION $z = \frac{\alpha+p}{\beta-\alpha-p}$ et $p = \frac{(\beta-\alpha)z-\alpha}{1+z}$

1. - DECOMPOSITION SUR UNE BASE DE FONCTIONS DE LAGUERRE GENERALISEE $\lambda_n^b(t,\alpha,\beta)$

Ces fonctions sont définies par :

$$(1)\quad \Lambda_n^b(t,\alpha,\beta) = \begin{cases}[\Lambda_n^b(t,\alpha,\beta)]_+ = \Lambda_{n-1}(t,\alpha,\beta) & \text{pour } n > o\\ [\Lambda_n^b(t,\alpha,\beta)]_- = \Lambda_{-n}(-t,\beta-\alpha,2\alpha) & \text{pour } n \leqslant o\end{cases}$$

$$\text{avec}\quad \boxed{\Lambda_n^b(p,\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta-\alpha-p}\left[\frac{\beta-\alpha-p}{\alpha+p}\right]^n} \qquad (2)$$

$$\text{avec}\quad (3)\quad \lambda_n^b(t,\alpha,\beta) = \sqrt{\beta}\ \Lambda_n^b(t,\alpha,\beta)$$

Soit $F_\lambda(z)$ la transformée d'une séquence $\{f_n\}$ image d'un signal $f(t)$. On pose :

$$(4)\quad \boxed{F_p(p) = \frac{\sqrt{\beta}}{\beta-\alpha-p}\ F_\lambda\left[\frac{\alpha+p}{\beta-\alpha-p}\right]}\ \boxed{F_\lambda(z) = \frac{\sqrt{\beta}}{1+z}\ F_p\left[\frac{(\beta-\alpha)z-\alpha}{1+z}\right]}$$

avec (5) $F_\lambda(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\ z^{-n}$ et d'après (17)(Annexe I)

$$(6)\quad f_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \lambda_n^b(t,\alpha,\beta)\ e^{-(\beta-2\alpha)t}\ dt$$

En appliquant une formule d'inversion classique de (5), il vient :

$$(7)\quad f_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{\sqrt{\beta}}{z+1}\ F_p\left[\frac{(\beta-\alpha)\ z-\alpha}{1+z}\right]\ z^n\ \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\{F_p(p)\}\left\{\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha+p}\left(\frac{\alpha+p}{\beta-\alpha-p}\right)^n\right\} dp \qquad (8)$$

L'application à (6) de la relation de PARSEVAL permet d'écrire en identifiant avec (7)

$$(9)\quad \mathcal{L}[e^{-(\beta-2\alpha)t}\ \lambda_n^b(t,\alpha,\beta)] = \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha-p}\left(\frac{\alpha-p}{\beta-\alpha-p}\right)^n$$

$$\text{d'où}\quad (10)\quad \lambda_n^b(p,\alpha,\beta) = \frac{\sqrt{\beta}}{\beta-\alpha-p}\left[\frac{\beta-\alpha-p}{p+\alpha}\right]^n$$

2. - ETUDE DU CAS PARTICULIER $\beta=2\alpha$ DECOMPOSITION SUR UNE BASE DE FONCTIONS D'OPPENHEIM

L'équation (10) devient :

$$(11)\quad \boxed{F_p(p) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha-p}\ F_\lambda^*\left[\frac{\alpha+p}{\alpha-p}\right]}$$

Fonctions d'OPPENHEIM

On fait l'hypothèse que le produit de convolution est conservé.

$$(12)\quad \boxed{F_p(p) = F_\varphi^*\left[\frac{\alpha+p}{\alpha-p}\right]}$$

Il vient alors :

$$(13)\quad \varphi_n^b(-p,\alpha) = \left(\frac{\alpha+p}{\alpha-p}\right)^n\ \frac{2\alpha}{(\alpha-p)\ (\alpha+p)}$$

$$(14)\quad \varphi_n^b(p,\alpha) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha+p}\ \lambda_n^b(p,\alpha) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha-p}\ \lambda_{n+1}^b(p,\alpha)$$

$$\text{et donc}\quad \boxed{\varphi_n^b(t,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\ [\ \lambda_n^b(t,\alpha) + \lambda_{n+1}^b(t,\alpha)\ ]}$$

