COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

REALISATION D'UN FILTRE QUADRATIQUE OPTIMAL DES COVARIANCES DE BRUITS DANS UN SYSTEME LINEAIRE GAUSSIEN

G. FAVIER

LASSY - 41 Bd. Napoléon III - 06041 NICE

G. SALUT

LAAS - 7 Av. du Colonel Roche - 31400 TOULOUSE

RESUME

Etant donné un système linéaire stochastique, monodimensionnel, à temps discret, admettant une représentation Gaussienne-Markovienne, on se propose de réaliser numériquement un filtre quadratique optimal des covariances de bruits de dynamique Q et de mesure R.

Comme il a été montré /9/ , les estimateurs de ces covariances, construits à l'aide de fonctionnelles quadratiques $\hat{Q}$ et $\hat{R}$ des observations y(t), donnent lieu à une solution récursive "exacte" ayant le caractère d'un filtre.

Nous considérons le cas d'une solution à mémoire constante, c'est-à-dire ne prenant en compte, parmi les produits y(t) y(τ) qu'induisent les observations, que ceux pour lesquels : $t - \tau \leqslant d$.

SUMMARY

A linear monodimensional stochastic system is being considered in a Gaussian-Markovian discrete representation.

An optimal quadratic filter of the dynamic noise covariance Q and the measurement noise covariance R is numerically realized.

As it was demonstrated /9/, these covariances' estimators $\hat{Q}$ and $\hat{R}$, built up with quadratic functionals of the measurements y(t), give an "exact" recursive solution, having a filter's structure.

We consider the case of a constant memory solution, i.e. using, among the products y(t) y(τ), those for which : $t-\tau \leqslant d$.

REALISATION D'UN FILTRE QUADRATIQUE OPTIMAL DES COVARIANCES DE BRUITS DANS UN SYSTEME LINEAIRE GAUSSIEN

I . POSITION DU PROBLEME

On considère un système linéaire stochastique, mono-sortie, à temps discret, décrit par les équations d'état classiques :

$$(1)\quad \begin{cases} x(t+1) = F\,x(t) + w(t) & x,w \in R^n \\ y(t) = H\,x(t) + v(t) & y,v \in R \end{cases}$$

Le système (F,H) est supposé complètement observable, et l'on fait les hypothèses habituelles suivantes :

1) $w(.)$, $v(.)$ sont des bruits blancs gaussiens stationnaires, non corrélés, de moyenne nulle et de covariances respectives Q,R (R définie positive).

2) L'état initial $x(t_o)$ est une variable aléatoire gaussienne indépendante des processus (w,v), de moyenne nulle et de covariance P(to).

Un tel modèle est défini par :

- les paramètres dynamiques : F
- les paramètres statistiques : (Q,R)

H étant fixée par le choix d'une base dans l'espace d'état.

La réalisation du filtre de Kalman associé à ce modèle exige une connaissance exacte de l'ensemble de ces paramètres.
Si ce n'est pas le cas, il est nécessaire d'effectuer une estimation préalable de ces paramètres.

Deux types de méthodes peuvent être appliqués à ce problème d'estimation :

1) Une méthode par corrélation (algorithmes de réalisation stochastique) :

- pour les paramètres dynamiques : utilisation de la fonction d'autocorrélation de la sortie y(t)/7/ ou de la fonction d'intercorrélation entre la sortie et un pseudo processus d'innovation /4/ .
- pour les paramètres statistiques, le système étant mis sous la forme filtre : utilisation de la fonction d'autocorrélation de la sortie /3/, ou d'un pseudo processus d'innovation /1/, /2/,/ 8/ , ou encore de la fonction d'intercorrélation entre la sortie et un pseudo processus d'innovation /4/.

2) Une méthode du type filtrage :

- pour les paramètres dynamiques : utilisation d'une nouvelle forme canonique et estimation optimale conjointe de l'état et des paramètres dynamiques (/9/,/10/).
- pour les paramètres statistiques : estimation quadratique optimale.

Nous supposons dans cet article que les paramètres dynamiques F sont connus tandis que les paramètres statistiques (Q,R) sont inconnus ; et nous considérons ces derniers comme étant "a priori" des variables aléatoires.

D'autre part, dans tout ce qui suit, nous envisageons le cas d'un système monodimensionnel : n = 1.

L'objet du filtre quadratique optimal consiste à estimer , de manière optimale, les covariances Q et R par des fonctionnelles quadratiques $\hat{Q}$, $\hat{R}$ des observations y(t) ; c'est-à-dire :

$$(2)\quad \begin{cases} \hat{E}(Q/t,d) = \hat{Q}(t/t,d) = \displaystyle\sum_{\sigma=t_o}^{t} \sum_{\sigma'=\sup(t_o,\sigma-d)}^{\sigma} M(t;\sigma,\sigma')\,y(\sigma)\,y(\sigma') \\ \hat{E}(R/t,d) = \hat{R}(t/t,d) = \displaystyle\sum_{\sigma=t_o}^{t} \sum_{\sigma'=\sup(t_o,\sigma-d)}^{\sigma} N(t;\sigma,\sigma')\,y(\sigma)\,y(\sigma') \end{cases}$$

où $d \in R^+$ représente la longueur de la fenêtre que l'on déplace de manière à avoir une solution à mémoire constante, en ne prenant en compte, parmi les produits $y(\tau)\,y(\tau')$ qu'induisent les observations, que ceux pour lesquels $|\tau' - \tau| \leq d$.

