COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

UTILISATION DES π TRANSFORMATIONS POUR LA RECONSTITUTION DE FONCTIONS DENSITE

Jacques WOLF

I.U.T. de LANNION
Route de Perros-Guirec 22302 LANNION

RESUME

Depuis quelques années, en particulier depuis l'apparition de l'EMI-SCANNER, de nombreuses recherches et études ont été développées pour retrouver la structure d'un objet situé dans R^n à partir de données connues dans R^{n-1}. Seul l'emploi de calculateurs puissants et rapides a permis de résoudre pratiquement de tels problèmes. La reconstitution d'un objet -fonction densité- se fait par des méthodes de projection : soit mathématiquement étant donné plusieurs α et $\varphi_\alpha(x)$, trouver f telle que

$$\varphi_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \sin\alpha)dy$$

On se sert habituellement du "slice projection theorem".

Afin d'obtenir de nouvelles facilités, surtout dans les applications numériques on généralise ce théorème. A partir de relations qui en découlent on peut utiliser les résultats du problème des moments de Hausdorff pour résoudre le problème initial.

SUMMARY

The last few years have seen remarkable advances with the advent of the EMI scanner and its descendants to infer the structure of a n dimensional object from a set of data known in R^{n-1}. The use of fast computer has allowed to solve these big problems. The reconstitution of an object -density function- is made by projection's method :

given α and $\varphi_\alpha(x)$, find f

$$\varphi_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha)dy$$

In this paper, to have new facilities -numerical, memory, speed..- the slice-projection theorem is generalized. From this new theorem, the theory of the problem of moments of Hausdorff is used.

UTILISATIONS DES π TRANSFORMATIONS POUR LA RECONSTITUTION DE FONCTIONS DENSITES.

Par reconstitution d'un objet, on signifie la recherche d'une fonction densité $\rho(M)$ où $M \in D$. Pour se fixer les idées imaginons que D soit une coupe plane du corps humain (fig.1). Cette coupe du corps humain est passée aux rayons X. On récupère ainsi du côté opposé à la source des rayons X, une image appelée projection. En réalité au point m on mesure le cumul des densités ponctuelles $\rho(M)$ suivant le rayon r.

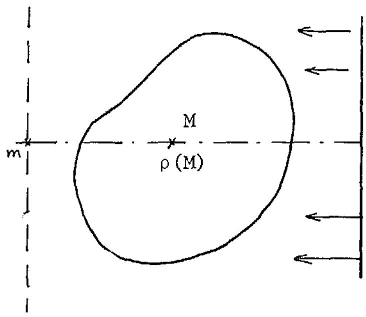

Fig.1

Modélisation mathématique du problème

(Afin de mieux percevoir géométriquement la signification des résultats proposés, les énoncés valables dans $\mathbb{R}^n$, seront faites dans $\mathbb{R}^2$.

Soit le repère OXY, et f(X,Y) la fonction densité cherchée.

Soit α l'angle de la droite avec OX (fig.2) sur laquelle se fait la projection. Soit Oxy le nouveau système d'axes ainsi déterminé. On appelle <u>projection au point x suivant α la quantité</u>

$$\varphi_\alpha(x) = \int_{d_x} f(X,Y)\, dy \qquad (1)$$

où d_x est la droite perpendiculaire à Ox au point d'abscisse x. d_x est un rayon.

Le problème ainsi posé est de déterminer f à partir de la connaissance de $\varphi_\alpha(x)$. Il existe plusieurs types de méthodes pour résoudre ce problème.

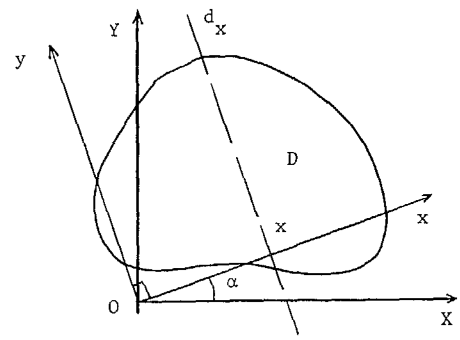

Fig.2

- méthodes directes [1]
- méthodes utilisant la transformation de Fourier [2], qui seront ici généralisées par la π transformation.
- méthodes par développement en série [3].

