

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

LES APPLICATIONS AU FILTRAGE D'UNE METHODE DE RESOLUTION
L'EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE PERIODIQUE *

A. COUVE et B. ROSSETTO

GRUPE D'ETUDES "SIGNAUX ET SYSTEMES" - CENTRE UNIVERSITAIRE DE TOULON ET DU VAR - 83130 LA GARDE

RESUME

On établit par la méthode des produits infinis l'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire périodique. On en déduit une méthode de résolution de telles équations basée sur le calcul préalable des valeurs propres. On examine la convergence du déterminant infini qui intervient, puis on en donne différentes méthodes de calcul adaptées à tel ou tel type de problème.

On montre, sur quelques exemples du 3^{ème} ordre, que cette méthode permet l'étude systématique de la stabilité de systèmes régis par ces équations. On met en évidence, par d'autres exemples choisis dans l'ordre 4, le glissement des fréquences propres provoqué par un coefficient variable, et on étudie l'influence de l'amplitude de ce dernier.

SUMMARY

The characteristic equation for the periodic linear differential equation is established by the method of infinite products.

A method is deduced for a solution of these equations, based on previous calculation of characteristic values. The convergence of the intervening infinite determinant is examined, and then different methods for its calculation, adapted to various types of problems, are proposed.

Using some 3rd order examples, it is shown that this method makes it possible to carry out a systematic study of the stability of systems governed by these equations. With some other 4th order examples, the sliding of characteristic frequencies, which is induced by a variable coefficient, is highlighted; and the influence of its amplitude is studied.

* Nous remercions bien vivement M. PETIAU, Directeur de Recherches au C.N.R.S. pour les suggestions qu'il a bien voulu nous faire tout au long de ce travail, en particulier en ce qui concerne les applications.



LES APPLICATIONS AU FILTRAGE D'UNE METHODE DE RESOLUTION
L'EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE PERIODIQUE
PAR

A. COUVE et B. ROSSETTO

Soit $A(t)$ une matrice $n \times n$ formée de distributions définies sur \mathbb{R} et T -périodiques ($T \in \mathbb{R}^+$). Nous avons donc, $\forall t \in \mathbb{R}$, $A(t+T) = A(t)$. $x(t)$ désignant un vecteur de \mathbb{R}^n , une conséquence du théorème de LIAPOUNOV est que l'équation différentielle

$$(1) \quad x'(t) = A(t) \cdot x(t)$$

possède une matrice fondamentale de la forme $X(t) = S(t) \cdot \exp(Bt)$ avec $S(t)$ T -périodique et B constante.

Les valeurs propres de B , que nous appellerons les valeurs propres du système différentiel (1), revêtent une grande importance : leur partie réelle est liée au comportement asymptotique de la solution, c'est-à-dire à la stabilité du système régi par l'équation différentielle. La partie imaginaire est une pulsation propre.

Leur détermination, cependant, est ardue et requiert la connaissance d'une matrice fondamentale, $X(t) [1]$.

Si $C = e^{TB}$ désigne la matrice de monodromie, nous avons en effet $X(t) \cdot X(t+T) = C$

D'autres méthodes, dont la plus importante est celle de L. CESARI [2] - d'ailleurs également applicable aux systèmes non linéaires - sont essentiellement réservées aux faibles perturbations périodiques.

L'objet de notre propos est de déterminer les valeurs propres à partir des seuls coefficients périodiques, et d'appliquer cette méthode à l'étude de la stabilité de systèmes régis par une équation différentielle linéaire périodique et à la recherche de corrélation de fréquence.

1 - DETERMINATION DES VALEURS PROPRES.

Il est préférable pour les calculs numériques de décomposer notre système différentiel (1) en équations du type

$$(2) \quad U^{(n)} + J_1(t) \cdot U^{(n-1)} + \dots + J_n(t) \cdot U = 0$$

1.1. Hypothèses.

1.1.1 Les $J_k(t)$ ($1 \leq k \leq n$) sont des distributions réelles et π -périodiques. Elles possèdent un développement en série de Fourier uniformément convergent

$$(3) \quad J_k(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \theta_{k,m} e^{2mit}, \quad m \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq n$$

avec $\theta_{k,0}$ réel et $\theta_{k,m}^* = \theta_{k,-m}$.

