COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

CONTRIBUTION AU PROBLEME DE LA STATIONNARISATION D'UN PROCESSUS GAUSSIEN MODULE EN AMPLITUDE

Monsieur CAVASSILAS Jean-François

LABORATOIRE GESSY - TOULON

RESUME

Le signal S (t) aléatoire dont l'expérimentateur dispose, est obtenu en modulant un bruit gaussien, de puissance égale à 1, dont la fonction d'autocorrelation est inconnue, par une fonction "lentement variable". Le problème est de retrouver la modulation dans les meilleures conditions.

Ceci implique :

-le choix d'un temps de pseudo-stationnarité pendant lequel, on est en droit de se livrer à une intégration numérique.

-le choix d'un critère d'appréciation ainsi qu'une discussion de la précission des résultats.

SUMMARY

The experimenter has at one's disposal a signal S (t) obtained by modulating a Gaussian and stationary noise of power equal to one, and of which the autocorrelation function is not known, by a slowly variyng function.

The aim is to extract the modulation with the "best conditions".

This involves the choice of a pseudo-stationary time to perform an integration ; and, also, the selection of a criterion to appreciate and discuss the precision of the results.

CONTRIBUTION AU PROBLEME DE LA STATIONNARISATION D'UN PROCESSUS GAUSSIEN MODULE EN AMPLITUDE

1 INTRODUCTION ET NOTATIONS

Nous considérons un processus gaussien dont la fonction d'autocorrelation est supposée invariante dans le temps. Ce processus stationnaire est modulé en amplitude par un signal $\sqrt{a(t)}$ "lentement" variable.

Les hypothèses faites, sont les suivantes :

Le signal d'intérêt est $S = \sqrt{a(t)}\, x(t)$.

- x(t) est stationnaire, gaussien, de bande B_2 et présente une variance égale à 1.
- a(t) est une fonction inconnue, qui occupe une bande B_1 et qui est telle que :

$$m \leq a(t) \leq M$$

Les bornes m et M sont supposées connues.

Le problème est le suivant :

L'expérimentateur dispose d'un enregistrement de S. Comment doit-il s'y prendre pour "retrouver $a(t)$?

2 DIFFICULTES DU PROBLEME

Pour effectuer une estimation de la fonction $a(t)$, nous prenons un certain nombre d'échantillons décorrélés et calculons la moyenne arithmétique du carré des valeurs numériques de ces derniers.

La quantité

$$R_n = \frac{1}{n}\left[a(t)x^2(t) + \dots + a(t+(n-1)h)x^2(t+(n-1)h)\right]$$

est calculable une fois le nombre n fixé; h est choisi de telle sorte que les échantillons de bruit soient indépendants.

$$h = \frac{1}{2B_2}$$

Un raisonnement grossier consiste à dire que si n est convenablement choisi

$$a(t+ih) \simeq a(t) \quad \forall i \in [0, 1 \cdots n-1] \tag{1}$$

$$R_n \simeq \frac{1}{n} a(t) \sum_{0}^{n-1} x^2(t+ih) \tag{2}$$

$$R_n \simeq a(t) \tag{3}$$

Si le nombre d'échantillons est "trop petit", l'estimation est de mauvaise qualité à cause des fluctuations statistiques : $\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} x^2(t+ih)$ est une mauvaise estimation de la variance.

Si le nombre d'échantillons est "important", l'estimation est également de mauvaise qualité car l'approximation (1) n'est plus valable.

Nous allons montrer comment, compte tenu de nos hypothèses, il faut choisir n en définissant un temps de pseudo-stationnarité et tenter de donner une interprétation statistique à ce choix.

3 EBAUCHE D'UN CALCUL DU TEMPS DE PSEUDO-STATIONNARITE

M et m étant la borne supérieure et inférieure de $a(t)$, le théorème de BERNSTEIN [1], indique que :

$$\left|\left(\frac{da}{dt}\right)\right| \leq 2\pi \frac{(M-m)}{2} B_1 \tag{4}$$

L'accroissement maximum de la fonction $a(t)$, pendant l'intervalle de temps T, ne peut excéder $\pi(M-m)B_1T$. Pendant cet intervalle de temps T, il est loisible de prélever $n = 2B_2T$ échantillons indépendants et d'évaluer une estimation de la variance.

Cette estimée est entachée d'erreurs. En première approximation cette dispersion sur la variance est donnée par

$$a\sqrt{\frac{2}{n}} \tag{5}$$ [2]

Nous dirons que le processus est localement stationnaire tant que la dispersion sur a(t) est supérieure ou égale à l'accroissement $\pi(M-m)B_1T$

Donc

$$\pi(M-m)B_1T \leq a\sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\pi^2(\Delta M)^2 B_1^2 T^2 \leq \frac{2a^2}{n} \tag{6}$$

Or $n = 2B_2T$

Ceci nous amène à prendre comme temps d'intégration la quantité T obtenue à l'aide de la formule.

$$T = \left[\frac{a^2}{\pi^2(\Delta M)^2 B_1^2 B_2}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{7}$$

Il est utile de poser

$$\Delta = \frac{\pi \Delta M B_1}{2B_2} \tag{8}$$

L'inégalité (6) peut s'écrire

$$\Delta^2 n^3 \leq 2a^2$$

Nous prendrons donc

$$n = \left(\frac{2a^2}{\Delta^2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (9)$$

Les résultats obtenus nous donnent des ordres de grandeur sur les temps d'intégration à prendre en considération. Néanmoins, aucune information n'est fournie quant à la précision des résultats que l'on pourrait obtenir; c'est pourquoi, il est nécessaire de faire intervenir une méthodologie plus générale et replacer les résultats qui précèdent dans un contexe plus large.

