COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

CALCUL STOCHASTIQUE ET TRAITEMENT DU SIGNAL

F. CASTANIE et J.C. HOFFMANN

G.A.P.S.E., Institut National Polytechnique, 2, rue Ch. Camichel, 31071 TOULOUSE-CEDEX

RESUME

Le Calcul Stochastique (C.S.), dont les principes élémentaires ont été établis depuis relativement longtemps, est encore un mode de calcul très peu connu.

Nous consacrons dont la première partie de notre exposé à un rappel des principes et des opérateurs classiques ou originaux. Nous montrons en particulier que la technologie est numérique (opérateurs logiques élémentaires), et le formalisme proche de celui du Calcul Analogique (traitement parallèle : autant d'opérateurs que d'opérations à effectuer).

Nous présentons ensuite brièvement le Calcul Stochastique Généralisé.

Nous analysons pour finir, les domaines où ce mode de calcul présente un intérêt certain pour le Traitement du Signal : Calcul de transformations usuelles, filtrage continu ou digital. Nous citons enfin quelques autres applications du domaine de l'Automatique.

SUMMARY

Although Stochastic Computing was introduced comparatively long ago, it is by no means a well-known computing method.

Hence, the first part of this work consists of a survey of principles and conventional or original operators.

In the following section, the authors state one of the generalization they have achieved : Generalized Stochastic Computing.

The terminal section is devoted to an analysis of what areas of signal Processing are concerned with these computing methods : Usual Transforms calculation, continuous or digital filtering. Finally, several applications to automatic control designing are quoted.

1- RAPPEL DES PRINCIPES DU CALCUL STOCHASTIQUE CLASSIQUE

Le Calcul Stochastique, dans l'acceptation habituelle du terme, a son origine formelle dans [1] .

Il consiste à associer à tout réel x de $[0,1]$ une séquence de Variables Aléatoires Binaires $\{X_n\}$ telle que :

$$E\left[X_n\right] = x$$

Habituellement $X_n = X_s(nT)$, où $X_s(t)$ est un processus stochastique stationnaire binaire, dit "codé stochastique" de x.

Cette opération est, dans sa forme la plus simple, réalisée de la façon suivante :

$$X_s(t) = U\left[x+A\ (t)\right]$$

où U(t) est la fonction échelon unité (ou de Heaviside) et A(t) un processus stochastique stationnaire dit "Source Auxiliaire". On montre aisément qu'il est nécessaire et suffisant que $F_A(x)$, fonction de répartition de A(t), soit linéaire sur $[0,1]$. A(t) est donc à distribution uniforme.

On voit immédiatement l'intérêt d'une telle représentation : les opérations booléennes élémentaires sur de telles séquences vont effectuer des transformations sur les moyennes, à partir desquelles on pourra envisager la synthèse d'opérateurs arithmétiques.

Il a ainsi été montré [2] [3] [4], que les opérations de multiplication et d'addition sont effectuées par des opérateurs booléens très simples :

1-1 Multiplication

Soient x_1 et x_2 deux réels de $[0,1]$

$$x_1 \longrightarrow X_{s1}(t)$$
$$x_2 \longrightarrow X_{s2}(t)$$

où $X_{s1}(t)$, $X_{s2}(t)$ sont mutuellement indépendants.

Si l'on effectue l'opération booléenne d'intersection (ET logique)

$$Y(t) = X_{s1}(t) \cdot X_{s2}(t)$$

Il vient immédiatement :

$$E\left[Y\right] = y = x_1 \cdot x_2$$

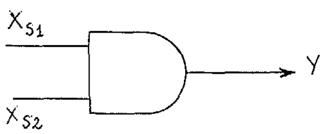

Figure 1

1-2 Addition

Diverses possibilités sont offertes [3], mais la plus simple consiste à effectuer un multiplexage temporel des codés stochastiques $X_{s1}(t)$ et $X_{s2}(t)$, des variables x_1 et x_2 à sommer.

Afin de conserver le caractère aléatoire au résultat, la commande de multiplexage B(t) est choisie elle-même aléatoire. Ceci conduit à l'équation booléenne :

$$Y = \left(X_{s1}(t).B(t)\right) \vee \left(X_{s2}(t).\overline{B(t)}\right)$$

Sous l'hypothèse que B(t) est indépendante de $X_{s1}(t)$ et $X_{s2}(t)$, mais sans qu'il soit nécessaire que $X_{s1}(t)$ et $X_{s2}(t)$ soient mutuellement indépendants, il vient :

$$y = E\left[Y\right] = p.x_1+(1-p)x_2$$

où $\quad p = P\left\{B(t) = 1\right\}$

L'addition normée usuelle utilise p = 1/2 ("bit équiprobable"). Cela se généralise sans difficulté à la somme normée à n entrées (figure 2)

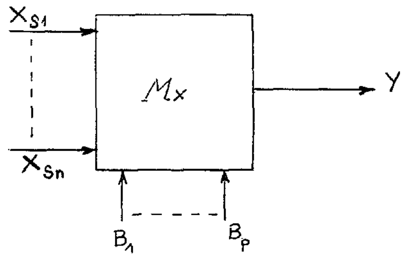

Figure 2

où le mot $[B_1 \ldots B_p]$ doit prendre équiprobablement toutes les valeurs entières de $[0,\ldots,2^p-1]$.