1.1.2. $\sum_r |m|^{n-k} |\theta_{k,m}|^2 < \infty$ est de carré sommable, ce qui entraîne $\forall k$

1.2. Equation caractéristique.

Lorsque $J_k = \text{const.}$, $\forall k$, les valeurs propres, que nous appellerons S_k sont celles de l'équation différentielle à coefficients $\theta_{k,0}$ constants.

Nous avons établi par ailleurs [3] les résultats suivants :

1.2.1. Les n valeurs propres μ_k sont soit

réelles soit deux à deux complexes conjuguées

$$1.2.2. \quad \sum_{k=1}^n \mu_k = \sum_{k=1}^n S_k$$

1.2.3. Soit $D(\mu) = \|a_{m,p}\|$ le déterminant infini formé des termes

$$(4) \quad a_{m,p} = \frac{\sum_{k=1}^n (\mu + 2pi)^{n-k} \theta_{k,m-p}}{\sum_{k=0}^m (\mu + 2mi)^{n-k} \theta_{k,0}}$$

$$a_{m,m} = 1$$

Ce déterminant converge.

Les valeurs propres μ_k sont solution de l'équation caractéristique

$$(5) \quad D(\mu) = \prod_{k=1}^n \frac{e^{\pi\mu} - e^{\pi S_k}}{e^{\pi\mu} - e^{\pi S_k}} = \prod_{k=1}^n \frac{sh \frac{\pi}{2}(\mu - \mu_k)}{sh \frac{\pi}{2}(\mu - S_k)} = 0$$

Cette équation caractéristique généralise celle qu'avait établi Hill [4] pour le second ordre.

1.3. Démonstration.

La démonstration que nous donnons ci-après est basée sur les produits infinis.

D'après le théorème de Floquet, une solution particulière de (2) peut être mise sous la forme

$$(6) \quad U(t) = e^{\mu t} \phi(t), \quad \mu \in \mathbb{C}, \phi \pi\text{-périod.}$$

En développant $\phi(t)$, la forme générale de la solution donnée par (6) devient

$$(8) \quad U(t) = e^{\mu t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{2mit}, \quad C_m \in \mathbb{C} \text{ et } m \in \mathbb{Z}$$

Nous portons U de même que la valeur de J_k tirée de (3) dans l'équation (2). Par identification, nous obtenons le système homogène et infini d'équations infinies

$$(9) \quad (\mu + 2mi)^n C_m + \sum_{k=1}^n \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\mu + 2pi)^{n-k} C_p \theta_{k,m-p} = 0$$

Les n valeurs propres μ_k sont solution de l'équation déterminante qui lui est associée

$$(10) \quad D(\mu) = \left\| \sum_{k=0}^n (\mu + 2pi)^{n-k} \theta_{k,m-p} \right\| = 0$$

1.3.1 - Propriétés de $D(\mu)$.

a) $D(\mu)$ est $2i$ -périodique. En effet, ce déterminant étant infini, une translation de j lignes et j colonnes, $\forall j \in \mathbb{Z}$, ne change pas sa valeur.

b) formons $D(\mu^*)$. L'hypothèse 1.1.1. et le fait que la permutation de m en $-m$ puis de p en $-p$ ne change pas la valeur du déterminant entraînent

$$D(\mu^*) = D^*(\mu)$$

On en déduit que les valeurs propres sont soit réelles, soit deux à deux complexes conjuguées (propriété 1.2.1).

1.3.2. - Identification de $D(\mu)$ par une fonction analytique.

