COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

ASPECTS PARTICULIERS DES TESTS OPTIMAUX D'HYPOTHESES MULTIPLES EN DETECTION ACTIVE

FORSTER Alfred

GROUPE D'ETUDES "SIGNAUX ET SYSTEMES" - CENTRE UNIVERSITAIRE DE TOULON ET DU VAR - 83130 LA GARDE

RESUME

RESUME

L'application à la détection active des tests optimaux d'hypothèses multiples (N hypothèses "signal") soulève certains problèmes de détail.

Ainsi, le caractère composite de l'hypothèse $\tilde{H}_0$ "bruit seul", qui existe alors, même lorsque le bruit est de covariance connue, intervient dans la formulation du test, conjointement au caractère d'indépendance ou de dépendance statistique des paramètres du signal.

Le présent texte explicite ces deux points pour aboutir au mécanisme général de dispersion fictive de $\tilde{H}_0$ en N hypothèses "bruit" dans l'espace des paramètres du signal et de combinaison deux à deux des N + N hypothèses en vue de la réduction possible à un test formulé à l'aide de N + 1 probabilités.

Le texte développe le cas d'un bruit gaussien non stationnaire de puissance moyenne aléatoire ou à modèle stationnaire tangent (M hypothèses "bruit"). On a étudié, pour la détection active régulière ou singulière (cas asymptotique), la formulation réduite à M . (N + 1) hypothèses (au lieu de M.N + M.N) du test de Neyman-Pearson optimal à probabilité de fausse alarme conditionnelle constante.

On a explicité dans ce cas le type de filtrage de l'observation et la forme hermitique de la fonction d'ambiguïté généralisée déduits de la structure du test.

SUMMARY

ABSTRACT

The application to active detection of multiple hypothesis optimal tests (N hypothesis of signal) sets some slight problems.

So, the composite character of the $\tilde{H}_0$ hypothesis (noise only) which exists then even when the covariance of noise is known, takes a part in the formulation of the test jointly with statistical independance or dependance of signal's parameters.

This work explicits these two points in order to lead to the general technique of fictive dispersion of $\tilde{H}_0$ into N hypothesis of noise in the space of parameters of signal and of two by two grouping of the N + N hypothesis in order to reduce them to a test formulated with N + 1 probabilities.

The cases of non-stationnary gaussian noise with random mean power or with tangential stationnary model (M hypothesis of noise) are developped. The formulation reduced to M (N+1) hypothesis (instead of MN+MN) of the Neyman-Pearson's optimal test with constant conditional wrong alarm probability is studied for singular or regular active detection (asymptotic case).

The type of filtering and the hermitian form of generalised ambiguity function, deducted from the structure of the test, are specified.

ASPECTS PARTICULIERS DES TESTS OPTIMAUX D'HYPOTHESES MULTIPLES EN DETECTION ACTIVE

I - *TESTS OPTIMAUX D'HYPOTHESES MULTIPLES. CAS DE LA DETECTION ACTIVE* Réf. [1], [2], [3]

Les test d'hypothèses multiples sont définis sur N + 1 hypothèses simples comparables (N quelconque). Dans le problème de la détection active nous sommes en présence de N + 1 hypothèses où N hypothèses C_j , H_j "signal présent de paramètre j" sont de même nature et où l'hypothèse C_0 , H_0 "signal absent ou bruit seul" se présente comme une hypothèse composite dont la nature probabiliste est comparable à l'hypothèse composite H_1 "signal présent" On ne peut donc pas étendre d'emblée la structure du test à N + 1 hypothèses comparables aux N + 1 hypothèses de la détection active, mais on peut le faire sans modification aux 2N hypothèses comparables H_i et B_i suivantes :

$\tilde{H}_0$ hypothèse composite $= \bigcup_{i=1}^{N} B_i$

$\tilde{H}_1$ hypothèse composite $= \bigcup_{i=1}^{N} C_i$

Les B_i sont supposés être des évènements incompatibles entre eux et avec les évènements C_i

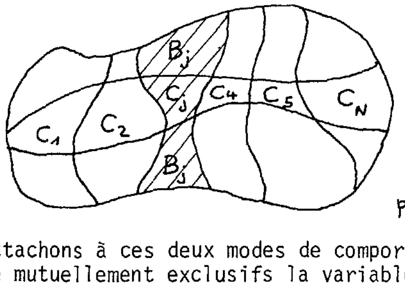
Cette dispersion fictive (car la dispersion réelle est inaccessible) de l'hypothèse

$\tilde{H}_0 = \bigcup_{i=1}^{N} C_j$ sous la forme

$\tilde{H}_0 = \bigcup_{i=1}^{N} B_i$ peut se faire par le biais

de la considération d'une cible fictive (toujours présente) pouvant présenter deux propriétés mutuellement exclusives : celle de délivrer au récepteur le signal $\vec{\mathcal{S}}(t;\vec{\theta}_j)$ de gabarit S (t) ou le signal $\vec{\mathcal{O}}(t;\vec{\theta}_j)$ de gabarit 0 (t) où $0(t) \equiv 0 \quad \forall t$ lorsque le paramètre de la cible a pour valeur $\vec{\theta}_j$; c'est-à-dire qu'on suppose que la cible possède soit un coefficient de réflexion $r = A\cdot f(\tau)$ ($f(\tau)$ fonction d'atténuation spatiale) soit la propriété de ne rien émettre (nous envisageons cette propriété comme distincte de celle d'une cible non réfléchissante)

$\tau \in [0, \mathcal{T}]$



$S(t) \# 0$ pour $t \in [0,T]$

Attachons à ces deux modes de comportement physique mutuellement exclusifs la variable aléatoire $\mathcal{S}$ pouvant prendre les deux valeurs $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_0$

Notre problème est alors régit par les probabilités suivantes

Probabilité de l'observation

$$\vec{\theta}_j \begin{cases} \tau_q \\ K_p \\ A_m \end{cases} \qquad \vec{\theta}_\ell \begin{cases} \tau_q \\ K_p \end{cases} \qquad \vec{\theta}_j \begin{cases} \vec{\theta}_\ell \\ A_m \end{cases}$$

$$\vec{\mathcal{O}}_j = A_m \cdot \vec{\mathcal{O}}_\ell = \left\{ A_m \cdot 0\left[K_p(t_i - \tau_q)\right]\right\} \equiv 0$$

$$\vec{\mathcal{S}}_j = A_m \cdot \vec{\mathcal{S}}_\ell = \left\{ A_m \cdot S\left[K_p(t_i - \tau_q)\right]\right\}$$

$$p\left(\vec{X}/_{\vec{\theta}_j,\mathcal{S}_0}\right) = p_0(\vec{X} - \vec{\mathcal{O}}_j) = p_0(\vec{X})$$

$$p\left(\vec{X}/_{\vec{\theta}_j,\mathcal{S}_1}\right) = p_j(\vec{X}) = p_0(\vec{X} - \vec{\mathcal{S}}_j)$$

$$P_r(\vec{\theta}_j, \vec{X}) = P_r(\vec{\theta}_j, \vec{X}, \mathcal{S}_0) + P_r(\vec{\theta}_j, \vec{X}, \mathcal{S}_1)$$

$$p_r(\vec{X}, B_j) = p_r(\vec{\theta}_j, \vec{X}, \mathcal{S}_0) = \amalg_j \cdot p\left(\vec{X}/_{\vec{\theta}_j,\mathcal{S}_0}\right) = \amalg_j \cdot p_0(\vec{X} - \vec{\mathcal{O}}) = \amalg_j \, p_0(\vec{X})$$

$$p_r(\vec{X}, C_j) = p_r(\vec{\theta}_j, \vec{X}, \mathcal{S}_1) = \pi_j \cdot p\left(\vec{X}/_{\vec{\theta}_j,\mathcal{S}_1}\right) = \pi_j \cdot p_j(\vec{X}) = \pi_j \, p_0(\vec{X} - \vec{\mathcal{S}}_j)$$

où $\amalg_j = P_r(\vec{\theta}_j, \mathcal{S}_0) = \tilde{\pi}_0 \cdot \amalg'_j$

$\pi_j = P_r(\vec{\theta}_j, \mathcal{S}_1) = \tilde{\pi}_1 \cdot \pi'_j$

$P_r(\mathcal{S}_0) = P_r(\tilde{H}_0) = \tilde{\pi}_0 \qquad p_r\left(\vec{\theta}_j/_{\mathcal{S}_0}\right) = \amalg'_j$

$P_r(\mathcal{S}_1) = P_r(\tilde{H}_1) = \tilde{\pi}_1 \qquad p_r\left(\vec{\theta}_j/_{\mathcal{S}_1}\right) = \pi'_j$

Le test de Bayes consiste alors à prendre une décision en faveur de l'hypothèse parmi les 2 N hypothèses ayant une probabilité à postériori maximale ces probabilités étant