On considère donc la classe des estimateurs quadratiques qui est l'espace vectoriel des formes linéaires définies sur :
$Y(\tau,\tau') = \{y(\tau)\,y(\tau'),\ t_o \leq \tau\ ,\ \tau' \leq t\}$

L'estimateur optimal $\hat{Q}(t/t,d)$ est tel que l'erreur quadratique d'estimation de toute fonctionnelle linéaire de cette variable soit minimum, c'est-à-dire :

$$(3)\quad E\,\{(\sum_{t=to}^{T} \Lambda(t)\tilde{Q}(t/t,d))^2\} = \text{minimum},$$

pour toutes valeurs de $\Lambda(t)$ et de $T \geq to$.

$\tilde{Q}(t/t,d) = Q(t) - \hat{Q}(t/t,d)$ est l'erreur d'estimation.

Théorème :

Pour que l'estimateur $\hat{Q}(t/t,d)$ soit un estimateur optimal de Q(t) au sens du critère précédent, il faut et il suffit que soit vérifiée l'équation de projection:

$$(4)\quad E\left\{\tilde{Q}(t/t,d)\left[B_1(t) + \sum_{\tau=t_o}^{t} \sum_{\tau'=t_o}^{\tau} B(t;\tau',\tau)\,y(\tau')\,y(\tau)\right]\right\} = 0$$

pour toutes valeurs de $B_1(t)$ et $B(t;\tau',\tau)$.

Par application de ce théorème /9/ , on montre que l'estimateur $\hat{Q}\,(t/t,d)$ peut se mettre sous la forme :

$$(5)\begin{cases} \hat{Q}(t/t,d) = \hat{Q}(t/t-1,d) + \displaystyle\sum_{\sigma=\sup(t_0,t-d)}^{t} M(t;t,\sigma)\left[y(t)y(\sigma) - \hat{E}(y(t)y(\sigma)/t-1,d)\right] \\ \text{de même :} \\ \hat{R}(t/t,d) = \hat{R}(t/t-1,d) + \displaystyle\sum_{\sigma=\sup(t_0,t-d)}^{t} N(t;t,\sigma)\left[y(t)y(\sigma) - \hat{E}(y(t)y(\sigma)/t-1,d)\right] \end{cases}$$

où $\hat{E}(y(t)\ y\ (\sigma)/t-1)$ représente l'estimateur quadratique optimal, au sens du critère (3), de la variable $y(t)\ y\ (\sigma)$, à partir du champ bidimensionnel des mesures $Y(\tau,\tau') = \{y(\tau)y(\tau'),\ t_0 \leqslant \tau,\tau' \leqslant t-1\}$.

II : LES EQUATIONS DU FILTRE QUADRATIQUE OPTIMAL

Dans tout ce qui suit, nous adoptons la convention d'écriture suivante :
$\tilde{E}\,([.]\,/t,d) = [.] - \hat{E}\,([.]\,/t,d)$

D'autre part, pour simplifier les expressions, nous omettrons le paramètre "d" bien que les estimateurs quadratiques soient calculés avec une fenêtre de longueur "d".

Les bruits w et v étant supposés stationnaires, nous avons :

$Q(t) = Q(t-1)$

$R(t) = R(t-1)$

et par suite :

$$(6)\begin{cases} \hat{Q}(t/t-1) = \hat{Q}(t-1/t-1) \\ \hat{R}(t/t-1) = \hat{R}(t-1/t-1) \end{cases}$$

Par simple soustraction de $Q(t)$ et $R(t)$ dans les expressions (5), nous obtenons :

$$(7)\begin{cases} \tilde{Q}(t/t) = \tilde{Q}(t-1/t-1) - \displaystyle\sum_{\sigma=\sup(t_0,t-d)}^{t} M(t;t,\sigma)\,\tilde{E}(y(t)\,y(\sigma)/t-1) \\ \tilde{R}(t/t) = \tilde{R}(t-1/t-1) - \displaystyle\sum_{\sigma=\sup(t_0,t-d)}^{t} N(t;t,\sigma)\,\tilde{E}(y(t)\,y(\sigma)/t-1) \end{cases}$$

Calcul des noyaux $M(t;t,\sigma)$ et $N(t;t,\sigma)$:

Ecrivons que les erreurs d'estimation $\tilde{Q}\,(t/t)$ et $\tilde{R}\,(t/t)$ sont orthogonales à toute information quadratique de l'ensemble :
$Y(\tau,\tau') = \{y(\tau)\ y(\tau'),\ t_0 \leqslant \tau,\ \tau' \leqslant t\}$ et, en particulier, au terme $\tilde{E}(y(\tau)\ y(t)/t-1)$:

$$E\left[\tilde{Q}(t/t)\,\tilde{E}(y(\tau)y(t)/t-1)\right] = E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\,\tilde{E}(y(\tau)y(t)/t-1)\right] - \sum_{\sigma=\sup(t_0,t-d)}^{t} M(t;t,\sigma)\ E\left[\tilde{E}(y(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(y(\tau)y(t)/t-1)\right] = 0$$

De même pour $\tilde{R}\,(t/t)$.