Les propriétés de $D(\mu)$ nous suggèrent de poser

$$D(\mu) = A \prod_{k=1}^n (e^{\pi\mu} - e^{\pi\mu_k})$$

que l'on peut développer en produits infinis

$$(11) \quad D(\mu) = A \cdot \pi^n \cdot \exp \frac{i}{2} (n\mu + \sum_{k=1}^n \theta_k) \cdot \prod_m \left(\frac{1}{2mi} \right)^n \cdot \prod_m \left[\prod_{k=1}^n (\mu - \mu_k + 2mi) \right]$$

Lorsque les $\theta_{k,p}$, sont tous nuls $\forall p \neq 0$ seuls les termes de la diagonale principale ne sont pas nuls et les valeurs propres, nous l'avons vu, sont notées ζ_k

$$(12) \quad T_2 [D(\mu)] = A \cdot \pi^n \cdot \exp \frac{i}{2} (n\mu + \sum_{k=1}^n \zeta_k) \cdot \prod_m \left(\frac{1}{2mi} \right)^n \cdot \prod_m \left[\prod_{k=1}^n (\mu - \zeta_k + 2mi) \right]$$

Si nous divisons chaque ligne par le terme diagonal correspondant, nous obtenons le déterminant $\Delta(\mu) = D(\mu) / T_2$ formé des termes (4), qui possède les propriétés 1.3.1. a) et b) de $D(\mu)$. De plus

1.3.3. - $\Delta(\mu)$ est convergent.

Ce n'est que lorsque $T_1 = C^{\text{te}}$ que $\Delta(\mu)$ constitue un déterminant de Hill au sens de MAGNUS et WINKLER [5] c'est-à-dire que l'on a

$$\sum_{m,p} |a_{m,p} - \delta_{m,p}| < \infty$$

ce qui suffit à assurer sa convergence.

Si les $\theta_{j,p}$ ne sont pas nuls $\forall p \neq 0$, cette condition n'est plus vérifiée. Cependant le déterminant demeure convergent. Nous donnons ci-après les principales étapes de la démonstration :

a) soit δ_l le déterminant formé du tableau $(l+1) \times (l+1)$ des termes $a_{m,p}$ donnés par (4), $0 \leq m, p \leq l$. Si δ_l tend vers une limite finie lorsque $l \rightarrow \infty$, il en est de même de $\Delta(\mu)$.

b) D'après un théorème dû à HADAMARD [5]

$$|\delta_l| \leq \prod_{m=0}^l \left[\sum_{p=0}^l |a_{m,p}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = H_l$$

Posons

$$(13) \quad \alpha_m^2 = \sum_{p=0}^m |a_{m,p}|^2 - 1$$

$$\alpha_m^2 = \frac{\sum_{j=m}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n [\mu + 2(m-j)i]^{n-k} \theta_{k,j} \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^m (\mu + 2mi)^{n-k} \theta_{k,0} \right|^2}$$

Nous avons, au numérateur un nombre fini de sommes qui convergent, selon l'hypothèse 1.1.2. Par ailleurs α_m^2 est constitué du rapport de deux polynômes $\alpha_m^2 = Z(m)/Q(m)$. Le degré en m de $Z(m)$ est $2n-2$, celui de $Q(m)$, $2n$.

On en tire

$$\sum_m \alpha_m^2 < \infty, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} H_l = \prod_{m=0}^{\infty} (1 + \alpha_m^2)^{\frac{1}{2}} = H < \infty$$

c) Soit $A_{l,p}$ le mineur associé à $a_{l,p}$ dans δ_l

$$|A_{l,p}| \leq \left[\sum_{j=0}^{l-1} |a_{p,j}|^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot H \leq H \cdot \alpha_p, \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

$$d) \quad \delta_l = \sum_{p=0}^l (-1)^{l+p} a_{l,p} \cdot A_{l,p}$$

$$\delta_l - \delta_{l-1} = (-1)^l \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^p a_{l,p} \cdot A_{l,p} = (-1)^l \mu_l$$

or

$$|\mu_l| \leq \sum_{p=0}^{l-1} |a_{l,p}| \cdot |A_{l,p}| \leq H \sum_{p=0}^{\infty} |a_{l,p}| \alpha_p$$

La somme $\sum_{p=0}^{\infty} |a_{l,p} \cdot A_{l,p}|$ converge donc vers le rapport de deux polynômes $\mu(l) = P_1(l)/Q_1(l)$, $P_1(l)$ étant de degré $n-1$ et $Q_1(l)$ de degré n .