$\tilde{\pi}_0 \cdot \amalg'_j \cdot p_0(\vec{X}) \qquad j$ de 1 à N

$\tilde{\pi}_1 \cdot \pi'_j \cdot p_j(\vec{X}) \qquad j$ de 1 à N

($p(\vec{X})$ peut être omis)

Les tests sous optimaux que l'on peut en déduire par composition partielle ou totale des hypothèses sont les suivants :

- composition suivant l'amplitude A_m

  on choisit l'hypothèse de probabilité à postériori maximale parmi

  $L = P \cdot Q$

  $N = L \cdot M$

  $\tilde{\pi}_0 \cdot \amalg'_\ell \cdot p_0(\vec{X}) \qquad \pi'_\ell = \sum_m \pi'_{\ell,m}$

  $\tilde{\pi}_1 \cdot \pi'_\ell \cdot p_\ell(\vec{X}) \qquad p_\ell(\vec{X}) = \dfrac{\sum_m \pi'_{\ell,m} \cdot p_{\ell,m}(\vec{X})}{\sum_m \pi'_{\ell,m}}$

- composition totale : on prend une décision en faveur de l'hypothèse de probabilité à postériori maximale parmi :

  $\tilde{\pi}_0 \cdot p_0(\vec{X})$

  $\tilde{\pi}_1 \cdot p_1(\vec{X})$

Si l'on avait considéré dès le départ le paramètre A_m comme indésirable c'est-à-dire si l'on avait voulu construire un test n'amenant qu'une classification suivant $\vec{\theta} \begin{cases} \tau \\ K \end{cases}$ on aurait pu obtenir la même répartition de probabilité en dispersant l'hypothèse composite $\tilde{H}_0$ suivant $\vec{\theta}$ par le biais d'une cible fictive ayant la double propriété exclusive d'être réfléchissante ou totalement absorbante.

$\tilde{\pi}_0 \cdot \amalg'_\ell \cdot \delta(A)\,dA \cdot p_{j=(\ell,A)}(\vec{X}) \qquad \amalg'_j = \amalg'_\ell \cdot \delta(A)\,dA$

$p_{\ell,0}(\vec{X}) = p_0(\vec{X})$

$\tilde{\pi}_1 \cdot \pi'_j \cdot p_j(\vec{X})$

Les probabilités à comparer en vue de la décision sont alors

$$\int_A \tilde{\pi}_0 \mu'_\ell \,\delta(A)\, p_{j=(\ell,A)}(\vec{X})\, dA = \tilde{\pi}_0 \mu'_\ell\, p_{j=\ell,0}(\vec{X}) = \tilde{\pi}_0 \mu'_\ell\, p_0(\vec{X})$$

$$\sum_{m=1}^{M} \tilde{\pi}_1 \pi'_j\, p_j(\vec{X}) = \tilde{\pi}_1 \pi'_\ell\, p_\ell(\vec{X})$$

I.1 - *Nature de la loi de probabilité μ'_j*

La loi de probabilité μ'_j introduit une classification à l'intérieur de l'hypothèse $\tilde{H}_0$ (classification qui ne dépend en rien de l'observation et qui est donc totalement à priori) et conduit à affecter à la même case j dans $\tilde{H}_0$ le résultat en cas de rejet de l'hypothèse $\tilde{H}_1$.

Cette situation est physiquement inconfortable en ce sens que l'observation ne présentant aucune information sur μ'_j ne permet aucun apprentissage de la loi μ'_j dont on pourrait tenir compte par la suite comme connaissance à priori pour la classification (cette situation est totalement différente de celle existante pour la loi π'_j).

La seule issue raisonnable est donc la décomposition de l'hypothèse $\tilde{H}_0$ en N hypothèses indicernables ce qui revient à se donner une loi de probabilité μ'_j uniforme

$$\mu'_{j \text{ de } 1 \text{ à } N} = \frac{1}{N}$$

Cette valeur de probabilité sera dénommée par la suite π'_0

$$\mu'_1 = \mu'_2 = \mu'_3 = \cdots\cdots = \mu'_N = \pi'_0 = \frac{1}{N} = \frac{1}{M\cdot P\cdot Q}$$

On posera aussi

$$\pi_0 = \tilde{\pi}_0 \cdot \pi'_0 = \tilde{\pi}_0 / N$$

Le problème de la comparaison des 2N hypothèses (B_j, C_j) est ainsi ramené à la comparaison de N + 1 probabilités afférentes aux N hypothèse C_j j de 1 à N et à la probabilité d'une hypothèse

$$C_0 , H_0$$

représentant une des N hypothèses indicernables B_j j de 1 à N de probabilité à priori $\pi_0 = \tilde{\pi}_0/N$

Ces N + 1 probabilités sont

$$\pi_0 p_0(\vec{X}), \cdots\cdots \pi_0 p_0(\vec{X}), \cdots\cdots \pi_0 p_0(\vec{X}),$$

$$\pi_1 p_1(\vec{X}), \pi_2 p_2(\vec{X}), \cdots\cdots\cdots\cdots \pi_N p_N(\vec{X})$$

Ceci défini N + 1 domaines disjoints de l'espace d'observation

Le test optimal de Bayes en détection active revient donc à prendre une décision en faveur de l'hypothèse de valeur de probabilité maximale parmi les N + 1 valeurs de probabilité précédentes

Dans le cas d'une distribution continue de la probabilité à priori du paramètre $\vec{\theta}$

$$\pi'_0 = \frac{1}{N} \qquad \text{devient} \qquad \pi'_0 = \frac{1}{\Delta\vec{\theta}}\, d\vec{\theta} = \pi'\, d\vec{\theta}$$

$$= \frac{1}{\Delta A \cdot \Delta K \cdot \Delta\tau}\, dA\, dK\, d\tau$$

avec la densité

$$\pi' = \frac{1}{\Delta\vec{\theta}} = \frac{1}{V} = \frac{1}{\Delta A \cdot \Delta K \cdot \Delta\tau}$$

$$\Delta\tau = \tau_{Max} - \tau_{min}$$

$$\Delta K = K_{Max} - K_{min}$$

$$\Delta A = A_{Max} - A_{min}$$

Il est à noter alors qu'en détection active la restriction a une formulation du test de Bayes optimal à l'aide de N + 1 probabilités à priori comparables, entraine que

$$\sum_0^N \pi_j < 1 \qquad \text{puisqu'on a} \qquad N\pi_0 + \sum_1^N \pi_j = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1-\tilde{\pi}_1}{N}$$

$$\text{et } \beta_0 = \frac{P_0}{N} \qquad \tilde{\pi}_0 = N\cdot\pi_0$$

tandis que le test de Bayes construit sur N + 1 hypothèses comparables où l'on explicite arbitrairement une hypothèse H_0 simple possède la propriété

$$\sum_0^N \pi_j = 1 \qquad \beta_0 = P_0$$

En effet, on peut donner à la partition correspondant au cas d'une hypothèse $\tilde{H}_0$ composite de N hypothèses indicernables la forme singulière suivante

$$D_{0j}(\vec{X}) = D_0(\vec{X}) = \frac{\tilde{D}_0(\vec{X})}{N} \quad \text{où seul } \tilde{D}_0(\vec{X}) = 1 \text{ si } \vec{X} \in \tilde{\mathcal{D}}_0$$

Probabilité de décision correcte $\qquad \mathcal{D}_{0j} = \mathcal{D}_0 = \tilde{\mathcal{D}}_0$

$$P_c = \sum_{j=1}^{N} \int D_{0j}(\vec{X})\, \pi_0\, p_0(\vec{X})\, d\vec{X} + \sum_{j=1}^{N} \int D_j(\vec{X})\, \pi_j\, p_j(\vec{X})\, d\vec{X}$$

$$= \int_{\tilde{\mathcal{D}}_0} \pi_0\, p_0(\vec{X})\, d\vec{X} + \sum_{j=1}^{N} \int D_j(\vec{X})\, \pi_j\, p_j(\vec{X})\, d\vec{X}$$

$$P_c = \pi_0 P_0 + \tilde{\pi}_1 \beta_1 = \tilde{\pi}_0 \beta_0 + \tilde{\pi}_1 \beta_1$$

$$P_0 = \int_{\tilde{\mathcal{D}}_0} \sum_{i=1}^{N} \pi'_0\, p_0(\vec{X})\, d\vec{X} = \int_{\tilde{\mathcal{D}}_0} \tilde{p}_0(\vec{X})\, d\vec{X} = \int_{\mathcal{D}_0} p_0(\vec{X})\, d\vec{X}$$

$$P_1 = \int_{\tilde{\mathcal{D}}_1} \sum_{j=1}^{N} \pi'_j\, p_j(\vec{X})\, d\vec{X} = \int_{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{p}_1(\vec{X})\, d\vec{X}$$

$$\text{donc } \beta_0 = \frac{P_0}{N}$$

Modifions quelque peu l'expression de la probabilité de décision correcte

$$P_c = \tilde{\pi}_0 \beta_0^{\#} (1-\alpha) + \tilde{\pi}_1 \beta_1 \qquad \beta_1 = \beta \qquad \beta_0^{\#} = 1/N$$

donc

$$P_c = \beta_0^{\#} \left[\tilde{\pi}_0 + (1-\tilde{\pi}_0)\left(\frac{\beta_1}{\beta_0^{\#}} - k\alpha\right)\right] \qquad k = \frac{\tilde{\pi}_0}{1-\tilde{\pi}_0}$$

