COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

CANAUX PERTURBES PAR UN BRUIT A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

CHANNELS WITH A NOISE HAVING INDEPENDENT INCREMENTS

H. KOREZLIOGLU et G. MAZZIOTTO

E.N.S.T. 46, Rue Barrault 75634 PARIS CEDEX 13

RESUME

Le but de cet exposé est de donner l'expression de la quantité d'information transmise à travers le canal suivant non-anticipatif et avec contre-réaction :

> le signal utile est une fonction aléatoire X_t;
> le signal reçu Y_t est donné par
> $$Y_t = \int_0^t \phi_s \, dA_s + B_t ,$$
> où B_t est un processus aléatoire indépendant de X, centré, continu en moyenne quadratique et à accroissements indépendants ; A_t est la variance de la composante gaussienne de B_t et ϕ_t, le signal émis, dépend à la fois de $\{X_s, s \leqslant t\}$ et de $\{Y_s, s \leqslant t\}$.

Le premier paragraphe donne la définition du modèle où apparaît un certain nombre d'hypothèses qui sont énoncées pour les besoins de la rigueur mathématique et qui n'impliquent aucune restriction physique sur le modèle.

Le deuxième paragraphe est consacré à l'étude des rapports de vraisemblance pour les deux alternatives : le signal reçu contient ou ne contient pas le signal émis.

Finalement, la quantité d'information transmise à travers le canal dans l'intervalle de temps [0,t] est calculée au troisième paragraphe. Elle est égale à

$$I_t(X,Y) = \frac{1}{2} \int_0^t E(\phi_s - \hat{\phi}_s)^2 \, dA_s ,$$

où $\hat{\phi}_s$ est l'espérance conditionnelle de ϕ_s relativement à $\{Y_u, u < s\}$..

SUMMARY

The aim of this paper is to give the expression of the amount of information transmitted by the following non-anticipative channel with feedback :

> the information source consists of an arbitrary random function X_t ;
> the channel output is given by
> $$Y_t = \int_0^t \phi_s \, dA_s + B_t ,$$
> where B_t is a centered random process, continuous in the quadratic mean, with independent increments and independent of X ; A_t is the variance of the gaussian component of B_t and ϕ_t, the channel input, depends on both $\{Y_s, s \leqslant t\}$ and $\{Y_s, s \leqslant t\}$.

The first paragraph of the paper gives the definition of the model, where several hypotheses are announced only for mathematical rigor and do not imply physical restrictions on the model.

The second paragraph studies the likelihood ratios for the two following alternatives ; there is a signal or there is no signal at the channel output.

Finally, the amount of information transmitted by the channel during the time interval [0,t] is given in the third paragraph. This is equal to

$$I_t(X,Y) = \frac{1}{2} \int_0^t E(\phi_s - \hat{\phi}_s)^2 \, dA_s ,$$

Where $\hat{\phi}_s$ is the conditional expectation of ϕ_s given $\{Y_u, u < s\}$.

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

CANAUX PERTURBES PAR UN BRUIT A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

CHANNELS WITH A NOISE HAVING INDEPENDENT INCREMENTS

H. KOREZLIOGLU et G. MAZZIOTTO

E.N.S.T. 46, Rue Barrault 75634 PARIS CEDEX 13

RESUME

Tous les résultats énoncés constituent des généralisations des résultats déjà connus dans le cas où le bruit B_t est un processus gaussien à accroissements indépendants.

SUMMARY

All the results given here are the generalizations of those already known in the case where the noise B_t is a gaussian process with independent increments.