$\sum_{l=0}^{\infty} (\delta_l - \delta_{l-1})$ est donc formé d'un nombre fini de sommes de suites alternées - à module décroissant - et dont le terme général tend vers zéro. La limite de $\Delta(\mu)$ existe donc et $\Delta(\mu)$ converge.

1.3.4. Autres propriétés de $\Delta(\mu)$.

a) $\Delta(\mu)$ admet pour pôles $\zeta_k + 2qi, q \in \mathbb{Z}$

b) $\lim_{\mu \rightarrow \pm \infty} \Delta(\mu) = 1$. Pour que cette propriété soit vérifiée, on s'aperçoit en divisant (11) par (12), que l'on doit avoir la relation bien connue de § 1.2.2.

Il vient alors

$$(14) \quad \Delta(\mu) = \prod_{k=1}^n \prod_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\mu - \mu_k + 2mi}{\mu - \zeta_k + 2mi}$$

qui n'est autre que le développement en produits infinis de l'équation caractéristique.

II - RESOLUTION DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE. INTEGRALE GENERALE.

La résolution de l'équation caractéristique (5) est facilitée par la condition 1.2.2. et la propriété 1.2.1. Les valeurs propres se déduisent d'un système de $n-1$ équations obtenues en portant dans (5) $n-1$ valeur de μ .

C'est ainsi que l'on est amené à évaluer $n-1$ déterminants complexes et infinis. Nous donnons différentes méthodes adaptées à tel ou tel type de problème.

2.1 - Développement limité du déterminant.

Sa diagonale principale étant formée de 1, l'importance des autres termes décroissant avec leur éloignement par rapport au terme $a_{0,0}$ le déterminant formé des termes (4) se prête bien à un développement limité. Soient i, j, k, l, m, n , des entiers relatifs différents, écrits dans l'ordre croissant de leur valeur algébrique ; nous obtenons, pour μ réel ou bien pour $\mu = \pm i$

$$\Delta(\mu) = 1 - \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2$$

$$+ \sum_{i,j,k,l} |a_{i,j}|^2 \cdot |a_{k,l}|^2$$

$$(16) \quad - 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i,j,k} a_{i,j} \cdot a_{j,k} \cdot a_{k,i} \right\}$$

$$- \sum_{i,j,k,l,m,n} |a_{i,j}|^2 \cdot |a_{k,l}|^2 \cdot |a_{m,n}|^2$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i,j,k,l,m} a_{i,j} \cdot a_{j,m} \cdot a_{m,i} \cdot |a_{k,l}|^2 + |a_{i,j}|^2 \cdot a_{l,k} \cdot a_{k,m} \cdot a_{m,l} \right\}$$

$$- 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i,j,k,l} a_{i,j} \cdot a_{j,k} \cdot a_{k,l} \cdot a_{l,i} + a_{i,k} \cdot a_{k,j} \cdot a_{j,l} \cdot a_{l,i} + a_{i,j} \cdot a_{k,i} \cdot a_{j,l} \cdot a_{l,k} \right\} + \dots$$



Ce développement peut être poursuivi aussi loin que l'on veut, puis programmé. Si l'on considère les $a_{m,p}$ comme des fonctions de m et de p , et si on les calcule grâce à l'expression (4) au fur et à mesure, il n'est pas nécessaire de conserver simultanément en mémoire un double tableau encombrant. C'est donc par un procédé de ce type que l'on peut obtenir toute la précision souhaitée et plus particulièrement lorsqu'un harmonique de rang élevé prend une valeur prépondérante.

2.2. - Calcul par troncature.