$N\beta - k\alpha$ est donc maximum pour la solution de Bayes définie par la partition particulière en domaines $\mathcal{D}_j$

(Il est à noter que $N\cdot\beta$ reste fini ainsi que $N\cdot P_c$ lorsque $N \to \infty$ c'est-à-dire lors du passage à une distribution de probabilité à priori continue)

I.2 - *Mécanisme de combinaison deux à deux des hypothèses simples dans le cas des paramètres statistiquement non indépendants*

Cas des paramètres indépendants

Les distributions des probabilités à postériori (à $p(\vec{X})$ près) dans les deux hypothèses sont alors

$$\tilde{H}_0 \qquad \tilde{\pi}_0\, \mu'(\vec{\theta})\, p_0(\vec{X})\, d\vec{\theta} \qquad \mu'(\vec{\theta}) = \mu'(\vec{\theta}) \cdot \mu'(r)$$

$$\tilde{H}_1 \qquad \tilde{\pi}_1\, \pi'(\vec{\theta})\, p_1(\vec{X})\, d\vec{\theta} \qquad \pi'(\vec{\theta}) = \pi'(\vec{\theta}) \cdot \pi'(r)$$

ESPECTS PARTICULIERS DES TESTS OPTIMAUX D'HYPOTHESES MULTIPLES EN DETECTION ACTIVE

Le principe d'indicernabilité dans l'hypothèse $\tilde{H}_0$ impose le choix suivant des lois à priori

$$\amalg'(\vec{\theta}) = C_{te} = 1/L \quad \text{et} \quad \amalg'(r) = C_{te} = 1/M$$

La détection et l'estimation des paramètres utilisent par suite la comparaison des probabilités suivantes (au nombre de N + 1 dans le cas discret) :

$$\tilde{\pi}_0 \ , \ \tilde{\pi}_1 \frac{\pi'(\vec{\theta})\ p(\vec{X};\vec{\theta})}{\pi'\ p_0(\vec{X})} \qquad \tilde{\pi}_0 \ , \ \tilde{\pi}_1 \Lambda_r(\vec{X};\vec{\theta};r)$$

$$\tilde{\pi}_0 \ , \ \tilde{\pi}_1 \frac{\pi'(\vec{\theta})\pi'(r)\ p(\vec{X};\vec{\theta};r/f(\tau))}{\pi'\ p_0(\vec{X})}$$

Cas des paramètres non indépendants

Introduisons le paramètre aléatoire non indépendant $A = r/f(\tau)$

Les lois de probabilités à postériori dans les deux hypothèses sont :

$$\tilde{H}_0 \quad \tilde{\pi}_0 \amalg(\vec{\theta}) p_0(A/\vec{\theta})\, p_0(\vec{X})\, d\vec{\theta}\, dA \qquad p_0(A/\vec{\theta}) = \amalg[A\cdot f(\tau)]\cdot f(\tau)$$

$$\tilde{H}_1 \quad \tilde{\pi}_1 \pi'(\vec{\theta}) p_1(A/\vec{\theta})\, p(\vec{X};\vec{\theta};A)\, d\vec{\theta}\, dA \qquad p_1(A/\vec{\theta}) = \pi'[A\cdot f(\tau)]\cdot f(\tau)$$

Montrons que la comparaison des hypothèses en nombre N sous H_0 et N sous $\tilde{H}_1$ doit se faire entre elles deux à deux à τ donné et qu'il faut maintenir l'uniformité des lois des paramètres indépendants (composantes de $\vec{\theta}$) sous l'hypothèse $\tilde{H}_0$

En effet si l'on applique cela on obtient une distribution réduite de N + 1 probabilités

$$\tilde{\pi}_0 \ , \ \tilde{\pi}_1 \frac{\pi'(\vec{\theta})\pi[A\cdot f(\tau)]\ p(\vec{X};\vec{\theta};A)}{\pi' \cdot p_0(\vec{X})} \ ; \ \tilde{\pi}_0 \ , \ \tilde{\pi}_1 \Lambda(\vec{X};\vec{\theta};A)$$

qui est la distribution du cas précédent calculée pour $r = A\cdot f(\tau)$

Les deux distributions donnent alors comme cela est nécessaire une même valeur estimée $\hat{\tau}$ et $\hat{K}$ et des grandeurs estimées $\hat{A}$ et $\hat{r}$ liées par la relation

$$\hat{A} = \frac{\hat{r}}{f(\hat{\tau})}$$ (la grandeur estimée $\hat{\tau}$ est la même dans les deux cas)

puisque $\Lambda(\vec{X};\vec{\theta};A) = \Lambda_r(\vec{X};\vec{\theta};r = A\cdot f(\tau))$

En effet $\hat{K}, \hat{r}$ et $\hat{\tau}$ est le triplet solution du système d'équations simultanées

$$\frac{\partial\Lambda_r}{\partial\tau} = \Lambda^{(1)}_{\tau r}(\tau;K;r) = 0 \qquad \frac{\partial\Lambda_r}{\partial K} = \Lambda^{(1)}_{Kr}(\tau;K;r) = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda_r}{\partial r} = \Lambda^{(1)}_{rr}(\tau;K;r) = 0$$

$$① \ \Lambda^{(1)}_{\tau r}(\hat{\tau};\hat{K};\hat{r}) = 0 \qquad ② \ \Lambda^{(1)}_{Kr}(\hat{\tau};\hat{K};\hat{r}) = 0 \qquad ③ \ \Lambda^{(1)}_{rr}(\hat{\tau};\hat{K};\hat{r}) = 0$$

de même le système d'équations suivant fournit l'estimé du paramètre vectoriel dans le deuxième cas

$$\frac{\partial\Lambda_r}{\partial\tau} = 0 = \frac{\partial\Lambda_r}{\partial\tau} + \frac{\partial\Lambda_r}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial\tau} = \Lambda^{(1)}_{\tau r}(\tau;K;f(\tau)\cdot A) + \Lambda^{(1)}_{rr}(\tau;K;A\cdot f(\tau))\cdot A\cdot f^{(1)}(\tau)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial K} = 0 = \frac{\partial\Lambda_r}{\partial K} = \Lambda^{(1)}_{Kr}(\tau;K;A\cdot f(\tau))$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial A} = 0 = \frac{\partial\Lambda_r}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial A} = \Lambda^{(1)}_{rr}(\tau;K;A\cdot f(\tau))\cdot f(\tau)$$

Vérifions que le triplet $\tau = \hat{\tau}$, $K = \hat{K}$, $A = \hat{r}/f(\hat{\tau})$ calculé à partir du triplet solution du premier système est précisément solution de ce système:

$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\tau}\right)_{\hat{\tau},\hat{K},\hat{r}/f(\hat{\tau})} = \Lambda^{(1)}_{\tau r}(\hat{\tau},\hat{K},\hat{r}) + \Lambda^{(1)}_{rr}(\hat{\tau},\hat{K},\hat{r})\cdot\hat{r}\cdot\frac{f^{(1)}(\hat{\tau})}{f(\hat{\tau})} \overset{③}{\underset{①}{=}} 0$$

$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial K}\right)_{\hat{\tau},\hat{K},\hat{r}/f(\hat{\tau})} = \Lambda^{(1)}_{Kr}(\hat{\tau},\hat{K},\hat{r}) \underset{②}{=} 0$$

$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial A}\right)_{\hat{\tau},\hat{K},\hat{r}/f(\hat{\tau})} = \Lambda^{(1)}_{rr}(\hat{\tau},\hat{K},\hat{\tau})\cdot f(\hat{\tau}) = 0 \quad ③$$

C.Q.F.D.