CANAUX PERTURBES PAR UN BRUIT A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

CHANNELS WITH A NOISE HAVING INDEPENDENT INCREMENTS

§ 0. NOTATIONS ET CONVENTIONS

L'espace probabilisé $(\Omega,\mathfrak{A}, P)$ considéré ici sera supposé complet et les fonctions aléatoires seront indexées par $[0,T]$ où T est fini. Pour une fonction aléatoire $Z = \{Z_t, t \in [0,T]\}$, $\mathfrak{F}_t^Z$ sera la sous-tribu de $\mathfrak{A}$ engendrée par $\{Z_s, s \leqslant t\}$ et toutes les parties P-négligeables de Ω. Toute famille croissante $\{\mathcal{G}_t, t \in [0,T]\}$ de sous-tribus de $\mathfrak{A}$ intervenant dans cet exposé sera supposée avoir les propriétés suivantes : $\forall t$, $\mathcal{G}_t$ contient toutes les parties P-négligeables de Ω et $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t+}$ où $\mathcal{G}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{G}_s$, (la famille considérée est continue à droite). Si au départ, une famille $\{\mathcal{G}_t, t \in [0,T]\}$, dont les éléments contiennent les parties P-négligeables de Ω, n'était pas continue à droite, on conviendra que $\mathcal{G}_t$ a été remplacé par $\mathcal{G}_{t+}$ pour obtenir une famille possédant cette propriété.

Ces conventions, au même titre que les hypothèses que nous ferons sur le modèle de canal, ne constituent nullement une restriction physique, mais elles permettent, par contre, l'utilisation des résultats de la théorie des martingales.

Pour deux sous-tribus $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ de $\mathfrak{A}$, $\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2$ désignera la plus petite sous-tribu de $\mathfrak{A}$ contenant $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$.

Pour une famille croissante $\{\mathcal{G}_t, t \in [0,T]\}$ de sous-tribus de $\mathfrak{A}$, $\mathcal{G}_{t-}$ désignera $\bigvee_{s<t} \mathcal{G}_s$.

Pour une fonction aléatoire $Z = \{Z_t, t\ [0,T]\}$, l'adjectif cadlag voudra dire qu'elle possède presque sûrement des trajectoires continues à droite et possédant des limites à gauche. On posera :

$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-}$.

I_A désignera la fonction caractéristique de l'ensemble A.

$\mathcal{B}$ désignera la tribu borélienne de $[0,T]$.

Lorsqu'il sera nécessaire de préciser la loi de probabilité P par rapport à laquelle on prend l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X, nous poserons $E_P(X)$ pour l'espérance mathématique de X. De même, quand cela sera nécessaire, nous poserons $E_P(X/\mathcal{G})$ pour l'espérance conditionnelle de X relativement à une sous-tribu $\mathcal{G}$ et à la probabilité P.

§ 1 . LE MODELE

Le bruit en ligne en présence du signal, représenté par $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$ sera un processus aléatoire à accroissements indépendants (en abrégé, un p.a.i.), défini sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathfrak{A}, P)$.

Nous faisons sur B les hypothèses suivantes :

H_1 : $B_0 = 0$ p.s. et $\forall t \in [0,T]$ $E\,B_t = 0$,

H_2 : $\forall t \in [0,T]$ $E\,B_t^2 < \infty$ et B est continu en moyenne quadratique,

H_3 : presque toutes les trajectoires de B sont continues à droite, donc cadlag.

Pour les propriétés des p.a.i. que nous citons ci-dessous, comme conséquence de ces hypothèses, nous nous référons à [1] et à [2].

Soit $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\mathcal{B}_0$ la trace de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_0$. Alors il existe une mesure aléatoire ν sur $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}_0$ telle que, pour $C \in \mathcal{B}$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_0$,

$$\nu(C,\Gamma) = \sum_s I_{C\times\Gamma}(s,\Delta B_s). \tag{1}$$

Soit π la mesure sur $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}_0$ définie par

$$\pi(D) = E\,\nu(D)\ , \quad D \in \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}_0. \tag{2}$$

Alors, on a

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} x^2\, \pi(dt,dx) < \infty \tag{3}$$

B admet la décomposition suivante :

$$B_t = W_t + N_t \tag{4}$$

où

$W = \{W_t, t \in [0,T]\}$ est une fonction aléatoire gaussienne centrée, à accroissements indépendants et dont presque toutes les trajectoires sont continues ;

$N = \{N_t, t \in [0,T]\}$ est un p.a.i. cadlag représenté par

$$N_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} x\ \nu(ds,dx) - \pi(ds,dx) \tag{5}$$

et les deux fonctions aléatoires sont mutuellement indépendantes.