4 PRESENTATION DE LA METHODE

Avec les hypothèses faites sur la dynamique de a(t), il est possible d'envisager une variable aléatoire T_n telle que

$$R_n < T_n$$

et dont on peut envisager le calcul de la densité de probabilité $p_n(t)$.

Il est alors loisible de se fixer P_0 et de choisir t_n de telle sorte que

$$\int_0^{t_n} p_n(t)\,dt = P_0$$

En d'autres termes

$$\text{Probabilité } [0 \leq T_n \leq t_n] = P_0 \qquad (10)$$

Soit encore

$$\text{Probabilité } [0 \leq R_n \leq t_n] \geq P_0 \qquad (11)$$

Le critère sera donc le suivant : Pour P_0 donné, choisir n de façon à ce que t_n soit le plus petit possible.

Il va de soi que dans les mêmes conditions, il est possible de construire une variable aléatoire U_n telle que $R_n \leq U_n$

5 LA VARIABLE T_n

Pendant l'intervalle de temps $h = \frac{1}{2B_2}$

l'accroissement maximum de a(t) est encore noté

$$\Delta = \pi\,\Delta M\, B_1/2B_2$$

Nous aurons

$$R_n < T_n = \frac{1}{n}\left[a(t)x^2(t) + \cdots + [a + (n-1)\Delta]\,x^2(t+(n-1)h)\right]$$

Nous posons

$$T_n = \frac{1}{n}\sum \alpha_j\, x_j^2 = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} X_j$$

La loi de X_j est

$$p(t_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_j}}\;\frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{t_j}{\alpha_j}}}{\sqrt{t_j}}$$

La fonction caractéristique de la VA X_j est

$$\varphi_{X_j} = \frac{1}{[1 - 2\alpha_j i t_j]^{\frac{1}{2}}}$$

Les VA X_j étant indépendantes

$$\varphi_{\Sigma X_j} = \frac{1}{\prod_0^{n-1}(1 - 2\alpha_j i t)^{\frac{1}{2}}}$$

La fonction caractéristique de T_n devient

$$\varphi_{T_n} = \frac{1}{\prod\left(1 - 2\alpha_j i \frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (12)$$

La densité de probabilité est obtenue en prenant la TF de (12).

$$p_n(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega t \cos\frac{1}{2}\sum \operatorname{artg}\frac{2\alpha_j t}{n}}{\prod_j\left(1 + \left(\frac{2\alpha_j}{n}\right)^2 t^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega t \sin\frac{1}{2}\sum \operatorname{artg}\frac{2\alpha_j t}{n}}{\prod_j\left(1 + \left(\frac{2\alpha_j}{n}\right)^2 t^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,dt \qquad (13)$$

Remarques.

a) Pour faciliter les interprétations des résultats il est plus simple de programmer la fonction de répartition. Pour ce faire, il suffit d'intégrer par rapport à la variable ω sous le signe somme et ceci de 0 à ω.

b) Techniquement nous avons fait varier la variable t de 0 à $3\sigma(T_n)$

c) En ce qui concerne la variable aléatoire U_n, les calculs sont exactement les mêmes à condition de changer Δ en $-\Delta$.

Ainsi, pour a fixé et compris en m et M, nous sommes capables de définir numériquement l'intervalle dans lequel se situera la mesure et ceci avec une probabilité supérieure à 0.5 ou bien toute autre probabilité fixée à priori.

6 RETOUR SUR LE CALCUL DU TEMPS DE STATIONNARITE

Il est facile d'accéder aux calculs analytiques de l'espérance mathématique et de la variance des variables aléatoires T_n et U_n.
La connaissance de φ_T (t) nous autorise le calcul, par des différenciations successives élémentaires, de tous les moments, en particulier de $E\{T_n\}$ et $E\{T_n^2\}$.
Nous trouvons

$$E\{T_n\} = a + (n-1)\frac{\Delta}{2}$$
$$E\{U_n\} = a - (n-1)\frac{\Delta}{2} \qquad (14)$$

$$\sigma^2_{T_n} = \frac{2}{n^2}\left[na^2 + \frac{2a\Delta n(n-1)}{2} + \frac{\Delta^2 n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

(15)

$$\sigma^2_{U_n} = \frac{2}{n^2}\left[na^2 - \frac{2a\Delta n(n-1)}{2} + \frac{\Delta^2 n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

U_n et T_n peuvent être considérées comme des estimateurs biaisés du carré de la modulation.

La quantité $\dot{I} = E\{T_n\} + \sigma(T_n)$ doit être la plus petite possible. Ceci implique la résolution de l'équation $\frac{dI}{dn} = 0$

Si l'on admet que dans les cas qui nous intéressent

$$\frac{2a^2}{n} > \frac{2a\Delta(n-1)}{n}$$

$$\frac{2a^2}{n} \gg \frac{\Delta^2(n-1)(2n-1)}{3n}$$

alors $\qquad n \approx \left(\frac{2a^2}{\Delta^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Nous retrouvons le résultat du paragraphe 3.

7 CONCLUSIONS

. L'étude présentée permet de fixer des ordres de grandeur pour les temps de pseudo-stationnarité du processus gaussien modulé en amplitude.

. Elle autorise une connaissance de la précision à laquelle on doit s'attendre.

. Cependant des études sont poursuivies sur un plan plus mathématique, car il semble que l'on puisse définir des VA qui encadrent de manière plus fine la VA R_n. La philosophie de la méthode restera la même en définitive.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARSAC Transformation de Fourier et Théorie des distributions. DUNOD 1961 page 347.

[2] PUGACHEF Theory of Random Functions pages 512 et 513.

[3] DUMAS et RAULY L'estimation statistique Gauthier-Villars 1968.