ANNEXE IV

TRANSFORMEE en ζ - ANALYSE DE FOURIER

Soit $f(t) \in L^2\ [o,\infty]$ de transformée de LAPLACE $F_p(p)$. Par définition de la transformée en ζ il vient :

$$(1)\quad F_p\left[\frac{1-\zeta^{-1}}{1+\zeta^{-1}}\right] = \sum_{n=o}^{\infty} f_n^\varphi\ \zeta^{-n}$$

Quand $p = j\omega$

$$(2)\quad F_p[e^{-jTe\Omega}] = \sum_{n=o}^{\infty} f_n^\varphi\ [\cos(nT_e\Omega) - j\ \sin(nT_e\Omega)]$$

En posant $\alpha = T_e\Omega \qquad \omega = \text{tg}\ \frac{\alpha}{2}$

$$(3)\quad F_p(j\omega) = x(\omega) + j\ y(\omega) \quad \text{et donc}\quad \begin{cases} x(\alpha) = \sum_{n=o}^{\infty} f_n^\varphi \cos n\alpha\\ y(\alpha) = -\sum_{n=o}^{\infty} f_n^\varphi \sin n\alpha\end{cases}$$

La fonction $x(\alpha)$ est nulle pour α extérieur à l'intervalle $(-\pi,\pi)$. Soit $X(\theta)$ la transformée de FOURIER de $x(\alpha)$, et $x_T(\alpha)$ l'extension périodique (de période de $T = 2\pi$) de $x(\alpha)$. On peut écrire :

MODELISATION DE SIGNAUX CONTINUS
ET CARACTERISATIONS DISCRETES

TRANSFORMATION DE LAGUERRE

(4) $x_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, e^{jn\alpha}$

et puisque $x(\alpha)$ est paire,

(5) $x_T(\alpha) = f_n^o + \sum_{1}^{\infty} f_n^{\varphi} \cos n\alpha$

La séquence $[f_n^{\varphi}]_{n=o}^{\infty}$ constitue le spectre de Fourier de la fonction paire $x_T(T_e \, \Omega)$.

D'après un théorème classique, si $G(\omega)$ est la transformée de Fourier de $g(t)$ et si $g_T(t)$ [extension périodique de $g(t)$] a pour coefficients de Fourier g_n alors :

(6) $g(t) \leftrightarrow G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\,\omega_o) \dfrac{\sin \frac{\omega T}{2} - n\pi}{\frac{\omega T}{2} - n\pi}$

avec

(7) $g_n = \dfrac{G(n\,\omega_o)}{T}$, $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$

Il vient donc ici :

(8) $x(\alpha) \leftrightarrow X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) \dfrac{\sin \pi(\theta-n)}{\pi(\theta-n)}$

avec

(9) $x_n = \dfrac{X(n)}{2\pi} = \dfrac{f_n^{\varphi}}{2}$, $x_o = \dfrac{X(0)}{2\pi} = f_o^{\varphi}$

ou encore :

$$X(\theta) = 2\theta \sin \theta\pi \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{f_n^{\varphi}}{\theta^2 - n^2}$$

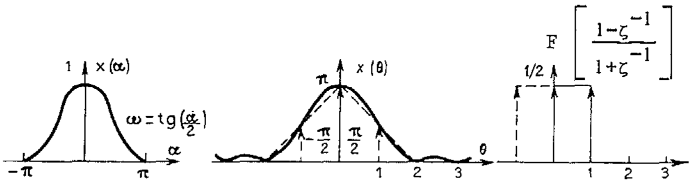
Exemple - On considère

$$f(t) = e^{-t}\, u(t), \; F(p) = \frac{1}{1+p}$$

d'où

$$x(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} \; ; \; x(\alpha) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \; ; \; F\left[\frac{1-\zeta^{-1}}{1+\zeta^{-1}}\right] = \frac{1+\zeta^{-1}}{2} \, ,$$

$$X(\theta) = \frac{\sin \pi\theta}{\theta(1-\theta^2)} \; ; \; X(0) = \pi ; \; X(1) = \frac{\pi}{2} \; ; \; X(n) = 0, \; \forall n$$