Définition d'une π - transformation

Soit $\pi : u \longrightarrow \pi(u)$ une application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ $(\in L^1_{loc}(\mathbb{R}))$ et considérons une fonction g : (p = 1 ou 2)

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{C},\ \in \Sigma(\mathbb{R}^p)$$

ensemble des fonctions à support compact et sommables.

On considère la transformation, appelée π -transformation, $g \longrightarrow \hat{g}$ définie de la manière suivante :

si $s \in \mathbb{R}^p$, $t \in \mathbb{R}^p$

$$\hat{g}(s) = \int_{\mathbb{R}^p} \pi(\langle s, t\rangle)\, g(t)\, dt \qquad (2)$$

où $\langle s, t\rangle = \sum_{i=1}^{p} s_i t_i$

On appelle <u>projection</u> de f $(\in \Sigma(\mathbb{R}^2))$ au point x suivant la direction α, la quantité :

$$\varphi_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \sin\alpha)\, dy \qquad (3)$$

C'est l'écriture de (1) dans le système d'axes Ôxy.

<u>Problème inverse</u> : Etant donné diverses projections de f, trouver des moyens pour déterminer -reconstituer- la fonction densité f.

.../...

Définissant la π -transformée de φ_α (à une dimension) et la π -transformée de f (dimension 2), on montre alors :

Théorème 1 : La π -transformée de φ_α est la tranche suivant l'angle α de la π -transformée de f soit :

$$\hat{\varphi}_\alpha(s) = \hat{f}\ (s \cos \alpha,\ s \sin \alpha) \qquad (4)$$

Remarque : Si on choisit $\pi\ (u) \equiv e^{iu}$, on retrouve le cas particulier de la transformée de Fourier connu sous le nom de slice-projection theorem [5] [4].

La détermination de f se fait généralement par discrétisation (3) ou de (4) (cas de Fourier), ce qui amène à la résolution de gros systèmes. Dans [6] on retrouve -en particularisant π- des résultats connus tels que : si f est supposé constante sur des rectangles élémentaires égaux, f peut être déterminée au moyen d'une seule projection, ou **bien des** résultats nouveaux par exemple concernant le choix d'un maillage.

Cependant la π -transformation donne des relations intéressantes permettant de déterminer les moments de f, et par là même d'avoir à résoudre des systèmes de petites tailles.

Calcul des moments de f

La relation (4) s'écrit encore :

$$\int_{\mathbb{R}} \pi(s.t)\varphi_\alpha\ (t)\ dt = \int_{\mathbb{R}^2} \pi(s \cos \alpha\ x_1 + s \sin \alpha\ x_2)\ f(x_1,x_2)\ dx_1\ \ dx_2$$

En choisissant :

$\pi\ (u) = u^k$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} t^k\varphi_\alpha(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}^2} (\cos \alpha\ x_1 + \sin\ \alpha x_2\ )^k\ f(x_1,x_2)\ dx_1\ dx_2$$

.../...

.../...

c'est à dire en posant :

$$\gamma_i^\alpha = \int t^k \varphi_\alpha(t)\ dt$$

et $\mu_{ij} = \int_{\mathbb{R}} x^i{}_1\ \ x^j{}_2\ f(x_1,\ x_2)\ dx_1\ dx_2$, on obtient

$$\sum_{\ell=o}^{k} C_k^\ell\ \ \cos^\ell\alpha\ \sin^{k-\ell}\alpha\ \mu_{\ell k-\ell} = \gamma_k^\alpha \qquad k = 0,1,2\ldots \quad (5)$$

(tant que ces moments existent).