Posons :

$$\Xi\,(t,\sigma;\tau,t) = E\left[\tilde{E}\,(y(t)\ y\ (\sigma)/t-1)\ \tilde{E}\,(y(\tau)y(t)/t-1)\right]$$

Par suite, les noyaux M et N sont donnés par l'inversion des systèmes linéaires algébriques suivants :

$$(8)\quad \begin{aligned} E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\ \tilde{E}(y(\tau)y(t)/t-1)\right] &= \sum_{\sigma=\sup(t_0,t-d)}^{t} M(t;t,\sigma)\ \Xi(t,\sigma,\tau,t) \\ E\left[\tilde{R}(t-1/t-1)\ \tilde{E}(y(\tau)y(t)/t-1)\right] &= \sum_{\sigma=\sup(t_0,t-d)}^{t} N(t;t,\sigma)\ \Xi(t,\sigma;\tau,t) \end{aligned}$$

pour $\sup(t_0,t-d) \leqslant \tau \leqslant t$.

Calcul du prédicteur quadratique

Pour $\sup\,(t_0,t-d) \leqslant \sigma \leqslant t$:

$$(9)\quad \hat{E}(y(t)y(\sigma)/t-1) = H\ \hat{E}(x(t)y(\sigma)/t-1) + \hat{E}(v(t)y(\sigma)/t-1)$$

Avec :

$$(10)\quad \hat{E}(v(t)y(\sigma)/t-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \neq t \\ \hat{R}(t/t-1) & \text{si } \sigma = t \end{cases}$$

$$(11)\quad \hat{E}(x(t)y(\sigma)/t-1) = \begin{cases} F\ \hat{E}(x(t-1)y(\sigma)\ /t-1) & \text{si } \sigma < t \\ H\ \hat{E}(x(t)x(t)/t-1) & \text{si } \sigma = t \end{cases}$$

$$(12)\quad \hat{E}(x(t)\ x(t)/t-1) = F^2\hat{E}(x(t-1)x(t-1)/t-1) + \hat{Q}(t-1/t-1)$$

En résumé :

Le prédicteur quadratique $\hat{E}(y(t)\ y\ (\sigma)/t-1)$ est calculable si l'on dispose des quantités suivantes :

$\hat{Q}\ (t-1/t-1)$	$\hat{E}\ (x(t-1)x(t-1)/t-1)$
$\hat{R}\ (t-1/t-1)$	$\hat{E}\ (x(t-1)y(\sigma)/t-1)$

Filtrage des quantités $x(t)\ y(\sigma)$ pour $\sigma \leqslant t$ et $x(t)x(t)$

Les quantités Q et R étant filtrés à l'aide des équations (5) , il nous reste donc à filtrer les quantités $x(t)\ y(\sigma)$ pour $\sigma \leqslant t$ et $x(t)\ x(t)$ suivant le même type d'équations :

REALISATION D'UN FILTRE QUADRATIQUE OPTIMAL DES COVARIANCES
DE BRUITS DANS UN SYSTEME LINEAIRE GAUSSIEN

$$(13)\begin{cases} \hat{E}(x(t)y(\sigma)/t) = \hat{E}(x(t)y(\sigma)/t-1) + \sum\limits_{\sigma'=\sup(t_0,t-d)}^{t} B(t,\sigma;t,\sigma')\,\tilde{E}(y(t)y(\sigma')/t-1) \\ \hat{E}(x(t)x(t)/t) = \hat{E}(x(t)x(t)/t-1) + \sum\limits_{\sigma'=\sup(t_0,t-d)}^{t} A(t;t,\sigma')\,\tilde{E}(y(t)y(\sigma')/t-1) \end{cases}$$

pour $\sup(t_0,t-d) \leqslant \sigma \leqslant t$.

Calcul des noyaux $A(t;t,\sigma')$ et $B(t,\sigma;t,\sigma')$:

De même que pour les noyaux M et N, les noyaux A et B sont obtenus par inversion des systèmes linéaires algébriques suivants :

$$(14)\begin{cases} E\left[\tilde{E}(x(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(y(\tau)y(t)/t-1)\right] = \sum\limits_{\sigma'=\sup(t_0,t-d)}^{t} B(t,\sigma;t,\sigma')\,\Theta(t,\sigma';\tau,t) \\ E\left[\tilde{E}(x(t)x(t)/t-1)\,\tilde{E}(y(\tau)y(t)/t-1)\right] = \sum\limits_{\sigma'=\sup(t_0,t-d)}^{t} A(t;t,\sigma')\,\Theta(t,\sigma';\tau,t) \end{cases}$$

pour $\sup(t_0,t-d) \leqslant \tau \leqslant t$.