Lorsque ce n'est pas le cas, et que le coefficient de la dérivée d'ordre $n-1$ demeure constant, on obtient une précision remarquable en tronquant le déterminant (4) et en le ramenant à un tableau $\Delta_l(\mu)$, $(2l+1) \times (2l+1)$. En effet, l'erreur peut se calculer en prenant les termes négligés dans le développement (16)

$$E_l(\mu) \approx \sum_{|i| > l, |j| > |i|} |a_{i,j}|^2 + \dots$$

Si de nombreux termes du développement entrent en jeu et si l'amplitude de 3 ou 4 d'entre eux, quel que soit leur rang, vient fausser le calcul par troncature, nous adopterons une méthode mixte:

$$\Delta(\mu) = \Delta_l(\mu) + E_l(\mu)$$

2.3. - Méthodes d'extrapolation.

On peut compléter les méthodes décrites ci-dessus par une extrapolation basée sur l'observation du développement (16). Si $a_{m,p}$ est en m^{-x} , on écrira

$$\Delta(\mu) = \Delta_l(\mu) + \sum_{l+1}^{\infty} \left[\sum_n \frac{A_n}{m^{2(x+n)}} \right]$$

Enfin, le tableau des approximants de Padé [6] peut être appliqué à la suite

$$\Delta_{l-u}, \Delta_{l-u+1}, \dots, \Delta_l, \dots, \Delta_{l+u}$$

de manière à obtenir une accélération de convergence.

2.4. - Solution de l'équation différentielle

Une fois trouvée une valeur μ_k vérifiant à 2i près l'équation caractéristique, on la porte dans le système (9) afin d'obtenir la solution particulière correspondante. Lorsque μ_k est réel, dans le cas de la décomposition en série de Fourier, celle-ci doit être à symétrie hermitique, et l'on doit avoir $C_m = C_{-m}^*$.

Ainsi devons-nous supprimer l'équation correspondant à $m=0$ et, en posant $C_0 = 1$, nous reportons la colonne $p=0$ dans le second membre de manière à obtenir, après résolution du système linéaire, la valeur des C_m en fonction des C_0 , constantes arbitraires déterminées par les conditions initiales.

Les autres racines de (5) conduisent, si elles sont différentes, à des solutions particulières linéairement indépendantes, celles correspondant à μ_k et μ_k^* étant complexes conjuguées.

III - APPLICATIONS.

3.1. - Stabilité de l'intégrale générale.

Application à des exemples du 3° ordre.

Nous choisirons le cas particulier où l'un seulement des $\theta_{k,0}$ n'est pas nul, soit $\theta_{3,0}$ et $[\theta_{3,0}]^{1/3} = \theta_0$.

La condition (8) entraîne alors

$$\sum_{k=1}^3 \mu_k = 0$$

Posons $\mu_1 = 2x/\pi$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\mu_2 = (-x + iy)/\pi = \mu_3^*, \quad y \in \mathbb{C}.$$

si $\eta_0 = \Delta(0) [-sh\pi\theta_0 + 2sh\pi\theta_0/2 \cdot \cos\pi\sqrt{3}\theta_0/2]$

$$\eta_i = \Delta(i) [1 + ch\pi\theta_0 + 2ch\pi\theta_0/2 \cdot \cos\pi\sqrt{3}\theta_0/2]$$

l'équation caractéristique devient, si $t = t_0 x$

$$\eta_i t^3 + \eta_0 t^2 + (4 - \eta_i) t - \eta_0 = 0$$

$$\cos \eta = \frac{\eta_i}{2chx} - chx = shx - \frac{\eta_0}{2shx}$$

Sur les courbes de la Fig. 2, nous pouvons observer les trajectoires des parties réelles des valeurs propres lorsque a , l'amplitude du coefficient périodique, varie. Pour a grand, l'équation se rapproche d'une équation du second ordre, si bien que l'on retrouve l'existence de solutions particulières périodiques autour de $a \approx 15$.

On étudie, Fig. 1, l'influence de la fréquence du coefficient variable. On remarquera que les valeurs propres évoluent vers celles du système non perturbé lorsque la fréquence augmente.