1-3 Intégration

Le caractère binaire de $X_s(nT)$ montre qu'il est facile d'effectuer des opérations de sommation temporelle telles que :

$$Y(kT) = \sum_{n=0}^{k} X_s(nT)$$ qui se réduisent à des comptages.

Si T est suffisamment petit :

$$Y(kT) \sim \frac{1}{T} \int_0^{kT} X_s(t)\ dt$$

$$y(kT) = E\left[Y(kT)\right] \sim \frac{1}{T} \int_0^{kT} E\left[X_s(t)\right]\ dt$$

Si $X_s(t)$ est le codé stochastique de la fonction réelle x(t) de $[0,1]$, il vient :

$$y(kT) \sim \frac{1}{T} \int_0^{kT} x(t)dt.$$

Cet opérateur d'intégration ouvre au Calcul Stochastique les méthodes du Calcul Analogique.

L'une des applications intéressantes est la génération de fonctions par la méthode des équations implicites, bien connue du Calcul Analogique (cf. ci-après).

1-4 Générateurs de fonctions

a)- Méthode des équations implicites :

On sait que le dispositif analogique représenté figure 3 est susceptible d'arriver à l'équilibre :

$$z(t) = x(t)$$

Soit : $\varphi\left[x_1(t),\dots,x_n(t),\ y(t)\right] = x(t)$

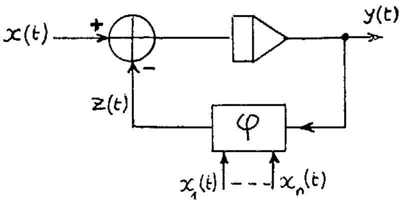

Figure 3

qui permet de générer une nouvelle fonction

$$y(t) = \Psi\left[x(t),\ x_1(t)\dots,x_n(t)\right]$$

Par exemple :

- $z(t) = y^2(t)$, conduit à $y(t) = \sqrt{x(t)}$
- $x(t) = y(t).x_1(t)$, conduit à $y(t) = \frac{x(t)}{x_1(t)}$

La transposition en éléments de Calcul Stochastique de ce dispositif, conduit à créer un module de calcul très général ([2] , puis [3]) effectuant Addition, Produit, Racine carrée et Division.

b)- Méthode de l'approximation polynomiale

Soit à générer $y = G(x_1\dots,x_n)$ où G peut être approximé par un polynôme $P(x_1,\dots,x_n)$ de degré raisonnable ; ce qui précède montre qu'il sera toujours possible de réaliser $P(x_1\dots x_n)$, qui ne fait intervenir que des puissances (produits) et des sommes.

c)- Méthode du Codage Non-Linéaire

Si, dans l'opération de Codage Stochastique, la Source Auxiliaire A(t) est de fonction de répartition $F_A(x)$ donnée, il est aisé de montrer que :

$$E\left[X_s\right] = F_a(x)$$

Cette méthode est limitée à l'étape de codage, et ne peut être introduite à un endroit arbitraire du Calcul..

d)- Générateur de fonction proposé

Pour pallier certains inconvénients des méthodes ci-dessus [5] , nous avons introduit un Générateur de fonction [6] dont l'implantation numérique est simple. Il consiste à créer, à partir d'une séquence $\left\{X_s(nT)\right\}$, une séquence $\left\{Z(nT)\right\}$ prenant la valeur g_k chaque fois que k"1" se sont succédés dans $\left\{X_s(nT)\right\}$.

On montre que cela conduit à générer :

$$z = E\left[Z(nT)\right] = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(g_k-g_{k-1}).x^k + g_o$$

La figure 4 illustre le principe et deux mises en application, de technologies différentes.