Nous poserons

$$A_t = E\,W^2(t). \tag{6}$$

A est continu, non-négatif, non-décroissant et $A_0 = 0$.

La fonction caractéristique de B_t est donnée par

$$\exp\{-\frac{1}{2}\lambda^2 A(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x)\ \pi(du,dx) \tag{7}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Finalement, on a

$$\mathfrak{F}_t^B = \mathfrak{F}_t^W + \mathfrak{F}_t^N \tag{8}$$

où les deux tribus $\mathfrak{F}_t^W$ et $\mathfrak{F}_t^N$ sont mutuellement indépendantes. B, W et N sont des martingales relativement à la famille $\{\mathfrak{F}_t^B, t \in [0,T]\}$.

Nous nous proposons d'étudier ici le <u>modèle</u> suivant :

$X = \{X(t),\ t \in [0,T]\}$ est une fonction aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{C}, P)$ représentant le signal utile que nous n'avons pas besoin de préciser davantage ;

le signal reçu $Y = \{Y(t),\ t \in [0,T]\}$ est défini par

$$Y_t = \int_0^t \phi_s \, dA_s + W_t \ , \qquad (9)$$

où

B est le p.a.i. considéré plus haut,

$\phi = \{\phi_t,\ t \in [0,T]\}$, le signal émis, est une fonction aléatoire mesurable telle que

$$\int_0^T E\,\phi_t^2 \, dA_t < \infty \qquad (10)$$

Nous exprimerons la dépendance entre les différentes fonctions aléatoires de ce modèle par les deux hypothèses suivantes :

H_4 : X et B sont indépendants.

H_5 : ϕ est prévisible relativement à la famille

$$\{\mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^Y,\ t \in [0,T]\}.$$

L'hypothèse H_5 exprime le fait que nous considérons ici un canal non-anticipatif avec contre-réaction et elle est automatiquement vérifiée si ϕ est continu à gauche et si, pour tout $t \in [0,T]$, ϕ_t est $\mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^Y$ -mesurable.

Soit

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^B \ . \qquad (11)$$

Comme $\mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^Y \subset \mathcal{F}_t$, ϕ est prévisible par rapport à la famille $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]\}$.

Comme toutes les fonctions aléatoires du modèle sont adaptées à la famille $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]\}$, il n'y a aucune perte de généralité à prendre $\mathcal{O}\!\mathcal{C} = \mathcal{F}_T$. C'est ce que nous allons faire désormais.

<u>§2. RAPPORTS DE VRAISEMBLANCE</u>

La variable aléatoire

$$L_T = \exp\{-\int_0^T \phi_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \phi_3^2 \, dA_s\} \qquad (12)$$

définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ nous servira de rapport de vraisemblance. Nous faisons sur L_T l'hypothèse suivante :

H_6 : $E(L_T) = 1$ et $L_T > 0$ p.s.

<u>REMARQUE 1</u>

Si

A est strictement croissant (13)

et si

$$E[\exp \frac{1}{2}\int_0^T \phi_s^2 \, dA_s] < \infty \ , \qquad (14)$$

alors $E(L_T) = 1$, (cf.[3]).

Du fait que

$$E\left(\int_0^T \phi_s \, dW_s\right)^2 = E\int_0^T \phi_s^2 \, dA_s < \infty,$$

d'après (10), l'exposant de L_T est p.s. fini. Donc $L_T > 0$ p.s. Les conditions (10), (13) et (14) sont alors suffisantes pour que H_6 soit vérifiée. En particulier, les conditions (10) et (14) sont trivialement satisfaites, si ϕ est borné, ce qui est le cas dans la plupart des problèmes de transmission.