3.2. - Recherche de corrélation de fréquence

Les C_m ne sont que les amplitudes relatives des harmoniques du spectre de la solution particulière. La partie imaginaire de μ permet donc de voir s'il existe des fréquences qui ne sont pas des combinaisons linéaires des fréquences propres du système non perturbé avec celles des coefficients variables. Le système peut alors rentrer en résonance avec une excitation extérieure à une fréquence imprévisible autrement que par le calcul.

Nous donnons ci-après Fig. 3 des exemples choisis dans l'ordre 4, où il apparaît de telles pulsations.

Exemple

Si ω_0 désigne la pulsation propre du système dit fixe, c'est-à-dire pour lequel les $\theta_{k,m}$ sont tous nuls sauf pour $m=0$, et ω la pulsation propre du système à coefficients variables, nous observons :

3.2.1. un accrochage du système non seulement sur un multiple de la fréquence $\frac{1}{\pi}$ du coefficient variable, mais aussi sur la moitié de ces multiples.

3.2.2. un glissement de la pulsation propre dans d'autres cas = $\omega = \omega_0 \pm \alpha$ (cf le cas de l'équation de Hill)

3.2.3. la présence de domaines où les racines sont doubles, leur partie réelle étant alors différente de zéro.

3.2.4. Dans tous les cas la présence d'harmoniques $n\omega$, d'amplitude décroissant avec n .

CONCLUSION

A partir du spectre des coefficients périodiques d'un système quelconque, la méthode permet de déterminer le signal de sortie, sa partie périodique étant connue également par son spectre.

S'il s'agit d'un spectre de Fourier, outre l'étude systématique du comportement asymptotique d'un système excité et du spectre de la sortie, nous pouvons utiliser toutes les possibilités de l'analyse harmonique [8] .

D'autres types de développement peuvent être utilisés, selon le problème. On emploiera, bien sûr, ceux qui convergent le plus rapidement.

On peut envisager des applications à la mécanique, à l'automatique, à l'excitation paramétrique de circuits électriques, etc....

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - N. ROUCHE et J. MAWHIN - Equations différentielles ordinaires - Tomes 1 et 2 - Masson éd. - Paris (1973).
- [2] - L. CESARI - Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations - 3e éd. - (1970) Ergebnisse der Mathematik - Springer Verlag - New-York -
- [3] - B. ROSSETTO - Valeurs propres et modes d'un système régi par une équation différentielle linéaire périodique - CRAS PARIS - Séance du 14.3.77 -
- [4] - G.W. HILL - Motion of Lunar Perigee Act. Math. VIII - (1886).
- [5] - W. MAGNUS et S. WINKLER - Hill's Equation - Interscience Publishers - New York (1966).
- [6] - Accélération des convergences - Journées PADE - 1973 - Centre Universitaire Toulon.
- [7] - B. ROSSETTO - Rapports GESSY n° 75/6, 76/3 et 76/10.
- [8] - G. BONNET - Analyse harmonique de signaux déterministes ou aléatoires - Ann. Télécom. 23, n° 3 - 4 (1968).
- [9] - TH. VOGEL - Actes 69e Congrès AFAS (1949) - 19.