Il nous faut maintenant calculer les moments quatrièmes intervenant dans les expressions précédentes. Remarquons tout d'abord que l'erreur de prédiction quadratique peut s'écrire :

$$\tilde{E}(y(t)y(\tau)/t-1) = H\,\tilde{E}(x(t)y(\tau)/t-1) + \tilde{E}(v(t)y(\tau)/t-1)$$

pour $\sup(t_0,t-d) \leqslant \sigma \leqslant t$.

Covariances entre $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ et l'erreur de prédiction quadratique :

Ces covariances interviennent dans le calcul des noyaux M et N :

pour $\sup(t_0,t-d) \leqslant \tau \leqslant t$:

$$E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\,\tilde{E}(y(t)y(\tau)/t-1)\right] = H\,E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\,\tilde{E}(x(t)y(\tau)/t-1)\right] + E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\,\tilde{E}(v(t)y(\tau)/t-1)\right]$$

Avec :

$$E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\tilde{E}(x(t)y(\tau)/t-1)\right] = \begin{cases} \text{si } \tau<t : \\ F\,E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\tilde{E}(x(t-1)y(\tau)/t-1)\right] \\ \text{si } \tau=t : \\ H\,E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\tilde{E}(x(t)x(t)/t-1)\right] \end{cases}$$

$$E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\,\tilde{E}(v(t)y(\tau)/t-1)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau<t \\ E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\tilde{R}(t-1/t-1)\right] & \text{si } \tau=t \end{cases}$$

$$E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\,\tilde{E}(x(t)x(t)/t-1)\right] = F^2\,E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\,\tilde{E}(x(t-1)x(t-1)/t-1)\right] + E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\tilde{Q}(t-1/t-1)\right]$$

Nous obtenons des expressions identiques en remplaçant $\tilde{Q}$ par $\tilde{R}$.

Covariances entre $x(t)\,x(t)$, $x(t)\,y(\sigma)$ et l'erreur de prédiction quadratique:

Ces covariances interviennent dans le calcul des noyaux A et B.

Pour $\sup(t_0,t-d) \leqslant \sigma,\tau \leqslant t$:

$$E\left[\tilde{E}(x(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(y(\tau)y(t)/t-1)\right] = H\,E\left[\tilde{E}(x(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(y(\tau)x(t)/t-1)\right] + E\left[\tilde{E}(x(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(y(\tau)v(t)/t-1)\right]$$

Avec:

$$E\left[\tilde{E}(x(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(y(\tau)x(t)/t-1)\right] =$$

$$\begin{cases} \text{si } \sigma,\tau<t : \\ F^2\,E\left[\tilde{E}(x(t-1)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(y(\tau)x(t-1)/t-1)\right] + E\left[Q(t-1)\,T(\sigma,\tau)\right] \\ \text{si } \tau=t,\ \sigma<t\ ;\ \text{ou } \sigma=t,\ \tau<t : \\ H\,E\left[\tilde{E}(x(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(x(t)x(t)/t-1)\right] \\ \text{si } \tau=\sigma=t : \\ H^2\,E\left[\tilde{E}(x(t)x(t)/t-1)\,\tilde{E}(x(t)x(t)/t-1)\right] + E\left[R(t)\,P(t,t)\right] \end{cases}$$

Et pour $\sigma < t$:

$$E\left[\tilde{E}(x(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(x(t)x(t)/t-1)\right] = F^3\,E\left[\tilde{E}(x(t-1)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(x(t-1)x(t-1)/t-1)\right] + F\,E\left[\tilde{Q}(t-1/t-1)\,\tilde{E}(x(t-1)y(\sigma)/t-1)\right] + 2HF\,E\left[Q(t-1)\,P(t-1,\sigma)\right]$$

Où:

$$T(\sigma,\tau) = E\left[y(\sigma)\,y(\tau)\right]$$
$$P(\sigma,\tau) = E\left[x(\sigma)\,x(\tau)\right]$$

$$E\left[\tilde{E}(x(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde{E}(y(\tau)v(t)/t-1)\right] =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \tau,\sigma<t \\ H\,E\left[R(t)\,P(t,\tau)\right] & \text{si } \tau<t,\ \sigma=t \\ E\left[\tilde{R}(t-1/t-1)\,\tilde{E}(x(t)y(\sigma)/t-1)\right] & \text{si } \tau=t,\ \sigma<t \\ H\,E\left[\tilde{R}(t-1/t-1)\,\tilde{E}(x(t)x(t)/t-1)\right] + H\,E\left[R(t)\,P(t,t)\right] & \text{si } \tau=\sigma=t \end{cases}$$