D'autre part, la condition (13) s'impose d'elle-même par le modèle (9). Car, si A est à accroissement nul dans un intervalle, tout se passe comme s'il n'y avait pas de transmission de signal dans cet intervalle.

Sous l'hypothèse H_6 la fonction aléatoire $L = \{L_t,\ t \in [0,T]\}$ définie par

$$L_t = \exp\{-\int_0^t \phi_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_3^2 \, dA_s\} \qquad (15)$$

est une $(\mathcal{F}_t, P)$-martingale continue, uniformément intégrable et p.s. positive, (cf.[4]).

Soit Q la mesure définie sur $\mathcal{F}_T$ par

$$dQ = L_T \, . \, dP \ . \qquad (16)$$

Alors Q est une probabilité équivalente à P.

<u>PROPOSITION 1</u>

Sous la probabilité Q définie par (16), $Y = \{Y_t,\ t \in [0,T]\}$ est un p.a.i. de même loi que B sous P, tel que, pour $u < s < t$, $Y_t - Y_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_u$. De plus, la fonction aléatoire $\tilde{W}$ définie par

$$\tilde{W}_t = \int_0^t \phi_s \, dA_s + W_t \qquad (17)$$

est un p.a.i. gaussien de même covariance que W et N a la même loi sous P et sous Q.

Démonstration : Pour la première partie de la proposition, il suffit de démontrer l'égalité suivante pour $s < t$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$E_Q\{\exp[i\lambda(Y_t - Y_s)] \ / \ \mathcal{F}_s\} =$$

$$\exp[-\frac{1}{2}\lambda^2(A_t - A_s) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}_0} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x)\pi(du,dx)]. \qquad (18)$$

Mais on a

$E_Q\{ \exp [i\lambda (Y_t - Y_s)] / \mathcal{F}_s\} = E$

$E_P\{(L_T/L_s) \exp[i\lambda(T_t - Y_s)] / \mathcal{F}_s\}$.

En applicant la formule de changement de variables (cf. [5] à $(L_t/L_s) \exp[i\lambda(Y_t - Y_s)]$ et en prenant l'espérance conditionnelle terme à terme, sous P, relativement à $\mathcal{F}_s$, on obtient une équation différentielle dont l'unique solution est le deuxième membre de (18).

La proposition pour $\tilde{W}$ se démontre par la même méthode.

Nous nous trouvons donc devant le modèle de détection suivant :

$Y_t = \tilde{B}_t$ sous Q (absence de signal),

$Y_t = \int_0^t \phi_s \, dA_s + B_t$ sous P (présence du signal),

où B et $\tilde{B}$ sont des p.a.i. de même loi.

Nous allons poser

$$\begin{aligned} Y_t^c &= \tilde{W}_t \quad \text{sous } Q, \\ Y_t^c &= \int_0^t \phi_s \, dA_s + dW_t \quad \text{sous } P \end{aligned} \tag{19}$$

Pour le problème de test d'hypothèse et pour le calcul de la quantité d'information nous avons besoin de L_t^{-1} en fonction de Y^c et d'une version de $E_Q\ (L_t^{-1} / \mathcal{F}_t^Y)$. Remarquons que l'on peut écrire

$$L_t^{-1} = \exp\{\int_0^t \phi_s \, dY_s^c - \frac{1}{2} \int_0^t \phi_s^2 \, dA_s\} \tag{20}$$

sans égard à la probabilité de définition.

PROPOSITION 2

> Soit $\hat{\phi}$ la projection prévisible de ϕ relativement à $\{\mathcal{F}_t^Y,\ t \in [0,T]\}$ et à P et soit ε la projection optionnelle de L^{-1} relativement à $\{\mathcal{F}_t^Y,\ t \quad [0,T]\}$ et à Q. Alors
>
> $$\varepsilon_t = \exp\{\int_0^t \hat{\phi}_s \, dY_s^c - \frac{1}{2} \int_0^t \hat{\phi}_s^2 \, dA_s\}. \tag{21}$$

Rappelons que ε_t est une version de $E_Q(L_t^{-1} / \mathcal{F}_t^Y)$ et $\hat{\phi}_t$ est une version de $E_P(\phi_t / \mathcal{F}_{t-}^Y)$.