ANNEXE V

PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE EN ζ (FONCTIONS $\lambda_n(t,1) = \sqrt{2}\,\Lambda_n(t)$) ; FONCTIONS CAUSALES

On considère, dans tout ce qui suit, des fonctions $f(t)$ nulles pour t négatif. On adopte, d'autre part, la convention d'écriture suivante :

(1) $\zeta^*[f(t)] = F^*(\zeta)$ et $\zeta_*^{-1}[F^*(\zeta)] = f(t)$

1- LINEARITE La transformation en ζ possède les deux propriétés de linéarité (additivité et homogénéité).

2- INVERSION DE LA TRANSFORMEE - On peut calculer l'intégrale

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \zeta^{n-1} F^*(\zeta)\, d\zeta$$

par la méthode des résidus, ou utiliser une méthode de division suivant les puissances croissantes de ζ^{-1} quand $F^*(\zeta)$ est rationnelle.

3. - THEOREMES DE LA VALEUR INITIALE ET DE LA VALEUR FINALE

(2) $f(o) = \lim_{\zeta \to -1} [F^*(\zeta)]$ et $f(\infty) = \lim_{\zeta \to 1} \left[\dfrac{1-\zeta^{-1}}{\sqrt{2}} F^*(\zeta)\right]$

4. - DERIVATION ET INTEGRATION PAR RAPPORT AU TEMPS

On montre que :

(3) $\zeta^*[\dot{f}(t)] = \dfrac{1-\zeta^{-1}}{1+\zeta^{-1}} F^*(\zeta) - \dfrac{\sqrt{2}}{1+\zeta^{-1}} f(o+)$

$f(o+)$ étant la valeur de $f(t)$ pour $t = o$ à droite.

(4) $\zeta^*\left[\displaystyle\int_o^t f(\tau)\, d\tau\right] = \dfrac{1+\zeta^{-1}}{1-\zeta^{-1}} F^*(\zeta)$

5. - THEOREME DE LA TRANSLATION TEMPORELLE (THEOREME DE RETARD).

On pose

(5) $f(t-\tau) = \sum_{n=o}^{\infty} f_n \sqrt{2}\, \Lambda_n(t-\tau) = \sum_{n=o}^{\infty} f_n^{\tau} \sqrt{2}\, \Lambda_n(t)$

On peut montrer, en utilisant les relations (22), que :

(6) $f_n = e^{\tau} \sum_{j=o}^{\infty} (-1)^j \Delta_j^o(-2\tau)\, f_{n-j}^{\tau}$

et $f_n^{\tau} = e^{-\tau} \sum_{j=o}^{n} (-1)^j \Delta_j^o(2\tau)\, f_{n-j}$ (7)

avec, par définition : $\Delta_i^o(t) = \sqrt{2}\,[\Lambda_i(t) - \Lambda_{i-1}(t)]$

6. - THEOREME DE LA TRANSLATION COMPLEXE - On pose:

(8) $e^{-at} f(t) = \sum_{n=o}^{\infty} F_n^a \sqrt{2}\, \Lambda_n(t)$

Il vient :

$$F_n^a = \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{i=o}^{n} (-1)^{n-i}\, C_n^i\, a^{n-i}\, f_i^{1+a} \qquad (9)$$

$[f_i^{1+a}]$ étant le spectre de $f(t)$ relativement aux fonctions $\sqrt{2}\,\Lambda_i\,[(1+a)t]$.

7. - RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS DE LA DECOMPOSITION DE $f(t)$ EN SERIE DE POLYNOMES ET DE FONCTIONS DE LAGUERRE

Si $f(t) = \sum_{i=o}^{\infty} \varphi_i\, L_i(t) = \sum_{i=o}^{\infty} f_i \sqrt{2}\, \Lambda_i(t)$ (10)

alors

(11) $f_i = \sqrt{2} \sum_{j=o}^{\infty} (-1)^j\, 2^j\, C_i^j\, \varphi_i$ et $\varphi_i = 2^{i-1}\sqrt{2} \sum_{j=o}^{\infty} (-1)^j\, C_i^j\, f_i$

8. - THEOREME DE LA CONVOLUTION

Si $F(p) = F_o(p)\, F_1(p)$ alors $F^*(\zeta) = [F_o^*(\zeta) F_1^*(\zeta)] \left[\dfrac{1+\zeta}{\sqrt{2}\zeta}\right]$ (12)

9. - THEOREME DE LA DERIVATION PAR RAPPORT à ζ

$$\zeta^*[t f(t)] = \left[\frac{1+\zeta^{-1}}{\sqrt{2}}\right]^2 \left[\frac{dF^*}{d\zeta^{-1}} + \frac{1}{1+\zeta^{-1}} F^*(\zeta)\right] = \sum_{n=o}^{\infty} \tilde{f}_n\, \zeta^{-n} \qquad (13)$$

avec

$$2\tilde{f}_n = (n+1)\, f_{n+1} + (2n+1)\, f_n + n f_{n-1}$$

ANNEXE VI

RELATION ENTRE LES TRANSFORMEES DE POISSON ET DE LAGUERRE

Les coefficients des développements selon les fonctions $P_n(t)$ et $L_n(t)$ sont définis respectivement par :

(1) $f_n^P = \displaystyle\int_o^{\infty} f(t)\, \frac{t^n}{n!}\, e^{-t}\, dt$

(2) $f_n^L = \displaystyle\int_o^{\infty} f(t)\, L_n(t)\, e^{-t}\, dt$

La relation entre les coefficients f_n^L et f_n^P se déduit sans difficulté (cf. BEDARD et BOZZO [11]) de l'expression de $L_n(t)$.

MODELISATION DE SIGNAUX CONTINUS
ET CARACTERISATIONS DISCRETES

TRANSFORMATION DE LAGUERRE

$$L_n(t) = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{t^k}{k!}$$

(3) $$\boxed{f_n^L = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k C_n^k f_k^P}$$

(4) $$\boxed{f_n^P = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k C_n^k f_k^L}$$

Si l'on considère maintenant les coefficients f_n^λ on peut montrer (cf. BOZZO [11] et BOLGIANO [21])que :

(5) $$\lambda_n(t) = (-1)^n \sqrt{2}\, e^{-t} L_n(2t)$$

(6) $$\boxed{f_n^\lambda = (-1)^n \sqrt{2} \sum_{k=o}^{n} (-2)^k C_n^k f_k^P}$$

(7) $$\boxed{f_n^P = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} \sum_{k=o}^{n} C_n^k f_k^\lambda}$$

et $$\boxed{f_n^\lambda = \sqrt{2}\; 2^{n-1} \sum_{k=o}^{n} (-1)^k 2^k C_n^k f_k^L} \qquad (8)$$

(9) $$\boxed{f_n^L = \sqrt{2}\; 2^{n-1} \sum_{k=o}^{n} (-1)^k C_n^k f_k^\lambda}$$

ANNEXE VII

POLYNOMES ET FONCTIONS DE LAGUERRE DISCRETS

DEFINITION - PROPRIETES

1. - POLYNOMES ET FONCTIONS DE LAGUERRE - DEFINITION

On considère les polynômes $L_n^*(kT,\beta)$ de la variable kT dont les transformées en $E(E = z^{-1})$ sont de la forme :

(1) $$\boxed{L_n^*(E,\ \beta) = \frac{1}{1-E} \left[\frac{e^{-\frac{\beta T}{2}} - e^{\frac{\beta T}{2}} E}{1 - E} \right]^n}$$

1.1 - Relation de récurrence

En appliquant le théorème :

(2) $$[k\ L_n^*(kT,\beta)] = - z \frac{\partial}{\partial z} [\ L_n^*(z,\beta)]$$

et après un calcul fastidieux, il vient :

