COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

QUANTIFICATION A REFERENCE STOCHASTIQUE

F. CASTANIE

G.A.P.S.E., Institut National Polytechnique, 2, rue Ch. Camichel, 31071 TOULOUSE CEDEX

RESUME

La quantification de processus aléatoires est une opération de plus en plus utilisée dans les systèmes de Traitement du Signal.

Afin d'éviter les erreurs introduites par cet opérateur non linéaire, dans les mesures de corrélation, divers auteurs ont introduit la Quantification à Référence Stochastique : l'addition de sources de bruits dites Sources Auxiliaires, avant quantification uniforme, peut annuler le biais d'estimation.

Nous proposons une généralisation de la théorie de la quantification à R.S., qui interprète celle-ci comme un lissage de la caractéristique de transfert du quantificateur. Nous développons les expressions des transformations des moments dans la quantification à R.S. Nous étudions ensuite la classe des variables aléatoires qui, utilisées comme S.A., permettent d'obtenir des transformations simples.

Nous accordons un intérêt particulier à l'étude de S.A. qui conduisent à une transformation linéaire et introduisons le concept de quantificateur à transfert moyen linéaire. Nous présentons, pour finir, quelques applications pratiques des systèmes performants, actuellement à l'étude au GAPSE.

SUMMARY

Quantization of random processes is a widely used operation in signal processing systems.

In order to avoid the errors introduced by this non-linear operation, Random Reference Quantization has been defined by several authors : adding noise (or dither) sources to the signals before quantization could zero the bias of estimation.

Our aim is to generalize the Random Quantization theory, by showing that, in one sense, this operation acts like a smoothing of the transfer function of the quantizer. The expression of moment transformation has been established, making the assumptions as general as possible. A simple way has been found to define the class of random variables wich lead to linear transformation on the mean value.

As a conclusion, we present the application of this principle to some performing systems being studied at the GAPSE Laboratory.

QUANTIFICATION A REFERENCE STOCHASTIQUE

1- INTRODUCTION - POSITION DU PROBLEME

L'origine de la quantification à Référence Stochastique (R.S.) peut se situer dans les années 1960 : divers auteurs publient les résultats de travaux théoriques concernant l'estimation sans biais de fonctions de corrélation, à l'aide des seules informations de polarité des signaux, auxquels on a préalablement ajouté des bruits (dits S.A. "sources auxiliaires"), (13) (9) (14).

Antérieurement, Von NEUMANN a introduit le "calcul stochastique" (12), mode de calcul utilisant une représentation à 1 bit de l'information, qui repose en fait sur la même idée théorique.

Il faut attendre 1970 pour que K.Y. CHANG et col. (11) généralisent ces notions de coïncidence de polarité à l'opération de quantification uniforme. Les travaux antérieurs paraissent alors comme des cas particuliers de quantification à 1 bit.

La quantification que nous appellerons à "Référence Stochastique" a été ainsi définie :

$$X_Q \triangleq QRS\left[X\right] = Q\left[X+A\right]$$

où X est la Variable Aléatoire à traiter.

Q représente l'opération de quantification uniforme (de pas α, non précisé dans la notation)

et A est une Variable Aléatoire, générée par le système de traitement, dite Source Auxiliaire (S.A.).

Ces auteurs ont établi que, moyennant certaines conditions suffisantes vérifiées par la fonction caractéristique $\phi_A(u)$ de la S.A., on obtient l'égalité :

$$E\left[X_Q\right] = E\left[X\right]$$

Cela s'étend à un n-uplet :

$$E\left[X_{1Q}\dots X_{nQ}\right] = E\left[X_1\dots X_n\right]$$

si les n S.A.$\{A_1,\dots A_n\}$sont indépendantes.

Pour notre part, nous nous sommes attachés à généraliser ces résultats, en traitant des systèmes de quantification moins particuliers. Nous avons défini la Quantification Aléatoire (Q.A.) procédé de quantification dans lequel les seuils de décision sont des V.A. soumises à des conditions aussi faibles que possible. La Quantification à Référence Stochastique (Q.R.S.) n'est qu'un cas particulier de la Q.A.