I.3 - *Formulation des tests de Bayes et de et de Neyman Pearson sous la forme du rapport des maximas des probabilités à postériori*

$$\Lambda(\vec{X}) = \underset{j\,de\,1\,\grave{a}\,N}{Max} \frac{\pi'_j}{\pi'_0}\cdot\frac{p_j(\vec{X})}{p_0(\vec{X})} \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1,\ \hat{i}=j \text{ du max}}{\gtrless}} \begin{cases} \tilde{\pi}_0/\tilde{\pi}_1 \rightarrow \text{Bayes} \\ \Delta(\alpha_0) \rightarrow \text{Neyman Pearson} \end{cases}$$

$$\frac{\pi'_{\hat{i}}}{\pi'_0}\cdot\frac{p_{\hat{i}}(\vec{X})}{p_0(\vec{X})} = \underset{j\,de\,1\,\grave{a}\,N}{Max} \frac{\pi'_j}{\pi'_0}\cdot\frac{p_j(\vec{X})}{p_0(\vec{X})} \quad \Big| \quad \alpha = P_r\left(\tilde{D}_1/\tilde{H}_0\right) \quad \beta = P_{\tilde{D}_1}/P_1 = Max$$

II - *EXPRESSION DU TEST DE BAYES ET NEYMAN-PEARSON (N.P.) OPTIMAL DANS LE CAS D'UN BRUIT GAUSSIEN NON STATIONNAIRE DE COVARIANCE CONNUE (TEST ASYMPTOTIQUE DANS LE CAS D'UN PARAMETRE $\vec{\theta}$ CONTINU)*

$$X(t) = \sqrt{a}\ Y(t) \qquad \Gamma' = a\,\Gamma \qquad \text{Réf. [1]}$$

$$\Lambda(x(t)) = \underset{\vec{\theta}}{Max} \frac{\pi(\vec{\theta})}{\pi'} \exp\left[\frac{1}{2a} G_{\vec{\theta}}\right] \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1,\hat{\vec{\theta}}}{\gtrless}} \begin{matrix} \tilde{\pi}_0/\tilde{\pi}_1 & \text{Bayes} \\ \Delta(\alpha_0) & \text{N.P} \end{matrix}$$

avec $\hat{\vec{\theta}}$ solution de $\frac{\frac{\partial}{\partial\vec{\theta}}\pi'(\vec{\theta})}{\pi'(\vec{\theta})} - \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial\vec{\theta}} G_{\vec{\theta}} = 0$

$$G_{\vec{\theta}} = 2\cdot R_{\vec{\theta}} - \Psi_{\vec{\theta}} = 2\cdot A\cdot R_{\vec{\theta}} - A^2\Psi_{\vec{\theta}} \quad \text{avec}$$

$$S_{\vec{\theta}} = A\, S_{\vec{\theta}} \ ; \ \int_{T_1}^{t_0}\Gamma(t,t')\,Q_{\vec{\theta}}(t')\,dt' = S_{\vec{\theta}}(t),\ t\in[T_1,t_0];$$

$$R_{\vec{\theta}} = \int_{T_1}^{t_0} X(t)\,Q_{\vec{\theta}}(t)\,dt \ ; \ \Psi_{\vec{\theta}} = \int_{T_1}^{t_0} S_{\vec{\theta}}(t)\cdot Q_{\vec{\theta}}(t)\,dt$$

$t \in [0, \mathcal{T}+T]$ intervalle d'analyse

τ retard $\in [0,\mathcal{T}]$; t_0 instant de décision partielle $t_0 \in [0,\mathcal{T}+T]$; $t_0 = \mathcal{T}+T$ instant de décision finale ; T_1 instant antérieur à t=0, généralement on utilisera l'observation à partir de $T_1 = -\Delta$ si Δ est la durée maximale de la mémoire statistique du bruit. Lorsque la loi $\pi'(r)$ est uniforme, le test se réduit à

$$\underset{\vec{\theta}}{Max}\left[\operatorname{Log}\frac{\pi'(\vec{\theta})}{\pi'} + \frac{1}{2a}\frac{R^2_{\vec{\theta}}}{\Psi_{\vec{\theta}}}\right] \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1,\hat{\vec{\theta}}}{\gtrless}} \begin{matrix} \operatorname{Log}\tilde{\pi}_0/\tilde{\pi}_1 & \text{Bayes} \\ \operatorname{Log}\Delta(\alpha_0) & \text{N.P} \end{matrix}$$

III - *BRUIT GAUSSIEN NON STATIONNAIRE DE PUISSANCE MOYENNE ALEATOIRE* Réf. [2],[3],[4]

Soit le bruit de puissance moyenne aléatoire

$$X(t) = \sqrt{a}\ Y(t) \ ; \ E_s\{X(t)X(t')/a\} = \Gamma'(t,t') = a\,\Gamma(t,t')$$

$$\Gamma(t,t') = E_s\{Y(t)\cdot Y(t')\}$$ supposée connue dans ce paragraphe

$$p_{0\Gamma'}(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{1}{\sqrt{\det\Gamma'}}e^{-\frac{1}{2}\vec{X}^T\Gamma'^{-1}\vec{X}} \ ; \ p_{0a}(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi a)^{n/2}}\frac{1}{\sqrt{\det\Gamma}}e^{-\frac{1}{2a}\vec{X}^T\Gamma^{-1}\vec{X}}$$

on a

$$p_0(\vec{X},a) = \pi'(a)\,\pi'\frac{1}{(2\pi a)^{n/2}}\frac{1}{\sqrt{\det\Gamma}}e^{-\frac{1}{2a}\vec{X}^T\Gamma^{-1}\vec{X}}$$

et $p_1(\vec{X},a,\vec{\theta}) = \pi(a)\pi(\vec{\theta})\dfrac{1}{(2\pi a)^{n/2}}\dfrac{1}{\sqrt{\det\Gamma}}e^{-\frac{1}{2a}(\vec{X}-\vec{\xi}_{\theta})^T\Gamma^{-1}(\vec{X}-\vec{\xi}_{\theta})}$

(n nombre d'instantsd'observation = nombre de composantes du vecteur d'observation)

Le test de Bayes optimal s'écrit

$$\Lambda_n = \frac{\mathrm{Max}_{a,\vec{\theta}}\, p_1(\vec{X},a,\vec{\theta})}{\mathrm{Max}_a\, p_0(\vec{X},a)} \underset{\tilde{H}_0,\hat{a}_{0n}}{\overset{\tilde{H}_1,\hat{\vec{\theta}},\hat{a}_{1n}}{\gtrless}} \frac{\tilde{\pi}_0}{\tilde{\pi}_1} \quad \begin{cases} \hat{a}_{1n} \text{ solution de } \dfrac{\partial p_1(\vec{X},a,\vec{\theta})}{\partial a}=0 \\ \hat{\vec{\theta}} \text{ solution de } \dfrac{\partial p_1(\vec{X},a,\vec{\theta})}{\partial\vec{\theta}}=0 \\ \hat{a}_{0n} \text{ solution de } \dfrac{\partial p_0(\vec{X},a)}{\partial a}=0 \end{cases}$$

soit

$$(1)\quad \Lambda_n(\vec{X}) = \frac{f_n(\vec{X})}{h_n(\vec{X})} = \frac{\pi'(\hat{a}_{1n})}{\pi'(\hat{a}_{0n})}\frac{\pi'(\vec{\theta})}{\pi'}\left[\frac{\hat{a}_{0n}}{\hat{a}_{1n}}\right]^{n/2} \underset{\tilde{H}_0,\hat{a}_{0n}}{\overset{\tilde{H}_1,\hat{\vec{\theta}},\hat{a}_{1n}}{\gtrless}} \frac{\tilde{\pi}_0}{\tilde{\pi}_1}$$

$\hat{a}_{0n}$ solution de $a - \frac{1}{n}\vec{X}^T\Gamma^{-1}\vec{X} = \frac{2a^2}{n}\cdot\frac{\pi'^{(1)}(a)}{\pi'(a)}$

$\hat{a}_{1n}, \hat{\vec{\theta}}$ solutions de $a - \frac{1}{n}(\vec{X}-\vec{\xi}_{\theta})^T\Gamma^{-1}(\vec{X}-\vec{\xi}_{\theta}) = \frac{2a^2}{n}\frac{\pi'^{(1)}(a)}{\pi'(a)}$

et $\frac{\pi'^{(1)}(\vec{\theta})}{\pi'(\vec{\theta})} - \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial\vec{\theta}}\left[(\vec{X}-\vec{\xi}_{\theta})^T\Gamma^{-1}(\vec{X}-\vec{\xi}_{\theta})\right]=0$

posons $\xi_n = \frac{1}{n}\vec{X}^T\Gamma^{-1}\vec{X}$

nous avons

$$\hat{a}_0 = \lim_{n\to\infty}\hat{a}_{0n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\vec{X}^T\Gamma^{-1}\vec{X} = \lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi$$

$$\hat{a}_1 = \lim_{n\to\infty}\hat{a}_{1n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\vec{X}-\vec{\xi}_{\hat{\theta}})^T\Gamma^{-1}(\vec{X}-\vec{\xi}_{\hat{\theta}})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\xi_n - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}G_{n\hat{\theta}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\xi_n - \lim_{n\to\infty}g_{n\hat{\theta}}$$

$\hat{a}_1 = \xi - g_{\hat{\theta}}$ avec $\hat{\vec{\theta}}$ solution de

$$\frac{\partial}{\partial\vec{\theta}}\pi'(\vec{\theta})\Big/\pi(\vec{\theta}) + \frac{1}{\xi - g_{\vec{\theta}}}\cdot\frac{\partial G_{\vec{\theta}}}{\partial\vec{\theta}} = 0$$