(3) $$n\ L_n^*(kT,\beta) = [(n\, e^{-\frac{\beta T}{2}} + (n-1) e^{\frac{\beta T}{2}}) + (e^{-\frac{\beta T}{2}} - e^{\frac{\beta T}{2}})k] L_{n-1}^*(kT,\beta) - (n-1)\ L_{n-2}^*(kT,\beta)$$

avec bien entendu $L_o^*(kT) = 1$

Quand T tend vers zéro, le coefficient de L_{n-1}^* tend vers $(2\ n-1-\beta kT)$ et l'équation (3) tend vers la relation de récurrence définissant les polynômes de LAGUERRE $L_n(t,\beta)$. Nous appellerons donc"polynômes de LAGUERRE discrets"les $L_n^*(E,\beta)$.

1.2 - Fonctions de LAGUERRE discrètes $\Lambda_n^*(kT,\alpha,\beta)$

Soit $\Lambda_n^*(kT,\alpha,\beta) = (-1)^n e^{-\alpha kT} L_n^*(kT,\beta)$

En appliquant un théorème classique il vient :

(4) $$\boxed{\Lambda_n^*(E,\alpha,\beta) = \frac{1}{1-e^{-\alpha T}E} \left[\frac{e^{-\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}} E - e^{-(\beta-\alpha)T}}{1 - e^{-\alpha T} E} \right]^n}$$

Quand T tend vers zéro, la fonction $T\Lambda_n^*(E\alpha,\beta)$ tend vers $\frac{1}{\alpha+p} \left[\frac{\beta-\alpha-p}{\alpha+p} \right]^n$ c'est-à-dire vers $\Lambda_n\ (p,\alpha,\beta)$.

(Le terme en T provient du bloqueur $\frac{1-e^{-TP}}{p}$).

On définit également les fonctions de LAGUERRE.

(5) $$\boxed{\lambda_n^*\ (E,\alpha,\beta) = \sqrt{1 - e^{-\beta T}}\ \Lambda_n^*(E,\alpha,\beta)}$$

1.3 - Propriétés

La relation d'orthogonalité pour les fonctions de LAGUERRE discrètes est semblable à celle développée par les fonctions continues. Les fonctions λ^* sont orthonormées par rapport à la fonction densité^n(cf Annexe II)

$$P(k,\alpha,\beta) = e^{-(\beta-2\alpha)kT} \quad \text{avec } P(E,\alpha,\beta) = [1-E\ e^{-(\beta-2\alpha)T}]^{-1}$$

(6) $$\sum_{k=o}^{\infty} \lambda_m(k,\alpha,\beta)\lambda_n(k,\alpha,\beta) e^{-(\beta-2\alpha)kT} = \delta_{qr} \begin{cases} 1 \text{ si } q=r \\ o \text{ si } q \neq r \end{cases}$$

* pour $\alpha=o$ $\beta=1$. On obtient les fonctions

$$\lambda_n^*(E,o,1) = \frac{\sqrt{1-e^{-T}}}{1-E} \left[\frac{e^{\frac{T}{2}}(E-e^{-T})}{1-E} \right]^n = (-1)^n \sqrt{1-e^{-T}}\, L_n^*(E)$$

qui sont des polynômes de la variable kT.

* pour $\alpha=\beta/2$ et en posant $\mu = e^{-\alpha T}$

$$\boxed{\lambda_n^*(E,\mu) = \frac{\sqrt{1-\mu 2}}{1-\mu E} \left[\frac{E - \mu}{1-\mu\ E} \right]^n}$$

2. - CALCUL DES COEFFICIENTS ET RELATIONS ENTRE TRANSFORMEES EN z et TRANSFORMEE DE LAGUERRE DISCRETE

2.1 - Base de fonctions de LAGUERRE

Les coefficients du développement sur une base de LAGUERRE discrète sont définis par :

$$F_z^*(z) = \sum_{n=o}^{\infty} f_n^\lambda\ \lambda_n(z) \quad \text{et} \quad F_\lambda^*(\underline{z}) = \sum_{n=o}^{\infty} f_n^\lambda\ \underline{z}^{-n}$$

ou encore $$f(kT) = \sum_{n=o}^{\infty} f_n^\lambda\ \lambda_n(kT) \qquad (7)$$

en multipliant les deux membres par $e^{-(\beta-2\alpha)kT}\ \lambda_n(kT)$ et en sommant de 0 à ∞ , il vient :