Ceci nous permet de formaliser de manière unique la transformation que subissent les moments dans une opération de quantification très générale.

2- APPROCHE THEORIQUE DE LA QUANTIFICATION ALEATOIRE

2-1 Définition

Soit une suite de V.A. non nécessairement indépendantes $\{B_k\}$, $k \in Z$ telles que :

$$P\left[B_{k+1} < B_k\right] = 0 \qquad \forall k \tag{2-1}$$

et une suite croissante de réels α_k, $k \in Z$

Nous associons à une V.A. X une V.A. X_Q par la relation :

$$B_{k+1} \leqslant X < B_k \longleftrightarrow X_Q = \alpha_k$$

Ceci définit un procédé général de quantification, qui inclut la Quantification à Référence Stochastique en posant :

$$B_k = k.\alpha - A$$
$$\alpha_k = (k + \tfrac{1}{2})\alpha \tag{2-2}$$

avec $\alpha \in R^+$ et A Variable Aléatoire dite Source Auxiliaire, définie au § 1 ci-dessus.

2-2 Expression des moments de X_Q

Nous pouvons écrire :

$$P\left[X_Q = \alpha_k\right] = P\left[B_k \leqslant X < B_{k+1}\right] = p_k$$

Soit $F_{k,k+1}(x_1,x_2)$ la fonction de répartition du couple (B_k, B_{k+1}).

Elle jouit de la propriété suivante :

$$F_{k,k+1}(x,x) = P\left[B_k < x, B_{k+1} < x\right] = P\left[B_{k+1} < x\right] P\left[B_k < x / B_{k+1} < x\right]$$
$$= F_{k+1}(x) \tag{2-3}$$

car (2-1) implique :

$$P\left[B_k < x \,/\, B_{k+1} < x\right] = 1.$$

X étant indépendante des B_k, il vient :

$$p_k = \int_R dF_X(x) \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{x} dF_{k,k+1}(x_1,x_2)$$
$$= \int_R dF_X(x) \left[F_k(x) - F_{k,k+1}(x,x)\right]$$

d'après (2-3) :

$$p_k = \int_R dF_X(x) \left[F_k(x) - F_{k+1}(x)\right] \tag{2-4}$$

Le choix de $\{F_k(x)\}$ influe donc sur p_k et par là sur les moments de X_Q (s'ils existent) :

$$E\left[X_Q^m\right] = \sum_{k \in Z} \alpha_k^m \; p_k$$

Il est évident que l'existence jusqu'à l'ordre M des moments de X ne suffit pas à entraîner celle de $E\left[X_Q^m\right]$: on peut, par exemple, choisir pour famille $\{F_k(x)\}$ une suite de fonctions de répartition, convergeant en un point du support de $dF_X(x)$, de telle manière que :

$$p_k \alpha_k^m \underset{k \to \infty}{\not\to} 0$$

Notons : $S_N(x) = \sum_{-N}^{+N} \alpha_k^m \left[F_k(x) - F_{k+1}(x)\right]$

Si nous choisissons $\{F_k(x)\}$ telle que la suite $S_N(x)$ converge p.p et $|S_N(x)|$ soit majorée par une fonction intégrable par rapport à $dF_X(x)$:

Nous pourrons écrire (Th. de LEBESGUE) :

$$E\left[X_Q^m\right] = \sum_{k\in Z} \alpha_k^m . p_k = \int_R \lim_{N\to\infty} S_N(x).dF_x(x) = E\left[\lambda_m(X)\right]$$

avec :

$$\lambda_m(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{+N} \alpha_k^m \left[F_k(x) - F_{k+1}(x)\right] \qquad (2\text{-}5)$$

Les V.A. "seuils" B_k étant, rappelons-le, non nécessairement indépendantes.

Cette relation montre que la quantification aléatoire ainsi définie est équivalente, pour un moment d'ordre m donné, à une transformation $\lambda m(x)$ dont l'expression ne dépend que du choix de la suite des $F_k(x)$

Il est remarquable que seules les fonctions de répartition marginales des seuils aléatoires $\{B_k\}$ interviennent.