Le test optimal asymptotique est donc compte tenu de $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}\frac{G_{n\vec{\theta}}}{\xi_n}}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{G_{\vec{\theta}}}{\xi}\right)$

$$\frac{\pi'(\xi - g_{\hat{\theta}})}{\pi'(\xi)}\cdot\frac{\pi'(\vec{\theta})}{\pi'}\cdot e^{\frac{1}{2}\frac{G_{\hat{\theta}}}{\xi}} \underset{\tilde{H}_0,\xi}{\overset{\tilde{H}_1,\xi-g_{\hat{\theta}},\hat{\theta}}{\gtrless}} \frac{\tilde{\pi}_0}{\tilde{\pi}_1}$$

Cette expression contient implicitement les cas d'estimateurs biaisés ou non de la détection singulière ou régulière

Rappelons que $G_{\vec{\theta}} = 2R_{\vec{\theta}} - \Psi_{\vec{\theta}}$

$g_{\vec{\theta}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}G_{n\vec{\theta}}$

La valeur limite de $\gamma_n = \vec{X}^T\Gamma^{-1}\vec{X}$ a pour expression

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \int_{T_1}^{t_0}\!\!\int_{T_1}^{t_0'} X(t)\Gamma^{-1}(t,t')X(t')\,dt\,dt' \;;\; \int_{T_1}^{t_0}\Gamma(t,u)\Gamma^{-1}(u,t')\,du = \delta(t-t') \quad T_1 < t,t' < t_0$$

Si le bruit a une puissance finie la limite de $\vec{X}^T\Gamma^{-1}\vec{X}$ n'existe pas et ξ_n a une valeur limite finie ξ

Deux cas sont à envisager :

- <u>détection régulière</u>

$G_{n\vec{\theta}}$ a une valeur finie pour tout $\vec{\theta}$

et $\lim_{n\to\infty}G_{n\vec{\theta}} = G_{\vec{\theta}}$: $\lim_{n\to\infty}G_{n\vec{\theta}}/n = 0$ $\quad g_{\vec{\theta}}=0$

ξ est alors dit estimateur parfait

L'estimateur parfait existe si le signal est d'énergie finie.

On a alors les propriétés suivantes

$E_s\{\xi/_{a,\vec{\theta}}\} = a \qquad E_s\{\xi/_{a,\tilde{H}_0}\} = a \qquad \mathrm{Var}\{\xi/_a\}=0$

$\hat{\vec{\theta}} = [\hat{\vec{\theta}}_a]_{a=\xi}$

Le test de Bayes optimal s'écrit alors

$$\Lambda[X(t)] = \mathrm{Max}_{\vec{\theta}}\frac{\pi'(\vec{\theta})}{\pi'}\cdot e^{\frac{1}{2}\frac{G_{\vec{\theta}}}{\xi}} \underset{\tilde{H}_0,\xi}{\overset{\tilde{H}_1,\hat{\theta},\xi}{\gtrless}} \frac{\tilde{\pi}_0}{\tilde{\pi}_1}$$

On est ramené au problème de Bayes optimal à "a" connu où l'on remplace "a" par $\xi = \xi(\vec{X})$

$\tilde{\pi}_0\pi'\pi'(\xi)\exp\left[-\frac{1}{2\xi}\gamma\right] \qquad \Lambda(X(t);\vec{\theta}) = \frac{\pi'(\vec{\theta})}{\pi'}e^{\frac{1}{2\xi}G_{\vec{\theta}}}$

$\tilde{\pi}_1\pi'(\vec{\theta})\pi'(\xi)\exp\left[-\frac{1}{2\xi}(\gamma - G_{\vec{\theta}})\right] \qquad \Lambda(X(t)) = \mathrm{Max}_{\vec{\theta}}\Lambda(X(t);\vec{\theta})$

- <u>détection singulière</u>

$g_{\vec{\theta}} = \lim_{n\to\infty}G_{n\vec{\theta}}/n$ a une valeur finie différente de zéro . $G_{\vec{\theta}}$ est alors infini

ξ est alors dit un estimateur biaisé.

Le problème est dit singulier

On a alors les propriétés suivantes :

$E_s\{\xi/_{a,\tilde{H}_0}\} = a \qquad E_s\{\xi/_{a,\vec{\theta}}\} = a + g_{\vec{\theta}} \qquad \mathrm{Var}\{\xi/_a\} = 0$

Dans ce cas singulier on a

$$\Lambda[X(t)] = \frac{\pi'(\xi - g_{\vec{\theta}})}{\pi'(\xi)}\cdot\frac{\pi'(\vec{\theta})}{\pi'}e^{\frac{1}{2\xi}G_{\vec{\theta}}} \underset{\tilde{H}_0,\hat{\theta}}{\overset{\tilde{H}_1,\hat{\theta}}{\gtrless}} \frac{\tilde{\pi}_0}{\tilde{\pi}_1} \quad \text{devient}$$

$$\mathrm{Log}\,\Lambda[X(t)] = \frac{g_{\hat{\theta}}}{2\xi} \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1,\hat{\theta}}{\gtrless}} 0$$

avec $\hat{\vec{\theta}} = \hat{\vec{\theta}}(\vec{X})$ solution de l'équation $\partial g_{\vec{\theta}}/\partial\vec{\theta} = 0$. Le calcul direct en utilisant l'expression (1) aurait donné la même valeur sous la forme

$$\mathrm{Log}\sqrt{\frac{\xi}{\xi - g_{\hat{\theta}}}} \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1,\hat{\theta}}{\gtrless}} 0 \qquad \frac{\partial g_{\hat{\theta}}}{\partial\hat{\theta}} = 0$$

c'est-à-dire de façon équivalente $\dfrac{g_{\hat{\theta}}}{\xi} \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1,\hat{\theta}}{\gtrless}} 0$

Le test optimal de Bayes de la détection singulière est donc

$$\mathrm{Max}_{\vec{\theta}}\frac{g_{\vec{\theta}}}{\xi} \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1,\hat{\theta}}{\gtrless}} 0 \qquad \hat{\vec{\theta}} = \vec{\theta} \text{ qui donne le max.}$$

III.1 - *Test optimal de Neyman Pearson à probabilité de fausse alarme conditionnelle à "a" fonction donnée de "a"* Réf. [3],[4]

Considérons le rapport des maximas de probabilités à postériori Λ défini pour le test de Bayes optimal dans le cas de la détection non singulière

$$\Lambda(\vec{X}) = \mathrm{Max}_{\vec{\theta}}\frac{\pi'(\vec{\theta})}{\pi'}\exp\left[\frac{1}{2\xi(\vec{X})}G_{\vec{\theta}}(\vec{X})\right] = \mathrm{Max}_{\vec{\theta}}\Lambda_{\vec{\theta}}(\vec{X})$$

$$U(\vec{X}) = \mathrm{Log}\,\Lambda(\vec{X}) = \mathrm{Max}_{\vec{\theta}}\mathrm{Log}\,\Lambda_{\vec{\theta}}(\vec{X}) = \mathrm{Max}_{\vec{\theta}}\left[\mathrm{Log}\frac{\pi'(\vec{\theta})}{\pi'} + \frac{1}{2\xi(\vec{X})}\cdot G_{\vec{\theta}}(\vec{X})\right]$$

Avec $G_{\vec{\theta}}(\vec{X}) = 2R_{\vec{\theta}}(\vec{X}) - \Psi_{\vec{\theta}}(\vec{X})$

$= 2AR_{\vec{\theta}}(\vec{X}) - A^2\Psi_{\vec{\theta}}(\vec{X})$ et $\vec{X} = \{X(t)\}$

Les tests à probabilité de fausse alarme conditionnelle fonction donnée de a de la forme $\alpha_a = k(a)$ s'écrivent $\Lambda(\vec{X}) \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1}{\gtrless}} s_k(\xi(\vec{X}))$; $U(\vec{X}) \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1}{\gtrless}} t_k(\xi(\vec{X}))$

ou bien

$$\Lambda_k(\vec{X}) \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1}{\gtrless}} 1 \;;\; U_k(\vec{X}) \underset{\tilde{H}_0}{\overset{\tilde{H}_1}{\gtrless}} 0 \qquad \text{avec } \Lambda_k(\vec{X}) = \frac{\Lambda(\vec{X})}{s_k(\xi(\vec{X}))}$$

où $s_k(a)$ solution de $\alpha_a = k(a) = h(s,a)$

et $t_k(a) = \mathrm{Log}\,s_k(a)$ avec $h(s,a)$

défini par $h(s,a) = \int_{D_1} p_{0a}(\vec{X})\,d\vec{X} = \int_s^{\infty} P_{0a}(\Lambda)\,d\Lambda = \int_{\mathrm{Log}\,s}^{\infty}\mathcal{P}_{0a}(U)\,dU$