Enfin:

$$E\left[\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\,\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\right] =$$
$$F^4 E\left[\tilde E(x(t-1)x(t-1)/t-1)\,\tilde E(x(t-1)x(t-1)/t-1)\right]$$
$$+\,2F^2 E\left[\tilde a(t-1/t-1)\,\tilde E(x(t-1)x(t-1)/t-1)\right] + E\left[w^4(t-1)\right]$$
$$+\,4F^2 E\left[a(t-1)\,P(t-1,t-1)\right] - E\left[\hat a(t-1/t-1)\,\hat a(t-1/t-1)\right]$$

Et:

$$E\left[\hat a(t-1/t-1)\,\hat a(t-1/t-1)\right] = E\left[a(t-1)a(t-1)\right] - E\left[\tilde a(t-1/t-1)\,\tilde a(t-1/t-1)\right]$$

De même pour $E(\hat R(t-1/t-1)\hat R(t-1/t-1))$.

Calculons maintenant la covariance entre $x(t)x(t)$ et l'erreur de prediction quadratique.

$$E\left[\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\,\tilde E(y(\tau)y(t)/t-1)\right] =$$
$$\begin{cases} H^2 E\left[\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\,\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\right] + E\left[\tilde R(t-1/t-1)\,\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\right] & \text{si } \tau = t \\ H E\left[\tilde E(x(t)y(\tau)/t-1)\,\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\right] & \text{si } \tau < t \end{cases}$$

Covariance $\Xi(t,\sigma;\tau,t)$ de l'erreur de prediction quadratique :

$$\Xi(t,\sigma;\tau,t) = H E\left[\tilde E(x(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde E(y(\tau)y(t)/t-1)\right] + E\left[\tilde E(v(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde E(y(\tau)y(t)/t-1)\right]$$

Le premier terme a dejà été calculé, quant au second il est donné par:

$$E\left[\tilde E(v(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde E(y(\tau)y(t)/t-1)\right] =$$
$$\begin{cases} E\left[R(t)T(\tau,\sigma)\right] & \text{si } \sigma,\tau < t \\ 2H^2 E\left[R(t)P(t,\sigma)\right] & \text{si } \tau = t,\ \sigma < t \\ H E\left[\tilde R(t-1/t-1)\,\tilde E(y(\tau)x(t)/t-1)\right] + \\ H^2 E\left[R(t)P(t,\tau)\right] & \text{si } \sigma = t,\ \tau < t \\ H^2 E\left[\tilde R(t-1/t-1)\,\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\right] + \\ 2H^2 E\left[R(t)P(t,t)\right] + E\left[v^4(t)\right] - E\left[\hat R(t-1/t-1)\hat R(t-1/t-1)\right] & \text{si } \sigma = \tau = t \end{cases}$$

Pour boucler l'algorithme, il ne reste plus qu'à donner l'ensemble des relations de l'etape d'actualisation des moments d'ordre quatre.

$$E\left[\tilde a(t/t)\,\tilde a(t/t)\right] = E\left[\tilde a(t-1/t-1)\,\tilde a(t-1/t-1)\right] - \sum_{\sigma,\tau=\sup(t_0,t-d)}^{t}\sum^{t} M(t;t,\sigma)\,\Xi(t,\sigma;\tau,t)\,M(t;\tau,t)$$

$$E\left[\tilde R(t/t)\,\tilde R(t/t)\right] = E\left[\tilde R(t-1/t-1)\,\tilde R(t-1/t-1)\right] - \sum_{\sigma,\tau=\sup(t_0,t-d)}^{t}\sum^{t} N(t;t,\sigma)\,\Xi(t,\sigma;\tau,t)\,N(t;\tau,t)$$

$$E\left[\tilde a(t/t)\,\tilde R(t/t)\right] = E\left[\tilde a(t-1/t-1)\,\tilde R(t-1/t-1)\right] - \sum_{\sigma,\tau=\sup(t_0,t-d)}^{t}\sum^{t} M(t;t,\sigma)\,\Xi(t,\sigma;\tau,t)\,N(t;\tau,t)$$

$$E\left[\tilde a(t/t)\,\tilde E(x(t)x(t)/t)\right] = E\left[\tilde a(t-1/t-1)\,\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\right] - \sum_{\sigma,\tau=\sup(t_0,t-d)}^{t}\sum^{t} M(t;t,\sigma)\,\Xi(t,\sigma;\tau,t)\,A(t;\tau,t)$$

$$E\left[\tilde R(t/t)\,\tilde E(x(t)x(t)/t)\right] = E\left[\tilde R(t-1/t-1)\,\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\right] - \sum_{\sigma,\tau=\sup(t_0,t-d)}^{t}\sum^{t} N(t;t,\sigma)\,\Xi(t,\sigma;\tau,t)\,A(t;\tau,t)$$