Intéressons-nous au cas particulier où les $\{B_k\}$ sont des V.A. à supports bornés disjoints. Nous avons montré (15) que : d'une part la relation (2-5) est valide dans ce cas ; d'autre part, pour m impair, nous pouvons écrire :

$$\lambda_m(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{+N} \left[\alpha_k^m - \alpha_{k+1}^m\right] F_k(x) \qquad (2\text{-}6)$$

Ces relations permettent une interprétation géométrique immédiate de $\lambda m(x)$:

Supposons en effet que les $\{B_k\}$ sont des Variables Aléatoires dégénérées ($B_k = b_k$ avec probabilité 1, $b_k \in R$)

$$F_k(x) = U(x-b_k)$$

où $\begin{cases} U(x) = 0 & x < 0 \\ = 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$

et $\lambda m(x) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{-N}^{+N} \alpha_k^m \left[U(x-b_{k+1}) - U(x-b_{k+1})\right]$

Nous retrouvons l'équation du quantificateur non uniforme, à seuils certains $\{b_k\}$.

Dans le cas général (2-5) et (2-6) nous montrent que la caractéristique de transfert du quantificateur est, pour un moment d'ordre m donné, lissée par la suite de fonctions $\{F_k(x)\}$.

Remarque : Si la suite $\{B_k\}$ est une suite de V.A. mutuellement indépendantes, la propriété de monotonie (2-1) implique qu'elles sont à supports bornés disjoints.

2-3 Etude particulière de la moyenne

Intéressons-nous au cas particulier fondamental, que constitue la transformation de la moyenne X_Q.

Il vient : $E\left[X_Q\right] = E\left[\lambda_1(X)\right]$ (2-7)

L'expression de $\lambda_1(X)$ s'obtient immédiatement à partir de (2-5) et (2-6)

$$\lambda_1(x) = \sum_k \alpha_k \left[F_k(x) - F_{k+1}(x)\right] = \text{v.p.} \sum_k (\alpha_k - \alpha_{k+1}) . F_k(x) \qquad (2\text{-}8)$$

Nous voyons que $\lambda_1(x)$ peut s'interpréter comme le transfert moyen du Quantificateur Aléatoire dont les seuils sont des V.A. $\{B_k\}$ de fonction de répartition $F_k(x)$.

A partir de (2-8), il est possible de chercher la famille $\{F_k(x)\}$ telle que $\lambda_1(x)$ ait une équation déterminée : $\lambda_1(x) = g(x)$.

Il est pour cela nécessaire que g(x) admette au moins une décomposition de la forme :

$$g(x) = \sum_k C_k F_k(x) \qquad (C_k \in R) \qquad (2\text{-}9)$$

où les $\{F_k(x)\}$ appartiennent à la classe des fonctions de répartition.

A titre d'illustration, limitons-nous au cas où (2-9) est vérifiée pour une famille $\{F_k(x)\}$ à supports bornés disjoints D_k, les α_k étant en général fixés par l'application considérée.

La figure 1 montre clairement la démarche à suivre pour déterminer les $F_k(x)$:

$F_k(x) = \eta_k g(x) + \mu_k$ pour $x \in D_k$, où η_k et μ_k sont deux constantes réelles.