ASPECTS PARTICULIERS DES TESTS OPTIMAUX D'HYPOTHESES MULTIPLES EN DETECTION ACTIVE

En effet sous l'hypothèse$(\tilde{H}_0, a)$, $\varsigma(\vec{X})$ est une grandeur certaine

$$E_S\{ f(\vec{X})/_{\tilde{H}_0,a}\} = a$$

$$E_S\{ [f(\vec{X}) - E_S\{f(\vec{X})\}]^2/_{\tilde{H}_0,a}\} = 0$$

et Λ_k est une variable aléatoire proportionnelle à Λ

$$\Lambda_k = \Lambda/s_k(a)$$

La probabilité de fausse alarme conditionnelle à "a" est donc dans le test utilisant $\tilde{\Lambda}_k$

$$\Lambda_k(\vec{X}) \gtrless 1 \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{k1}$$

$$\alpha_a = \int_{\tilde{\mathcal{D}}_{k1}} p_{oa}(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_1^\infty P'_{oa}(\Lambda_k)\, d\Lambda_k = \int_1^\infty P_{oa}[s_k(a)\cdot\Lambda_k]\, s_k(a)\, d\Lambda_k$$

$$\alpha_a = \int_{s_k(a)}^\infty P_{oa}(\Lambda)\, d\Lambda \quad \text{donc} = k(a)$$

puisque

$$\alpha_a = h(s_k(a), a) = k(a) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Parmi ces tests considérons maintenant le test à probabilité de fausse alarme conditionnelle constante

$$k(a) = C^{te} = \alpha_0 \longrightarrow s_c(a) \rightarrow t_c(a)$$

Montrons que si $\pi'(r)$est uniforme, la probabilité de fausse alarme est constante pour le choix d'un seuil de test constant $t_c(a) = C^{te} = t_c$

En effet si $\pi'(r) = \pi'(A\cdot f(\tau)) = C^{te}$le maximum de $U(\vec{\theta})$ suivant $\vec{\theta}$est réalisé par une valeur de A et $\vec{\theta}$ solution du système d'équations simultanées

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U(\vec{\theta}) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial K} U(\vec{\theta}) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial A} U(\vec{\theta}) = 0$$

La grandeur aléatoire

$$U'(\vec{\theta}) = \mathrm{Log}\,\frac{\pi'(\vec{\theta})}{\pi'} + \frac{1}{2}\left[\frac{R_{\vec{\theta}}}{\sqrt{\Psi_{\vec{\theta}}}\sqrt{\mathcal{E}}}\right]^2 = \mathrm{Log}\,\frac{\pi'(\vec{\theta})}{\pi'} + \frac{1}{2}(V_{\vec{\theta}})^2$$

présente les mêmes extremums que $U(\vec{\theta})$

Examinons dans ce cas la propriété de

$$\alpha_a = h(t, a) = \int_t^\infty \mathcal{P}_{oa}(U)\cdot dU = k(e^t, a)$$

$$\alpha_a = P_r\left[\mathrm{Max}_{\vec{\theta}}\, U(\vec{\theta}) > t/_{\tilde{H}_0,a}\right] = P_r\left[\mathrm{Max}_{\vec{\theta}}\, U'(\vec{\theta}) > t/_{\tilde{H}_0,a}\right]$$

Or la loi probabilité multidimensionnelle de $V(\vec{\theta})$et par suite de$U'(\vec{\theta})$sous l'hypothèse $\tilde{H}_0, a$ ne dépend pas de a (voir plus loin S.V.P.)

Il en découle que $\mathcal{P}_{oa}(U)$ indépendant de a et que $\alpha_a = h(t)$ indépendant de a . Par suite la solution de l'équation est donc $t_c(a) = C^{te} = t_c$

III.1.1 Loi de probabilité multidimensionnelle de $V(\vec{\theta})$

Soit $V(\vec{\theta}') = \dfrac{R(\vec{\theta}')}{\sqrt{\Psi_{\vec{\theta}'\vec{\theta}'}}\sqrt{\mathcal{E}}}$

- Sous $\tilde{H}_o\, a$ $V(\vec{\theta}')$fonction aléatoire gaussienne non stationnaire de la variable $\vec{\theta}'$
  - de moyenne nulle
  - de variance 1

La loi de probabilité multidimensionnelle conditionnelle à $\tilde{H}_o, a$ est donc

$$p_{oa}(\vec{V}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{1}{\sqrt{\det C}}\, e^{-\frac{1}{2}\vec{V}^T C^{-1}\vec{V}}$$

où $C = [C_{ij}]$ et $C_{ij} = C(\vec{\theta}'_i, \vec{\theta}'_j)$

Covariance

$$C(\vec{\theta}', \vec{\theta}'') = \frac{\Psi_{\vec{\theta}'\vec{\theta}''}}{\sqrt{\Psi_{\vec{\theta}'\vec{\theta}'}}\sqrt{\Psi_{\vec{\theta}''\vec{\theta}''}}}$$

- Sous $\tilde{H}_1, a, \vec{\theta}$

$$V(\vec{\theta}') = \frac{R_0(\vec{\theta}')}{\sqrt{\Psi_{\vec{\theta}'\vec{\theta}'}}\sqrt{a}} + d\cdot C(\vec{\theta}', \vec{\theta}) \qquad d = \frac{A\sqrt{\Psi_{\vec{\theta}\vec{\theta}}}}{\sqrt{a}}$$

$V(\vec{\theta}')$fonction aléatoire gaussienne non stationnaire
- de moyenne $d\cdot C(\vec{\theta}', \vec{\theta})$
- de variance 1

La loi de probabilité est donc

$$p_{1a\vec{\theta}}(\vec{V}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det C}}\, e^{-\frac{1}{2}(\vec{V} - d\vec{C}_{\vec{\theta}})^T C^{-1}(\vec{V} - d\vec{C}_{\vec{\theta}})}$$

même covariance

Le test optimal est donc $\mathrm{Max}_{\vec{\theta}}\, U'_{\vec{\theta}} \underset{\tilde{H}_0, \mathcal{E}}{\overset{\tilde{H}_1, \vec{\theta}, \mathcal{E}}{\gtrless}} t_c$

IV - TEST DE NEYMAN PEARSON OPTIMAL A PROBABILITE DE FAUSSE ALARME CONDITIONNELLE CONSTANTE DANS LE CAS D'UN BRUIT GAUSSIEN NON STATIONNAIRE DE COVARIANCE INCONNUE A MODELE STATIONNAIRE TANGENT DEPENDANT D'UN PARAMETRE ALEATOIRE VECTORIEL Réf. [4]

Nous considérerons le cas où la covariance inconnue du bruit gaussien (de forme générale $\Gamma'_{\vec{\rho}}(\tau)$ connue) dépend d'un paramètre aléatoire vectoriel $\vec{\rho}$(variable aléatoire sur l'intervalle de temps de stationnarité locale ; fonction alétoire du temps sur des temps plus longs). Pour la simplicité de l'exposé nous ferons le choix non limitatif de lois à priori $\pi'(\vec{\rho})$ de $\vec{\rho}$ et $\pi'(\vec{\theta})$ de $\vec{\theta}$ uniformes. (Nous ferons également comme si le temps de stationnarité était au moins égal à la durée d'analyse$\mathcal{C}+T$).

La loi de l'observation conditionnelle à $\vec{\rho}$ sous l'hypothèse $\tilde{H}_0$ est

$$p_{o\vec{\rho}}(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\cdot\sqrt{\det \Gamma'_{\vec{\rho}}}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\vec{X}^T\Gamma'^{-1}_{\vec{\rho}}\vec{X}}$$

$\Gamma'_{\vec{\rho}}$ définie positive symétrique $E_S\{X(t)X(t')/_{\vec{\rho}}\} = \Gamma'_{\vec{\rho}}(t-t')$

L'estimée de cette covariance au sens du "maximum de la probabilité à postériori" est alors obtenue comme solution du système d'équations $\dfrac{\partial p_{o\vec{\rho}}(\vec{X})}{\partial\vec{\rho}} = 0$

ou encore

$$(1) \qquad \sum_i\sum_j (\Gamma'_{ij} - X_i X_j)\frac{\partial}{\partial\vec{\rho}}\Gamma'^{-1}_{ji} = 0 \rightarrow \hat{\vec{\rho}}, \hat{\Gamma}'_{\vec{\rho}}$$

L'estimée $\hat{\Gamma}'_{\vec{\rho}\vec{\theta}}$ de la covariance sous hypothèse signal est elle solution du système d'équations

$$(2) \qquad \sum_i\sum_j\left[\Gamma'_{ij} - (X_i - s_{i\vec{\theta}})(X_j - s_{j\vec{\theta}})\right]\frac{\partial\Gamma'^{-1}_{ji}}{\partial\vec{\rho}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p_{o\vec{\rho}\vec{\theta}}(\vec{X})}{\partial\vec{\theta}} = 0$$

soit

$$\sum_i\sum_j\left[\Gamma'_{ij} - X_i X_j\right]\frac{\partial\Gamma'^{-1}_{ji}}{\partial\vec{\rho}} = \frac{\partial G_{n\vec{\rho}\vec{\theta}}}{\partial\vec{\rho}}$$