$$E\left[\tilde a(t/t)\,\tilde E(x(t)y(\sigma)/t)\right] = E\left[\tilde a(t-1/t-1)\,\tilde E(x(t)y(\sigma)/t-1)\right] - \sum_{\sigma',\tau=\sup(t_0,t-d)}^{t}\sum^{t} M(t;t,\sigma')\,\Xi(t,\sigma';\tau,t)\,B(\sigma,t;\tau,t)$$

$$E\left[\tilde R(t/t)\,\tilde E(x(t)y(\sigma)/t)\right] = E\left[\tilde R(t-1/t-1)\,\tilde E(x(t)y(\sigma)/t-1)\right] - \sum_{\sigma',\tau=\sup(t_0,t-d)}^{t}\sum^{t} N(t;t,\sigma')\,\Xi(t,\sigma';\tau,t)\,B(\sigma,t;\tau,t)$$

$$E\left[\tilde E(x(t)x(t)/t)\,\tilde E(x(t)x(t)/t)\right] = E\left[\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\,\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\right] - \sum_{\sigma,\tau=\sup(t_0,t-d)}^{t}\sum^{t} A(t;t,\sigma)\,\Xi(t,\sigma;\tau,t)\,A(t;\tau,t)$$

$$E\left[\tilde E(x(t)x(t)/t)\,\tilde E(x(t)y(\sigma)/t)\right] = E\left[\tilde E(x(t)x(t)/t-1)\,\tilde E(x(t)y(\sigma)/t-1)\right] - \sum_{\sigma',\tau=\sup(t_0,t-d)}^{t}\sum^{t} A(t;t,\sigma')\,\Xi(t,\sigma';\tau,t)\,B(t,\sigma;\tau,t)$$

$$E\left[\tilde E(x(t)y(\sigma)/t)\,\tilde E(y(\tau)x(t)/t)\right] = E\left[\tilde E(x(t)y(\sigma)/t-1)\,\tilde E(y(\tau)x(t)/t-1)\right] - \sum_{\sigma',\tau'}^{t}\sum^{t} B(t,\sigma;t,\sigma')\,\Xi(t,\sigma';\tau',t)\,B(\tau,t;\tau',t)$$

D'autre part, nous avons les relations de récurrence suivantes :

$$E\left[Q(t+1)\,T(\sigma,\tau)\right] = H^2 E\left[Q(t)\,P(\sigma,\tau)\right] + E\left[\,.(t)R(t)\right]\delta(\tau-\sigma)$$

$$E\left[Q(t+1)\,P(t+1,\tau)\right] = F E\left[Q(t)\,P(t,\tau)\right]$$

$$E\left[Q(t+1)\,P(t+1,t+1)\right] = F^2 E\left[Q(t)\,P(t,t)\right] + E\left[Q(t)\,Q(t)\right]$$

De même pour R au lieu de Q.

Pour terminer, nous devons donner l'ensemble des conditions initiales.

Si, par convention, t_0-1 est l'instant immédiatement antérieur à la première observation $y(t_0)$, nous obtenons l'ensemble des conditions initiales suivantes :

$\hat{Q}(t_o/t_o-1) = \bar{Q}(t_o)$ espérance initiale de $Q(t_o)$

$E(\tilde{Q}(t_o/t_o-1)\ \tilde{Q}(t_o/t_o-1)) = E(\breve{Q}(t_o)\breve{Q}(t_o))$

avec $\breve{Q}(t_o) = Q(t_o) - \bar{Q}(t_o)$

$E(\tilde{Q}(t_o/t_o-1)\ \tilde{E}\ (x(t_o)x(t_o)/t_o-1)) = E(\breve{Q}(t_o)\breve{P}(t_o,to))$

$E(\hat{Q}(t_o/t_o-1)\ \hat{Q}(t_o/t_o-1)) = \bar{Q}(t_o)\bar{Q}(t_o)$

$E(Q(t_o)Q(t_o)) = \bar{Q}(t_o)\bar{Q}(t_o) + E\ (\breve{Q}(t_o)\ \breve{Q}(t_o))$

Nous avons les mêmes relations pour R.

D'autre part :

$E(\tilde{Q}(t_o/t_o-1)\ \tilde{R}(t_o/t_o-1)) = E\ (\breve{Q}(t_o)\breve{R}(t_o))$

$E(Q(t_o)R(t_o)) = \bar{Q}(t_o)\bar{R}(t_o) + E\ (\breve{Q}(t_o)\ \breve{R}\ (t_o))$

enfin :

$\hat{E}(x(t_o)x(t_o)/t_o-1) = \bar{P}(t_o,t_o)$

$E(\tilde{E}(x(t_o)x(t_o)/t_o-1)\ \tilde{E}(x(t_o)x(t_o)/t_o-1)) =$

$3\ E(\breve{P}(t_o,t_o)\ \breve{P}\ (t_o,t_o)) + 2\ \bar{P}(t_o,t_o)\ \bar{P}(t_o,t_o)$

$E\ (Q\ (t_o)\ P(t_o,t_o)) = \bar{Q}(t_o)\ \bar{P}(t_o,t_o) + E(\breve{Q}(t_o)\breve{P}(t_o,t_o))$

et

$E(W^4(t)) = 3\ \bar{Q}(t_o)\bar{Q}(t_o) + 3\ E(\breve{Q}(t_o)\breve{Q}(t_o))$

$E(V^4(t)) = 3\bar{R}(t_o)\ \bar{R}(t_o) + 3\ E\ (\breve{R}(t_o)\ \breve{R}(t_o))$

En résumé, les quantités du type $\overline{(.)}\ (t_o)$ et $E(\breve{(.)}\ (t_o)\ \breve{(.)}\ (t_o))$ sont pour le filtre quadratique ce que les valeurs initiales $\hat{x}(t_o)$ et $P(t_o)$ sont pour le filtre linéaire de Kalman.