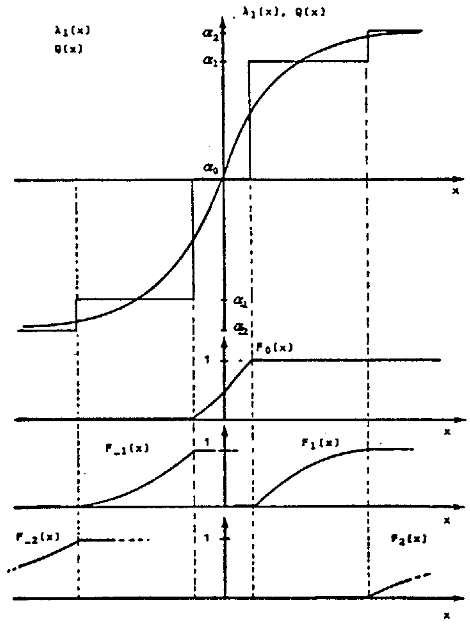

Figure 1

3 - QUANTIFICATION A REFERENCE STOCHASTIQUE

3-1 Définition

Nous définissons la quantification à R.S. comme un cas particulier de la Quantification Aléatoire du § 2, obtenue lorsque une seule V.A. dite Source Auxiliaire est utilisée pour la génération des seuils aléatoires.

Cette définition recouvre deux cas d'importance pratique :

- Quantificateur non uniforme à transfert moyen linéaire

Soit un quantificateur non uniforme, tel que représenté figure 2 et un transfert moyen linéaire.

$$E\left[X_Q\right] = E\left[g(X)\right] = E\left[X\right] \qquad (3\text{-}1)$$

Ce qui a été exposé au § 2-3 permet de vérifier que $F_k(x) = \dfrac{x}{\alpha_k - \alpha_{k+1}} + \text{Cte}$, pour $x \in \left[\alpha_{k-1}, \alpha_k\right]$

Tous les seuils aléatoires B_k peuvent donc être générés à partir d'une seule S.A. à distribution uniforme sur $\left[0,1\right]$, après une transformation linéaire simple (translation, homotétie).

La figure 2 illustre ce propos pour le cas, riche d'application, où $\alpha_k = 2^k$. Les α_k ont une représentation binaire à un seul bit non nul (ce qui simplifie les traitements numériques).

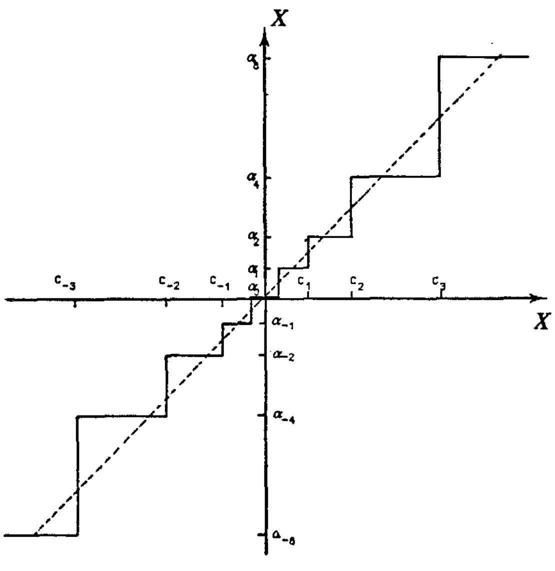

Figure 2

- Quantificateur uniforme

C'est un cas particulier du précédent, à partir duquel (11) a introduit le principe de référence stochastique.

En effet : $\alpha_k = (k+\theta)\,\alpha \quad (\alpha \in R^+)$

où $\theta \in \left[0, \alpha\right[$, est une constante prenant en général les valeurs 0 ou $\alpha/2$ (quantification de type A ou B au sens de BONNET (12) (13)).

De là : $F_k(x) = F(x) = \dfrac{x - \text{Cte}}{\alpha}$

et le schéma fonctionnel du Quantificateur à Référence Stochastique se réduit au schéma de la figure 3.

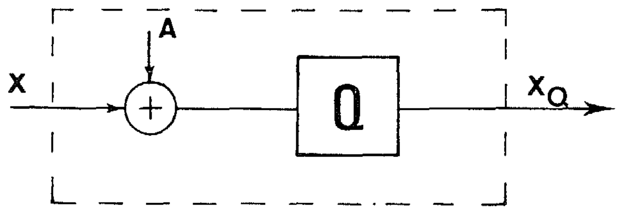

Figure 3

C'est ce cas particulier qui, jusqu'à présent a donné lieu au plus grand nombre d'applications.

Nous allons dans ce qui suit l'étudier en détail.

3-2 Etude particulière du Quantificateur uniforme à R.S.