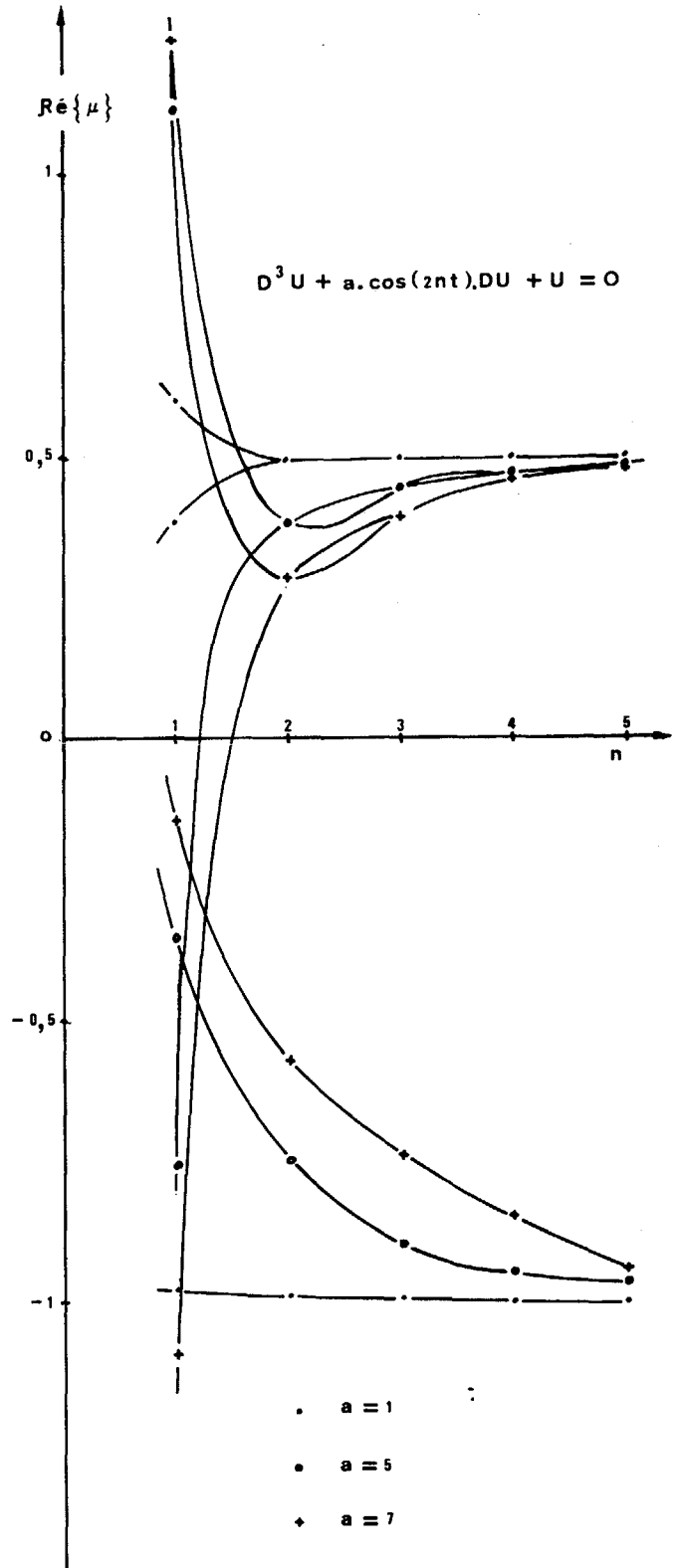


Fig. 1 - Influence de la fréquence d'un coefficient variable sur la partie réelle des valeurs propres d'un système du 3ème ordre : lorsque n augmente, les parties réelles tendent vers celles du système non perturbé, soit + 0,5 , + 0,5 et - 1 .



LES APPLICATIONS AU FILTRAGE D'UNE METHODE DE RESOLUTION
L'EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE PERIODIQUE