III. RESULTATS DE SIMULATION .

Un système d'ordre 1 est simulé à l'aide des équations (1), les paramètres H,Q,R, étant fixés avec les valeurs suivantes :

H = 1, Q = 10, R = 20.

Nous avons fait varier le paramètre dynamique F (F = {0.1, 0.5, 0.9}) ainsi que la longueur de la fenêtre d (d = {1,2,3}).

Dans chaque cas, nous générons un échantillon de 1000 points. Les résultats sont donnés par les figures (1-6)

Nous avons tracé d'une part les estimateurs $\hat{Q}(t/t)$ et $\hat{R}(t/t)$ (fig.(1,2,5,6)), d'autre part les moments d'ordre quatre $E\ (\tilde{Q}(t/t)\ \tilde{Q}(t/t))$ et $E(\tilde{R}(t/t)\tilde{R}(t/t))$ (fig. (3,4)).

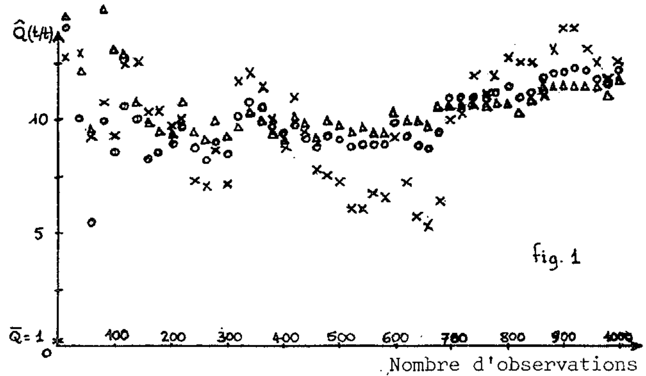

fig. 1

Nombre d'observations

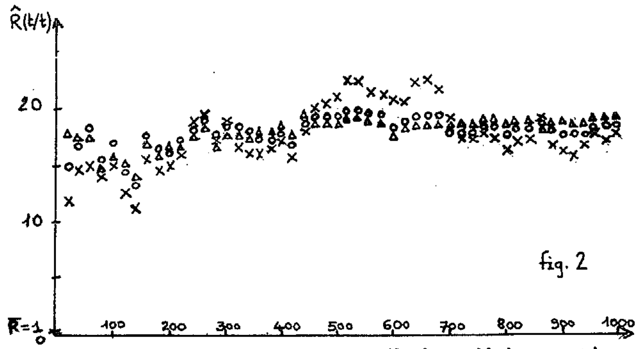

fig. 2

Nombre d'observations

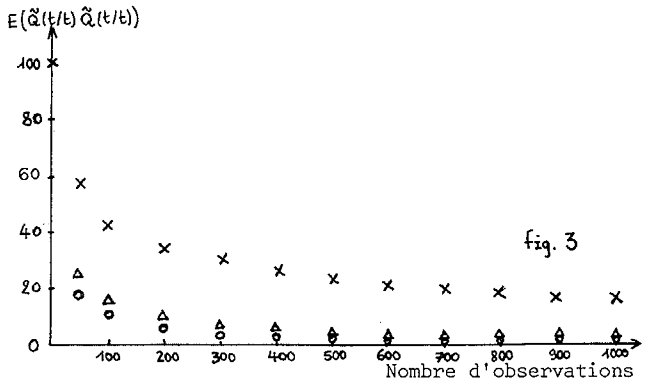

fig. 3

Nombre d'observations

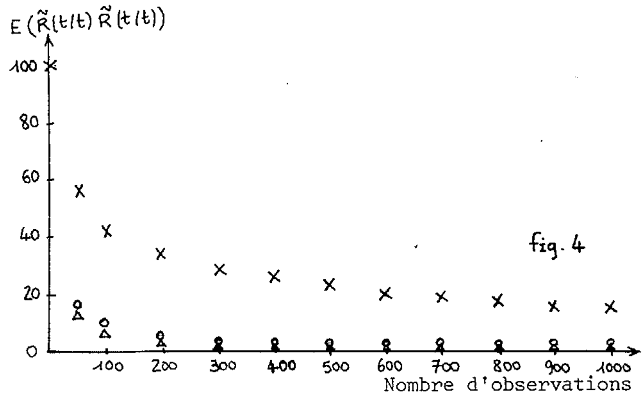

fig. 4

Nombre d'observations

Pour les figures (1,2,3,4) nous avons fixé d=1 .