La démonstration de cette proposition est similaire à celle du théorème 1 dans [6].

REMARQUE 2

> Si P_t et Q_t sont respectivement les restrictions de P et de Q à $\mathcal{F}_y^Y$, on a
>
> $$\varepsilon_t = \frac{dP_t}{dQ_t} \quad \text{p.s.} \tag{22}$$
>
> Par conséquent,
>
> $$\varepsilon_t^{-1} = \frac{dQ_t}{dP_t} \quad \text{p.s.} \tag{23}$$

REMARQUE 3

> Dans le cas où X est une fonction certaine tout ce qui précède la proposition 2 reste sans changement. Comme dans ce cas, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^Y - \mathcal{F}_t^B$, L_t (donc L_t^{-1}) est $\mathcal{F}_t^Y$ -mesurable et par conséquent, $\varepsilon_t = L_t^{-1}$.

§3. QUANTITE D'INFORMATION TRANSMISE PAR LE CANAL

Nous allons désigner par $m_{X,Y}^P$ la probabilité induite par (X,Y) sur le produit cartesien des trajectoires de X et des trajectoires de Y. m_X^P et m_Y^P désignerons respectivement les probabilités marginales induites par X et par Y. On posera m^Q, si l'espace de base est $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$.

Du fait que les trajectoires de Y sont cadlag, l'espace des trajectoires de Y est un espace polonais (cf.[7]). Il existe donc, sous la loi $m_{X,Y}^P$, une probabilité conditionnelle régulière de Y étant donné X, que nous désignerons par $m_{Y/X}^P$.

L'indépendance de X et B entraîne que, conditionnellement à X, Y satisfait à l'équation (9) dans l'espace de ses trajectoires sous la probabilité $m_{Y/X}^P$. Par ailleurs, toutes les hypothèses du modèle sont conservées avec X non-aléatoire. Alors, d'après la proposition 1, il existe une probabilité m, équivalente à $m_{Y/X}^P$, qui fait de Y un p.a.i. de même loi que B et telle que

$$\frac{dm_{X/Y}^P}{dm} = \exp\{\int_0^T \phi_s \, dY_s^c - \frac{1}{2} \int_0^T \phi_s^2 \, dA_s\}. \tag{24}$$

Donc

$$m = m_Y^Q . \tag{25}$$

D'autre part, d'après la proposition 2 et la remarque 2 on peut écrire

$$\frac{dm_Y^P}{dm_Y^Q} = \exp\{ \int_0^T \hat{\phi}_s \, dY_s^c - \frac{1}{2} \int_0^T \hat{\phi}_s^2 \, dA_s\}, \tag{26}$$

les deux mesures m_Y^P et m_Y^Q étant équivalentes.

Soit A un ensemble mesurable dans le produit cartésien des trajectoires de X et des trajectoires de Y. En tenant compte de (25)

On peut écrire

$$\iint I_A\left(\frac{dm^P_{Y/X}}{dm} \cdot \frac{dm^Q_Y}{dm^P_Y}\right) d(m^P_X \quad m^P_Y)$$

$$= \int \left(\int I_A\left(\frac{dm^P_{Y/X}}{dm} \cdot \frac{dm^Q_Y}{dm^P_Y}\right) dm^P_Y \right) dm^P_X$$

$$= \int \left(\int I_A \, dm^P_{Y/X} \right) dm^P_X = \iint I_A \, dm^P_{X,Y} \; .$$

Par conséquent $m^P_{X,Y} << m^P_X \otimes m^P_Y$ et

$$\frac{dm^P_{X,Y}}{d(m_X \otimes m_Y)} = \frac{dm^P_{Y/X}}{dm} \cdot \frac{dm^Q_Y}{dm^P_Y} \tag{27}$$

La quantité d'information $I_T(X,Y)$ entre X et Y sera calculée, d'après [8] , par

$$I_T(X,Y) = E \log \frac{dm^P_{X,Y}}{d(m^P_X \otimes m^P_Y)}$$

l'espérance mathématique étant prise par rapport à $m^P_{X,Y}$.