Si le bruit est localement stationnaire (admettons ici $\mathcal{C}+T$) on a $\Gamma'_{ij} = \Gamma'_{i-j}$. Ce qui entraine que l'estimée de la covariance est solution de l'équation

$$n = \frac{(t_0 - T_1)}{\Delta t}$$

$$(3) \qquad \sum_{\mu=-n}^{+n}\left[\frac{n-|\mu|}{n}\Gamma'_{\mu} - \frac{1}{n}\sum_{i=|\mu|/2}^{n-|\mu|/2} X_{i-\frac{\mu}{2}}\, X_{i+\frac{\mu}{2}}\right]\frac{\partial\Gamma'^{-1}_{\mu}}{\partial\vec{\rho}} = \frac{\partial G_{n\vec{\rho}\vec{\theta}}}{\partial\vec{\rho}\; n} \quad \text{sous } \tilde{H}_{1}\vec{\theta}$$

Cas asymptotique de la détection régulière$(\Delta t \rightarrow 0)$

Si $\lim_{n\to\infty} G_{n\vec{\rho}\vec{\theta}}$ existe alors $\lim_{n\to\infty} g_{n\vec{\rho}\vec{\theta}} = 0$ et le deuxième membre de l'équation (sous $\tilde{H}_1, \vec{\theta}$) précédente s'annule. L'estimation $\hat{\vec{\rho}}$, $\hat{\Gamma}'_{\vec{\rho}}$ sous hypothèse "bruit seul" coïncide avec l'estimation sous hypothèse "signal". L'estimateur est alors parfait. Ceci arrive lorsque le signal est d'énergie finie conjointement à une puissance moyenne de bruit finie.

Il ne faut pas confondre cet estimateur parfait, qui existe si l'on connait la forme générale (dépendante d'un paramètre) de la covariance, avec l'estimateur biaisé asymptotique

$$\hat{\Gamma}'_0(\tau) = \frac{1}{t_0-T_1-\tau}\int_{T_1}^{t_0-\tau} X(t)\,X(t-\tau)\,dt$$

$$\hat{\Gamma}'_{\vec\theta}(\tau) = \frac{1}{t_0-T_1-\tau}\int_{T_1}^{t_0-\tau}\left[X(t)-\xi_{\vec\theta}(t)\right]\left[X(t-\tau)-\xi_{\vec\theta}(t-\tau)\right]dt$$

solution du problème qui ne présuppose pas une telle connaissance et où la forme de $\Gamma'(\tau)$ est à priori quelconque. Cet estimateur plus général ne peut être parfait que si le temps de stationnarité locale est très important vis-à-vis de la durée du signal ou si l'on dispose d'une référence "bruit seul". Il est obtenu en annulant les crochets des équations (1) et (2) après avoir tenu compte de la stationnarité locale.

On peut vérifier que l'équation (3) donne comme estimateur $\hat a = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\vec X^{T}\,\Gamma^{-1}\vec X \qquad \hat\Gamma'_{\hat a} = \hat a\,\Gamma(\tau)$

dans le cas d'un bruit de puissance moyenne aléatoire localement stationnaire $X(t)=\sqrt{a}\,Y(t)$ avec $E_s\{Y(t)Y(t-\tau)\}=\Gamma(\tau)$

L'équation fournissant l'estimateur parfait de la covariance reste identique à l'équation (3) avec second membre nul lorsque les lois de probabilité à priori de $\vec\rho$ et $\vec\theta$ ne sont pas uniformes. L'estimée $\hat\Gamma'_{\vec\rho}$ obtenue est indépendante des lois à priori des paramètres .

IV.1 - *Formulation du test dans le cas d'une loi à priori de $\vec\theta$ uniforme (loi de $\vec\rho$ quelconque)*

L'estimateur parfait fournit $\hat\Gamma'_{\vec\rho}$ et en particulier par une décomposition arbitraire

$$\rho = \frac{\hat\Gamma'_{\vec\rho}(0)}{b} \qquad \Gamma(\tau) = b\,\frac{\hat\Gamma'_{\vec\rho}(\tau)}{\hat\Gamma'_{\vec\rho}(0)}$$

En faisant le rapport des maximas des probabilités à postériori utilisant l'estimateur parfait on obtient

$$\Lambda(X(t)) = \underset{\vec\theta}{\mathrm{Max}}\; e^{\frac{1}{2}\frac{G_{\vec\theta}}{\rho}}$$

qui se réduit à

$$\Lambda(X(t)) = \underset{\vec\theta}{\mathrm{Max}}\; e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2_{\vec\theta}}{\rho\Psi_{\vec\theta}}} \quad \text{où} \quad R_{\vec\theta} = \int_{T_1}^{t_0} X(t)\,Q_{\vec\theta}(t)\,dt$$

$$\int_{T_1}^{t_0}\Gamma(t-t')\,Q_{\vec\theta}(t')\,dt' = \xi_{\vec\theta}(t) \qquad \Psi_{\vec\theta} = \int_{T_1}^{t_0}\xi_{\vec\theta}(t)\,Q_{\vec\theta}(t)\,dt$$

Un raisonnement analogue à celui développé précédemment montre que la probabilité de fausse alarme conditionnelle à $\vec\rho$ ou $\Gamma'_{\vec\rho}$ est constante si l'on choisi un seuil de test fixe t_c . Le test est donc :

$$\underset{\vec\theta}{\mathrm{Max}}\,\frac{1}{2}\left(\frac{R_{\vec\theta}}{\sqrt{\rho}\,\sqrt{\Psi_{\vec\theta}}}\right)^2 \underset{H_0}{\overset{\tilde H_{1,\vec\theta}}{\gtrless}} t_c \quad \text{ou} \quad \underset{\vec\theta}{\mathrm{Max}}\,\frac{1}{2}V^2_{\vec\theta} \underset{H_0}{\overset{\tilde H_{1,\vec\theta}}{\gtrless}} t_c$$

Si l'on peut factoriser $\gamma(\nu)\rightleftarrows\Gamma(\tau)$ $\quad\gamma(\nu)=h(\nu)\,h^*(\nu)$ où $h(\nu)$ est le gain complexe d'un filtre linéaire homogène causal dont le filtre inverse existe, on peut mettre $R_{\vec\theta}$ et $\Psi_{\vec\theta}$ sous la forme

$$R_{\vec\theta} = \int_{T_1}^{t_0}\tilde X(t)\,\tilde\xi_{\vec\theta}(t)\,dt \qquad \Psi_{\vec\theta} = \int_{T_1}^{t_0}\tilde\xi_{\vec\theta}(t)\,\tilde\xi_{\vec\theta}(t)\,dt$$

avec

$$\tilde X(t) = \int_{T_1}^{t_0} H^{-1}(t-t')\,X(t')\,dt' \qquad \tilde\xi_{\vec\theta}(t) = \int_{T_1}^{t_0} H^{-1}(t-t')\,\xi_{\vec\theta}(t')\,dt'$$

Les erreurs d'estimation des paramètres $\vec\theta$ sont entièrement déterminées par la fonction d'ambiguité hermitique

$$C(\vec\theta',\vec\theta'') = \frac{\Psi_{\vec\theta',\vec\theta''}}{\sqrt{\Psi_{\vec\theta',\vec\theta'}}\,\sqrt{\Psi_{\vec\theta'',\vec\theta''}}} \quad \text{avec} \quad \int_{T_1}^{t_0}\tilde\xi_{\vec\theta'}(t)\,\tilde\xi^*_{\vec\theta''}(t)\,dt = \Psi_{\vec\theta',\vec\theta''}$$

qui est en plus symétrique dans notre cas de signal réel et de bruit de covariance définie positive symétrique.

V - STRUCTURE DES SYSTEMES DE TEST DE NEYMAN-PEARSON OPTIMAUX PRECEDENTS

Ils sont représentés figures 1 et 2.

Ces schémas sont tout à fait généraux pourvu que le temps de stationnarité du paramètre aléatoire scalaire a ou vectoriel $\vec\rho$ soit au moins égal à la mémoire statistique locale Δ supposée finie du bruit.