La détermination des moments $\mu_{\ell k-1}$ (k fixé , $\ell = 0,1,\ldots$ k) est faite en choisissant divers angles $\alpha_o,\ldots\ \alpha_j\ldots.\alpha_k$, ce qui amène à la résolution d'un système linéaire.

$$Ax = b$$

$$b^t = \left[\gamma_k^{\alpha_o},\ldots.\ \ \gamma_k^{\alpha_k}\right]$$

$$x^t = \left[\mu_{k_o}\ ,\mu_{k-1\ 1}\ldots\ \mu_{ok}\right]$$

posons $C_k^i\ \ x_i = y_i$

soit $$Cx = \begin{bmatrix} C_k^o & & \\ & \ddots & \\ & & C_k^k \end{bmatrix} x = y$$

On peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \cos^k\alpha_o & \ldots. & \cos^{k-1}\alpha_o\ \sin\alpha_o & \ldots. & \sin^k\alpha_o \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cos^k\alpha_k & & \cos^{k-1}\alpha_k\ \sin\alpha_k & & \sin^k\alpha_k \end{bmatrix} =$$

E

$$\begin{bmatrix} \cos^k\alpha_o & & \\ & \ddots & \\ & & \cos^k\alpha_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{tg}\ \alpha_o & \cdots & \mathrm{tg}^k\alpha_o \\ \vdots & & & \\ 1 & \mathrm{tg}\ \alpha_k & \cdots & \mathrm{tg}^k\alpha_k \end{bmatrix}$$

D V

.../...

.../...

Donc $A = E\ C$

soit encore $A = D\ V\ C$

où V est une matrice de Vandermonde donc

soit :

$$V = \prod_{i>j} (\operatorname{tg} \alpha_i - \operatorname{tg} \alpha_j) = \frac{\prod_{i>j} \sin(\alpha_i - \alpha_j)}{\cos^k \alpha_o \ \ldots\ \cos^k \alpha_k}$$

$$\text{soit } A = C_k^o \ldots C_k^k \prod_{i>j} \sin(\alpha_i - \alpha_j)$$

d'où

Théorème 2 : Les moments d'ordre k de f peuvent être déterminés à partir des moments d'ordre k de sa projection pour k + 1 angles distincts.

Pour calculer les (k+1) moments d'ordre k il suffit donc de résoudre un système de (k+1) équations. Cependant ceci peut encore être réduit en effet considérons (5)

$$\sum_{l=o}^{k} C_k^{\ell} \cos^{\ell} \alpha \ \sin^{k-\ell} \alpha \ x_{k-l} = \gamma_k^{\alpha}$$

multiplions les deux membres par $\cos^j \alpha \ \sin^{k-j} \alpha$ et intégrons sur l'intervalle $[o, \pi]$

$$\sum_{l=o}^{k} C_k^{\ell} \int_o^{\pi} \cos^{\ell+j} \alpha \ \sin^{2k-(\ell+j)} \alpha \ d\alpha \ x_{k-\ell} = \int_o^{\pi} \gamma_k^{\alpha} \ d\alpha \qquad (6)$$

$$j = o, 1 \ldots . \ k$$

En regardant ce système linéaire, on remarque qu'il se décompose en deux sous-systèmes linéaires l'un donnant les x_j avec j pair, et l'autre donnant les x_j avec j impair.

.../...

.../...

Reconstitution de f

Une fois les moments déterminés par (5) ou (6) f est obtenue à partir d'un développement en série de polynomes orthogonaux (à deux variables) de Legendre. Dans le cas où le domaine D est un rectangle les calculs quoique complexes utilisent uniquement les polynomes de Legendre à 1 variable.

Cependant on essaiera, dans le cas où tous les moments de f existent, de généraliser la solution du problème des moments de Hausdorff au cas à 2 variables, proposées dans [7].

1 - Note technique sur l'EMI - SCANNER

2 - R.A. Crowther, D.J. De Rosier, A. Klug.
"The reconstruction of a dimensionnal structure from projections and its applications to electron microscopy".
Proc. Roy. Soc. Lond. A. 317 318-340 (1970)

3 - J. Wolf "Utilisation des prolate spheroidal wave functions en vue de la reconstitution d'un objet".
C.R. du Colloque du GRETSI 16-21 juin 1975.

4 - R.M. Mersereau, A. Oppenheim
Proc. IEEE Vol 62 n°10 P. 1319-1338

5 - I.M. Guelfand, M.I. Graev, N. Vilenkin
Les distributions Tome 5 (Dunod)

6 - J. Wolf
Séminaire I.M.A. Grenoble n° 234 (1975)

7 - J.A. Shohat, J.D. Tamarkin
The problem of moments
Amer. math. soc. (1963).