x correspond à F=0.1

o correspond à F=0.5

Δ correspond à F=0.9

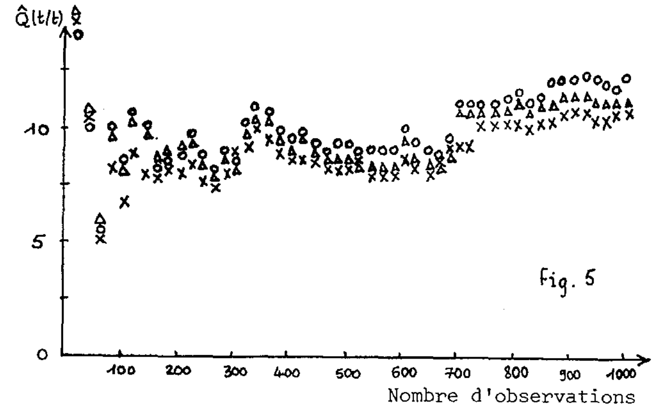

fig. 5

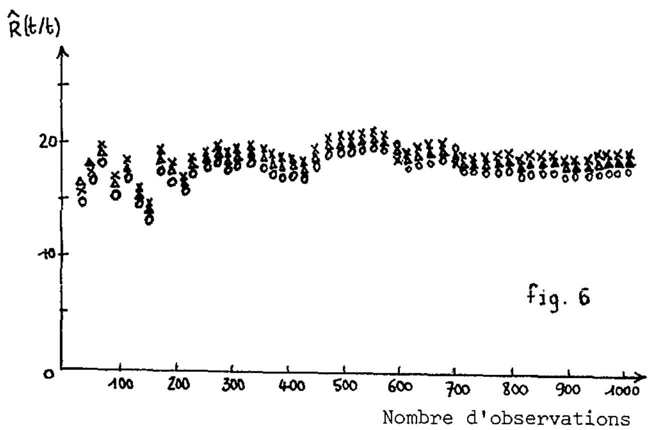

fig. 6

Pour les figures (5,6) nous avons fixé F=0.5

o correspond à d=1

Δ correspond à d=2

x correspond à d=3

IV. CONCLUSION

Nous constatons dans chaque cas, la convergence de l'algorithme vers les valeurs exactes de Q et R, ainsi que la convergence vers 0 des covariances des erreurs d'estimation $\tilde{Q}(t/t)$ et $\tilde{R}(t/t)$.

Cette convergence est d'autant plus rapide que la valeur de F est plus proche de 1. D'autre part, nous avons noté que l'estimation était fonction des séquences de bruit générées. Enfin, l'augmentation de la longueur "d" de la fenêtre n'apporte pas une amélioration très sensible à l'estimation, ce qui nous permet de conclure que la valeur minimale $d = n = 1$ est suffisante pour construire des estimateurs $\hat{Q}$ et $\hat{R}$. Nous remarquons aussi que la covariance R du bruit de mesure est mieux estimée que celle du bruit de dynamique Q .

REFERENCES

/1/ BELANGER P.R., CAREW B., - Identification of optimum filter steady state gain for systems with unknown noise covariances. I.E.E.E. Tr. Vol. AC 18 n°6, Déc. 1973.

/2/ BOZZO C.A. - A discrete suboptimal adaptive estimation scheme for linear systems with unknown plant and measurement noise covariances . 6th .I.F.A.C. World Congress, Boston, 1975.

/3/ FAURRE P. - Réalisations markoviennes de processus stationnaires. Rapport de recherche I.R.I.A. n°13, . Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique, Rocquencourt, 1973.

/4/ FAVIER G., ALENGRIN G. - Un nouvel algorithme de réalisation stochastique. First world conference on mathematics at the service of man. Barcelone. Juillet 1977.

/5/ KALMAN R.E. - A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans. of A.S.M.E., Jnl. Basic Engineering, Vol. 82 D, pp. 34-45, March 60.

/6/ KALMAN R.E., BUCY R.S. - New results in linear prediction and filtering theory . Trans. of A.S.M.E., Jnl. of basic engineering, 83 D, pp. 95-108, March 1961.

/7/ KALMAN R.E., HO B.L., - Effective construction of linear state variable models from input-output functions, Proc 1st Alberton Conference, pp.449-459, 1965.

/8/ MEHRA R.K.,- On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. I.E.E.E., Vol. AC 15, n°2, April 1970.

/9/ SALUT G., - Identification optimale des systèmes linéaires stochastiques. Thèse de Docteur ès-sciences - Toulouse - Juin 1976.

/10/ SALUT G., FAVIER G.- Identification et poursuite adaptative optimales des systèmes linéaires stochastiques. Rapport de fin de contrat D.R.M.E. LAAS-GESSY n°73/564, Nov. 1975 . Publication LAAS n°1351.