Si le temps de stationnarité est plus petit que la durée d'analyse il faut alors utiliser l'estimateur parfait courant fonction du temps qui existe sous les mêmes conditions que celles déjà énoncées. Ils s'e - priment :

$\Gamma^{-1}(t,t')$ ou $\Gamma'_{\vec\rho}(t-t')$ différent de zéro sur le domaine $|t-t'| \leq \Delta$

$$\rho(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=\nu-n}^{\nu}\sum_{j=\nu-n}^{\nu} X_i\,\Gamma^{-1}_{ij}\,X_j \qquad n=\frac{\Delta}{\Delta t} \quad \nu=\frac{t-T_1}{\Delta t}$$

$\hat{\vec\rho}(t)$ solution asymptotique de l'équation

$$\sum_{\mu=-n}^{+n}\left[\frac{n-|\mu|}{n}\Gamma'_{-\mu} - \frac{1}{n}\sum_{i=\frac{|\mu|}{2}}^{n-\frac{|\mu|}{2}} X_{\nu+i-\frac{\mu}{2}}\cdot X_{\nu+i+\frac{\mu}{2}}\right]\frac{\partial\Gamma'^{-1}_{\mu}}{\partial\vec\rho} = 0$$

avec $\nu = \frac{t-T_1}{\Delta t} \qquad n = \frac{\Delta}{\Delta t}$

Si le temps de stationnarité est égal à la durée d'analyse $-\Delta$ à $\mathcal{C}+T+\Delta$ il suffit d'estimer préalablement $\hat{\vec\rho}$ sur l'intervalle de temps $t\in(-2\Delta,-\Delta)$ L'estimateur général pourrait d'ailleurs alors être utilisé si l'on est sur qu'il n'y a pas de signal dans cette tranche de temps.

Dans le cas de la figure 2

- si $\Delta_s \geq \mathcal{C}+T+2\Delta$

l'opérateur de filtrage adapté peut être réalisé sous la forme d'un filtre linéaire homogène causal, unique à K donné, adaptatif d'analyse à analyse puisque

$\vec\rho$ pour $-\Delta < t < \mathcal{C}+T+\Delta$ = constante

$\hat{\vec\rho}_{t_0} = \hat{\vec\rho}(t_0) = \hat{\vec\rho}(-\Delta)$

l'opérateur de blanchiment possède les mêmes propriétés

- si $\Delta_s < \mathcal{C}+T+2\Delta$ (estimation courante sur Δ)

l'opérateur de blanchiment devient un filtre continûment adaptatif équivalent à un filtre linéaire non homogène causal.

L'opérateur de filtrage adapté est un système continûment adaptatif réalisant l'opération

$$\int_0^{t_0}\tilde X(t)\,\tilde\xi_{\vec\theta}(t)\,dt \quad \text{avec} \quad \tilde\xi_{\vec\theta}(t) = \int H^{-1}_{\hat\rho(t-\Delta)}(t-t')\,\xi_{\vec\theta}(t')\,dt' = \int_{t-\Delta}^{t} H^{-1}_{\hat\rho(t-\Delta)}(t-t')\,\xi_{\vec\theta}(t')\,dt'$$

(non équivalent à un filtre causal).

ASPECTS PARTICULIERS DES TESTS OPTIMAUX D'HYPOTHESES MULTIPLES EN DETECTION ACTIVE

BRUIT GAUSSIEN DE PUISSANCE MOYENNE ALEATOIRE MAIS DE COVARIANCE DE BASE CONNUE

Décisions partielles optimales à des instants $t_0 \in [T+\Delta, \mathcal{C}+T+\Delta]$ entre hypothèses complètes $(\tau \in [0, t_0-T-\Delta])$ et décision finale optimale à $\mathcal{C}+T+\Delta$

$$\tilde{g}_{\vec{\theta}}(t) = \tilde{\xi}_{\vec{\theta}}(\tau+T+\Delta-t) \qquad \tau \in [0,\mathcal{C}]$$

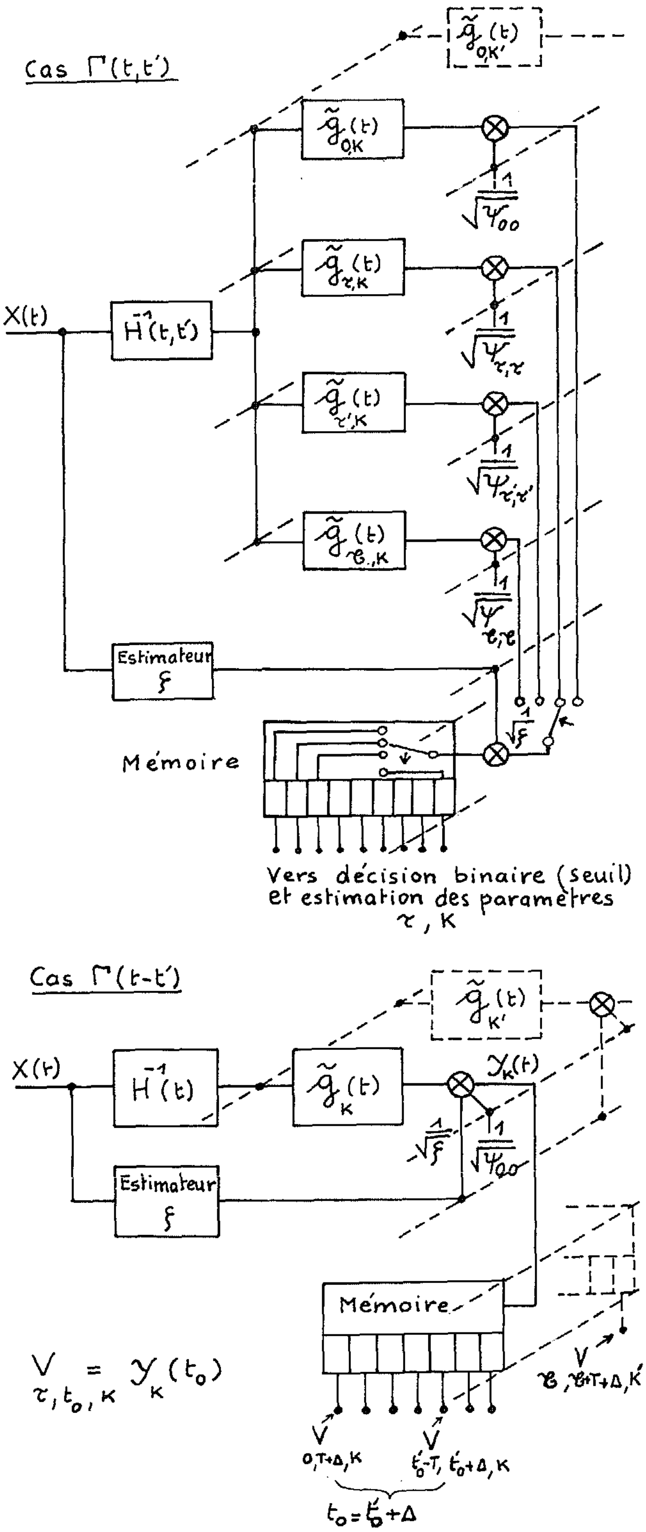


Figure 1

BRUIT GAUSSIEN DE COVARIANCE INCONNUE MAIS A MODELE STATIONNAIRE TANGENT DE FORME GENERALE CONNUE DEPENDANT D'UN PARAMETRE ALEATOIRE VECTORIEL

Décisions partielles optimales à des instants $t_0 \in [T+\Delta, \mathcal{C}+T+\Delta]$ entre hypothèses complètes $(\tau \in [0, t_0-T-\Delta])$ et décision finale optimale à $\mathcal{C}+T+\Delta$

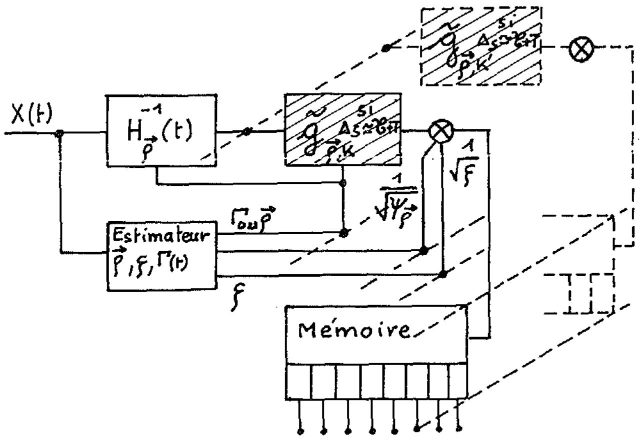


Figure 2

B I B L I O G R A P H I E

[1] - *HELSTROM C.W.* - Statistical theory of signal détection - Second edition - Pergamon Press

[2] - *PICINBONO B. - VEZZOSI G.* -
Détection d'un signal certain dans un bruit de puissance inconnue. Structure du récepteur Comparaison des performances de différents récepteurs.
Colloque GRETSI NICE 1971, p. 1043 à 1097

[3] - *PICINBONO B. - VEZZOSI G.* -
Extension du critère de Neyman - Pearson en détection d'hypothèses multiples
Colloque GRETSI juin 1975 NICE, p. 455 à 462

[4] - *VEZZOSI G.*
Détection d'un signal dans un bruit de loi incertaine
Thèse de Doctorat d'Etat - Université de Paris Sud - Centre d'Orsay - Mai 1976.