Compte-tenu de (24), (26) et (27), on a

$$I_T(X,Y) = E\,[\int_o^T \phi_s \, dY^c_s - \frac{1}{2} \int_o^T \phi^2_s \, dA_s$$

$$- \int_o^T \hat{\phi}_s \, dY^c_s + \frac{1}{2} \int_o^T \hat{\phi}^2_s \, dA_s]$$

$$= E_P\,[\int_o^T \phi_s \, dY^c_s - \frac{1}{2} \int_o^T \phi^2_s \, dA_s$$

$$- \int_o^T \hat{\phi}_s \, dY^c_s + \frac{1}{2} \int_o^T \hat{\phi}^2_s \, dA_s].$$

En remplaçant, d'après (19), dY^c_s par $\phi_s \, dW_s + dA_s$, on obtient finalement

$$I_T(X,Y) = E_P\,[\int_o^T (\phi_s - \hat{\phi}_s) \, dW_s + \frac{1}{2}\int_o^T (\phi_s - \hat{\phi}_s)^2 dA_s]$$

$$= \frac{1}{2} \int_o^T E_P(\phi_s - \hat{\phi}_s)^2 \, dA_s .$$

THEOREME

Sous les hypothèses faites et les conditions de validité du modèle décrit plus haut, la quantité d'information transmise à travers le canal dans l'intervalle de temps [0,T] est donnée par

$$I_t(X,Y) = \frac{1}{2} \int_o^t E(\phi_s - \hat{\phi}_s)^2 \, dA_s \tag{29}$$

La formule (29) est similaire à l'expression de l'information transmise dans le cas où le canal considéré est perturbé par un p.a.i. gaussien (cf.[9] et [10] et en est une généralisation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - I I GIKHMAN and A.V. SKOROKHOD
Introduction to the Theory of Random Processes, Philadelphia : Sounders Co, 1965.

[2] L.I.GALTCHOUK
"Représentation des martingales engendrées par un processus à accroissements indépendants" Annales de l'Institut Henri Poincaré Section B, Vol XII, N°3, p.199-211, 1976.

[3] - A.A. NOVIKOV
"On an identity for Stochastic Integrals" Theory of Probability and its Applications Vol 17, N°4, p.717-720, 1972.

[4] - R.S. LIPCER and A.N. SIRJAEV
"On the Absolute Continuity of Measures Corresponding to Processes of Diffusion Type to a Wiener Measure" Math.USSR Izvestija Vol. 6, N°4, p.839-882, 1972.

[5] - P.A. MEYER
"Un cours sur les intégrales stochastiques" Séminaires de Probabilités X, p.245-400 Lecture Notes in Mathematics, N°511. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[6] - P. BREMAUD et M. YOR
"Changes of Filtrations and of Probability Measures" Preprint, 1976.

[7] - B. MAISONNEUVE
"Topologies du type de Skorokhod" Séminaires de Probabilités VI, p.113-117. Lecture Notes in Mathematics, n°258. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[8] - I.M.GELFAND and A.M.YAGLOM
"Calculation of the Amount of Information about a Random Function contained in another such Function" American Mathematical Society Translations. Series 2, N°12, p.199-247.

[9] - T.T.KADOTA, M.ZAKAI and J.ZIV
"Mutual Information of White Gaussian Channel with and without Feedback" IEEE Transactions on information Theory IT-17 p.368-371, 1971.

[10] - M.HITSUDA and SH.IHARA
"Gaussian Channels and the Optimal Coding" Journal of Multivariate Analysis, Vol 5, N°1, P.106-118, 1975.