(8) $$\sum_{k=o}^{\infty} e^{-(\beta-2\alpha)kT}\ \lambda_n(kT)\ f(kT) = f_n^\lambda$$

D'après la relation d'orthogonalité définissant les λ_n en appliquant le théorème de PARSEVAL, il vient :

(9) $$f_n^\lambda = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma \sqrt{1-e^{-\beta T}}\ F_z^*(z) \frac{\left[e^{-\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}} z - e^{-\frac{\beta T}{2}} \right]^n}{\left[1-e^{-(\beta-\alpha)T} z\right]^{n+1}} \frac{dz}{z}$$

Si l'on considère la transformation :

(10) $$\boxed{\underline{z} = \underline{T}(z) = \frac{z - e^{-\alpha T}}{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}} - e^{-\frac{\beta T}{2}} z}} \quad \boxed{z = e^{-\alpha T} \frac{1+\underline{z}\ e^{\frac{\beta T}{2}}}{1+\underline{z}\ e^{-\frac{\beta T}{2}}}}$$

$\underline{z}$ tend vers $\frac{p+\alpha}{\beta-\alpha-p}$ quand T tend vers zéro (cf.Annexe III).

Il vient en utilisant la définition de

(11) $$f_n^\lambda = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma F_\lambda^*(\underline{z})\ \underline{z}^n \frac{d\underline{z}}{\underline{z}}$$

(12) $$f_n^\lambda = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma \left\{ \frac{\sqrt{1-e^{-\beta T}}\ z}{z - e^{-\alpha T}} F_\lambda^* \left[\frac{z - e^{-\alpha T}}{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}} - e^{-\frac{\beta T}{2}} z} \right] \right\}$$

$$\left\{ \left[\frac{z - e^{-\alpha T}}{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}} - e^{\frac{\beta T}{2}} z} \right]^n \frac{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}} \sqrt{1-e^{-\beta T}}}{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}} - e^{\frac{\beta T}{2}} z} \right\} \frac{dz}{z}$$

Il vient donc en identifiant (9) et (12)

$$(13) \quad \boxed{F^*_z(z) = \frac{\sqrt{1-e^{-\beta T}}}{1-e^{-\alpha T}E} F^*_\lambda \left[\frac{1 - e^{-\alpha T}E}{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}} E - e^{\frac{\beta T}{2}}} \right]}$$

$$F^*_\lambda(\underline{z}) = \underline{z} \frac{\sqrt{1-e^{-\beta T}}}{e^{-\frac{\beta T}{2}} + \underline{z}} F^*_z \left[e^{-\alpha T} \frac{1+\underline{z}\, e^{\frac{\beta T}{2}}}{1+\underline{z}\, e^{-\frac{\beta T}{2}}} \right]$$

Quand $\beta = 2\alpha$ il vient en posant $\mu = e^{-\alpha T}$

$$(14) \quad \boxed{F^*_z(z) = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{1-\mu E} F^*_\lambda \left[\frac{1-\mu E}{E-\mu}\right]}$$

formule qui doit être rapprochée de la formule (53) de la Transformée unilatérale que l'on retrouve en faisant tendre $T \to o$

$$F_p(p) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha+p} F^*_\lambda\left[\frac{\alpha+p}{\alpha-p}\right]$$