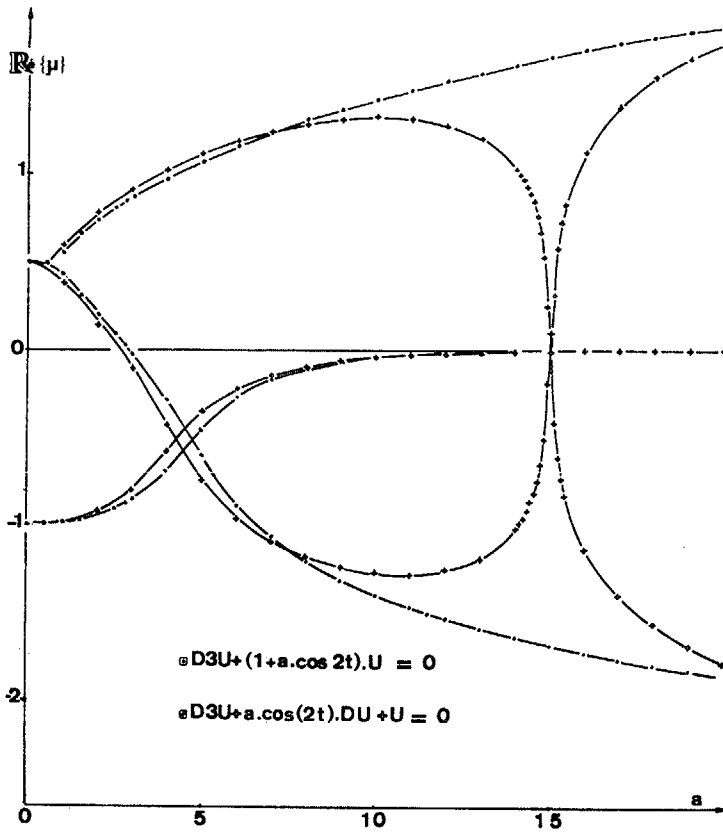


Fig. 2 - Influence de l'amplitude d'un coefficient variable sur les pulsations propres : lorsque a devient grand, le système dont les trajectoires sont notées (+) se rapproche d'un système du second ordre à coefficients variables, si bien que l'on retrouve l'existence de modes périodiques autour de $a = 15$.

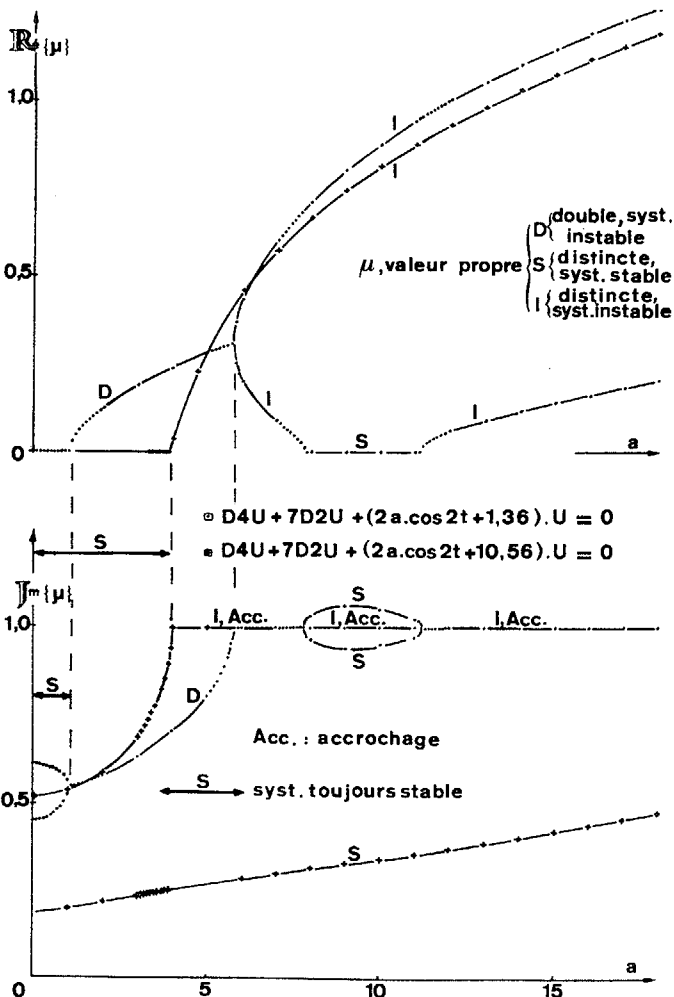


Fig. 3 - Influence de l'amplitude d'un coefficient variable sur les valeurs propres d'un système du 4ème ordre. On notera l'existence de zones où le système non excité est, en général, presque périodique, toujours stable, avec glissement des valeurs propres. Il est instable lorsque les valeurs propres sont multiples ou lorsqu'il y a accrochage sur la fréquence moitié de celle du coefficient variable.