Pour cet exposé, nous allons nous limiter à l'étude du moment d'ordre 1, mais une étude à l'ordre n a été effectuée dans (15).

La relation (2-6) conduit à :

$$\lambda_1(x) = \alpha.\ \text{v.p.} \sum_k \left[\frac{1}{2} - F_A\,(k\alpha - x)\right] \qquad (3\text{-}2)$$

où $F_A(x)$ est la fonction de répartition de la S.A..

(3-2) permet donc, pour toute S.A., de connaître la non-linéarité moyenne du quantificateur (cf. figure 4) et, par exemple, de calculer le biais d'estimateurs utilisant un quantificateur à R.S. de S.A. arbitraire.

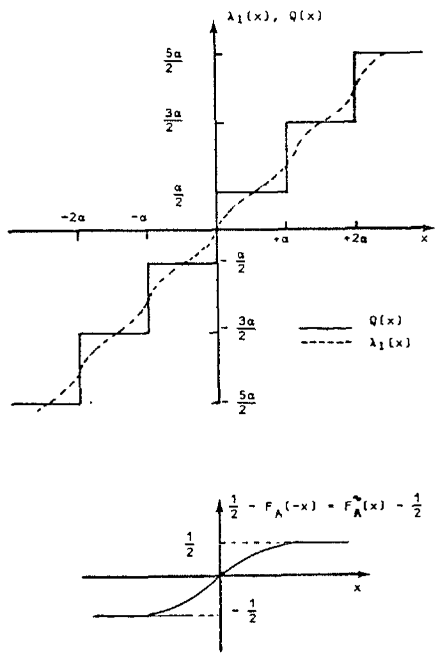

Figure 4

Nous avons étudié la classe des S.A. qui conduisent à une transformation linéaire, i.e. telles que :

$$E\left[X_Q\right] = E\left[X\right]$$

Nous avons établi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que (15) :

$$\sum_k P_a(x-k\alpha) = \frac{1}{\alpha} \qquad (3\text{-}3)$$

ce qui permet de retrouver la condition nécessaire et suffisante, dont la suffisance a été montrée dans (11) :

$$\emptyset_A\left(k\frac{2\pi}{\alpha}\right) = 0 \qquad (k \in Z^*) \qquad (3\text{-}4)$$

où $P_A(x)$ est la d.d.p. de A, et $\emptyset_A(u)$ sa fonction caractéristique. (3-3) permet de donner une interprétation géométrique claire à (3-4), dans le plan de la d.d.p. où s'effectue en général la synthèse de S.A.

On peut en effet voir par (3-3) que la classe des S.A. ainsi définie ne se limite pas aux convolutions de lois uniformes, avec des lois quelconques, mais est beaucoup plus large : elle comprend en particulier des lois non symétriques, multimodales, etc... En outre, (3-3) peut servir d'équation de départ dans l'étude de lois $P_A(x)$ conduisant à la "moindre distorsion" de $\lambda_1(x)$ à l'intérieur d'une classe fixée de V.A. (cf. e.g.(8) pour les transformations non linéaires de lois normales).

4- QUELQUES APPLICATIONS

Les efforts du GAPSE dans ce domaine sont orientés selon deux axes : le Calcul Stochastique et la mesure numérique de fonctions de corrélation, à très large bande (8).

Les très intéressantes perspectives du Calcul Stochastique font l'objet d'une autre communication au présent Colloque.

Quant aux performances d'estimateurs de fonctions de corrélation (3-2) et (3-3) permettent de les apprécier lorsque l'on utilise des Sources Auxiliaires quelconques.

En particulier (8) étudie les distorsions simples de bruits gaussiens, qui conduisent à des S.A. convenant à ces estimateurs. Elles doivent permettre l'extension de ces mesures à une largeur de bande de l'ordre du GHz.

Nous reproduisons figure 5 histogramme et fonction de répartition expérimentale ainsi obtenue.