2.2 - Transformée bilatérale

On définit les fonctions bilatérales par :

$$(15) \quad \Lambda_n^{b*}(kT,\alpha,\beta) = \begin{cases} [\Lambda_n^{b*}(kT,\alpha,\beta)]_+ = \Lambda^*_{n-1}[(k-1)T,\alpha,\beta] \text{ pour } n>o \\ [\Lambda_n^{b*}(kT,\alpha,\beta)]_- = \Lambda^*_{-n}[-kT,\beta-\alpha,2\alpha] \text{ pour } n\leqslant o \end{cases}$$

avec

$$(16) \quad \boxed{\Lambda_n^{b*}(E,\alpha,\beta) = \frac{E}{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}}E - e^{\frac{\beta T}{2}}} \left[\frac{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}}E - e^{\frac{\beta T}{2}}}{1-e^{-\alpha T}E}\right]^n}$$

et $e^{\frac{\beta-2\alpha T}{2}} \longleftrightarrow 1$ si $\alpha \longleftrightarrow \beta-\alpha$

et avec (17) $\lambda_n^{b*}(kT,\alpha,\beta) = \sqrt{1-e^{-\beta T}}\, \Lambda_n^{b*}(kT,\alpha,\beta)$

En appliquant le raisonnement du paragraphe 2.1, il vient, l'équation (12) étant inchangée :

$$\mathcal{Z}_E\left\{e^{-(\beta-2\alpha)kT}\lambda_n^{b*}(kT,\alpha,\beta)\right\} = \sqrt{1-e^{-\beta T}}\, \frac{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}}}{1-e^{-\alpha T}z}\left(\frac{1-e^{-\alpha T}z}{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}}z - e^{\frac{\beta T}{2}}}\right)^n$$

Si $\boxed{F^*_z(z) = \frac{\sqrt{1-e^{-\beta T}}}{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}}z^{-1} - e^{\frac{\beta T}{2}}} F^*_\lambda\left[\frac{1-e^{-\alpha T}z^{-1}}{e^{\frac{(\beta-2\alpha)T}{2}}z^{-1}-e^{\frac{\beta T}{2}}}\right]}$

et $\boxed{F^*_\lambda(\underline{z}) = \frac{\sqrt{1-e^{-\beta T}}}{e^{-\frac{\beta T}{2}} + \underline{z}} F^*_z \left[e^{-\alpha T} \frac{1 + z\, e^{\frac{\beta T}{2}}}{1 + \underline{z}\, e^{-\frac{\beta T}{2}}} \right]}$

Quand T tend vers zéro, on retrouve les formes (4) de l'Annexe III.

2.3 - Fonctions d'OPPENHEIM (cas $\beta=2\alpha$)

On fait l'hypothèse que le produit de convolution est conservé (fonctions monolatérales).

$$\boxed{F^*_z(z) = F^*_\Psi\left[\frac{1-\mu E}{E-\mu}\right]}$$

Il vient alors :

$$\Psi_n(E^{-1},\alpha) = \left(\frac{1-\mu E}{E-\mu}\right)^n \frac{E\,(1-\mu^2)}{(1-\mu E)(E-\mu)} \qquad \mu = e^{-\alpha T}$$

d'où $\Psi_n(E,\alpha) = E\,\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{1-\mu E}\,\lambda^*_{n-1}(E,\alpha) = \frac{E\sqrt{1-\mu^2}}{E-\mu}\,\lambda^*_n(E,\alpha)$

$$\boxed{\Psi_n(kT,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\alpha T}}}\left[e^{-\alpha T}\lambda^*_n(kT,\alpha) + \lambda^*_{n-1}(kT,\alpha)\right]}$$

qui est l'équivalent de la relation trouvée dans le cas continu.

ANNEXE VIII

ISOMORPHISME ASSOCIE A LA TRANSFORMATION DE LAGUERRE

La λ-Transformation de LAGUERRE associée à la variable ζ est un isomorphisme entre l'espace L^2 des signaux continus et l'espace φ^2 des signaux discrets [6]. Cette transformation est en effet biunivoque et elle conserve le produit intérieur. La transformée de LAGUERRE bilatérale a, d'autre part, la propriété de conserver le caractère de positivité des signaux :

$f(t) = o$ pour $t < o$ si, et seulement si

$\{f_n\} = o$ pour $n \leqslant o$

REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement le professeur L.P. BOLGIANO (Université de NEWARK DELAWARE) qui s'est intéressé à nos travaux et a bien voulu nous prodiquer ses conseils et ses encouragements.