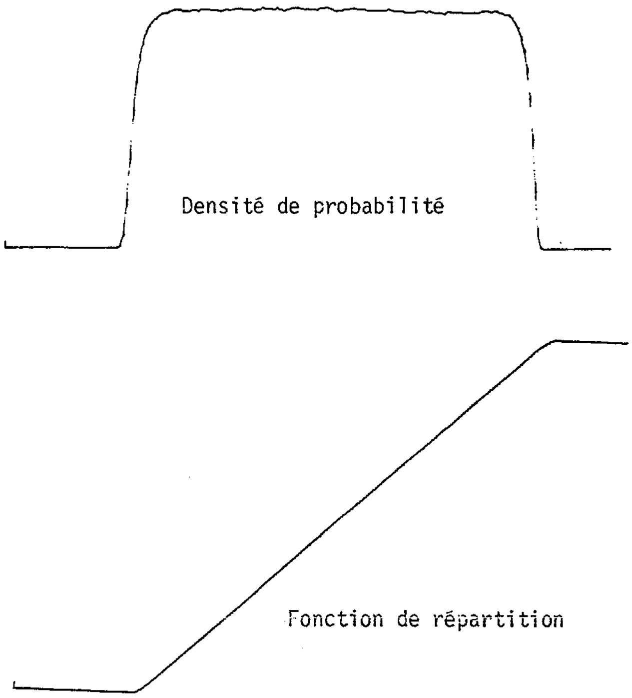

Figure 5

BIBLIOGRAPHIE

(1) ALBAREDA A.
Estimation par Références Stochastiques : Influence de la liaison statistique entre échantillons.
Thèse 3° Cycle, Toulouse 1975.

(2) BONNET G.
Sur la Statistique au 2è ordre des Signaux Aléatoires Quantifiés.
CRAS, 1962, N° 255, pp. 825-827.

(3) BONNET G.
Sur certaines propriétés des fonctions de corrélation de Signaux Laplaciens Quantifiés.
CRAS, 1962, n° 255, pp. 1064-1066.

(4) CASTANIE F.
Conception et réalisation d'un Corrélateur vidéo-fréquence à Sources de nombres aléatoires.
Thèse 3° Cycle, Toulouse 1971.

(5) CASTANIE F.
Extension aux Signaux à très large bande de l'Analyse Corrélatoire et Spectrale par corrélation à Référence Stochastique.
Congrès International MESUCORA 1973, Session 5, n° 19.

(6) CASTANIE F., HOFFMANN J.C., LACAZE B.
On the Performance of Random Reference Correlator.
IEEE Trans.on I.T., Vol. IT 20, n° 2, March 1974, pp.266-269.

(7) CASTANIE F., HOFFMANN J.C., VERNIERES F.
Contrat DGRST, 1977/78.

(8) COLDEFY P.
Sources de bruit ultra-large bande pour Corrélation à Référence Stochastique.
Thèse 3° Cycle, à soutenir en 1977, Toulouse.

(9) IKEBE J., SATO T.
A New Integrator using Random Voltage.
Electrotech. 5. Japan, vol. 7, n° 2, 196.

(10) JESPERS P., CHU P.T., FETTWEISS A.
A new Method for computing correlation function.
International Symp. on Information Theory, Sept. 1962, Brussels.

(11) KE YEN CHANG, MOORE
Modified digital Correlation and its Estimation errors.
IEEE on I.T. vol. 16, n° 6, Nov. 1970.

(12) Von NEUMANN
Probalistic logics and Synthesis of reliable organism from unreliables components.
Automata Studies. Princeton Univ. Press 1956.

(13) SATO T.
Autocorrelator using random voltage method.
Automat. Contr. Vol. 7, pp. 8-12, Janv. 1960.

(14) VELTMANN B.P.T., KWAKERNAAK H.
Theorie und Teknik des polaritätskorrelation für die dynamische analyse nieder frequenter Signale und Systeme.
Regelungstechnik, Vol. 9, Sept. 1961, pp. 357-364.

(15) CASTANIE F.
Estimation de moments par quantification à Référence Stochastique.
Thèse Dr-d'Etat à paraître.