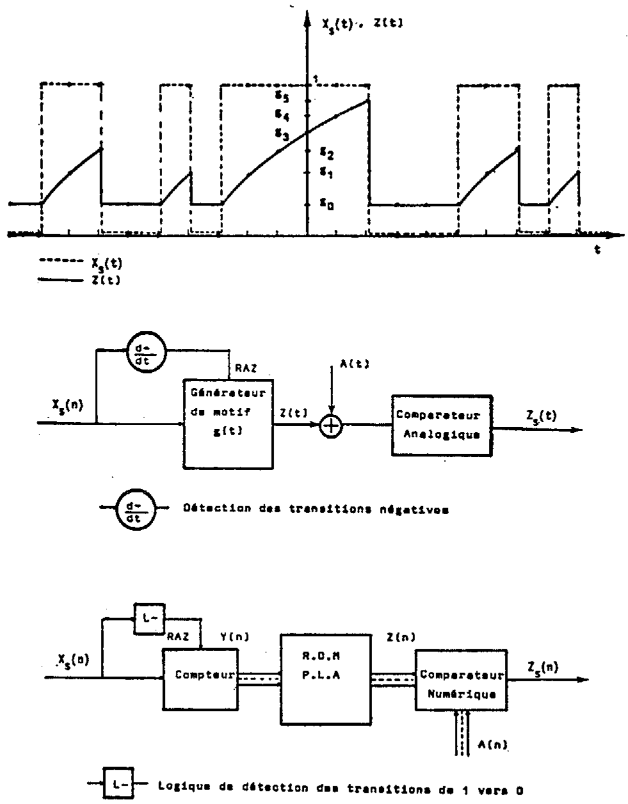

Figure 4

En outre, des générateurs, limités à certaines classes de fonctions utiles en régulation [7] , et à des problèmes de linéarisation par morceaux [8], ont été réalisés.

1-5 Restitution

Il reste à préciser le mode de restitution des résultats d'un calcul. Sachant que l'information est contenue dans la moyenne, tout estimateur sans biais de moyenne peut être utilisé.

Citons les plus courants :

a)- Convertisseur Stochastique Analogique

$$\hat{x}(t) = h(t) * X_s(t)$$

où h(t) est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas H(f).

On montre que :

$$\mathrm{Var}\left[\hat{x}(t)\right] \sim \beta T(1-x^2) \leqslant \beta T$$

où $\beta = \int_{\mathbb{R}} h^2(t)dt = \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 df$, sous l'hypothèse que la Source Auxiliaire A(t) fournisse des échantillons indépendants.

b)- Moyenneur Arithmétique

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_s(nT)$$

sous la même hypothèse, on a évidemment :

$$\mathrm{Var}[\hat{x}] = \frac{1-x^2}{N} \leqslant 1/N$$

c)- Convertisseur Stochastique Numérique

Il s'agit d'un filtre passe-bas du 1er ordre utilisant des éléments (intégrateurs, sommateurs) stochastiques (cas particulier de la figure 3 avec $z(t) = y(t)$).

L'estimation x est disponible sous forme numérique, avec une variance :

$$\mathrm{Var}[\hat{x}] \leq \frac{1}{2N}$$

2- GENERALISATION

Nous avons montré [6] que le Calcul Stochastique précédemment résumé, peut être considéré comme un cas particulier de Calcul Numérique Classique utilisant le principe de Quantification à Référence Stochastique. La base théorique de ce procédé faisant l'objet d'une autre communication au présent Colloque, nous ne rapporterons que le résultat numérique essentiel : si une grandeur déterministe x, tel que $|x| \leqslant 1$, est quantifiée à Référence Stochastique X_Q, avec une représentation à n bits, nous avons montré :

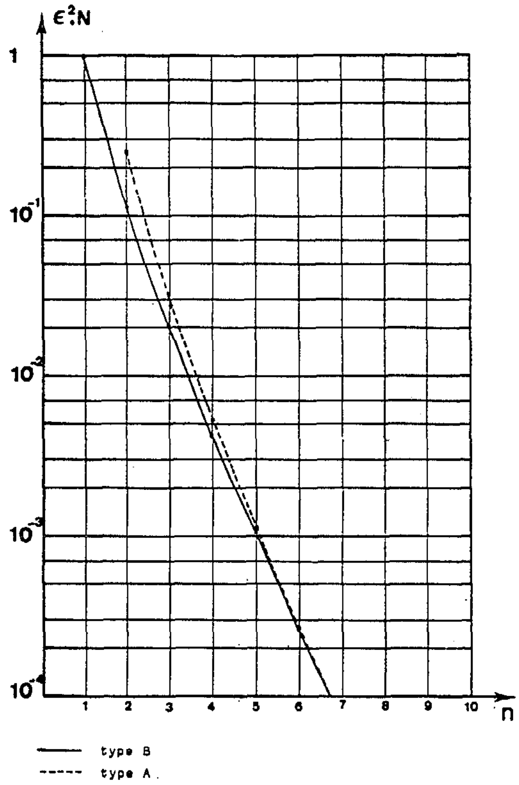

Figure 5

- $E[X_Q] = x$
- $\mathcal{E} = \sup_x \left(\mathrm{Var}[\hat{x}]\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{(2^n - \theta)}$

où θ est un paramètre dépendant de l'origine du quantificateur (type A ou B au sens de BONNET), de valeur habituelle 1 ou 2, et $\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_Q(k)$

La figure 5 montre qu'à toute valeur de $\mathcal{E}$ fixée, correspond un couple N (temps de calcul), n (nombre de bits) qui permet de l'atteindre.

Le Calcul Stochastique Classique n'est que le cas particulier n = 1 (monofilaire) ou 2 (bifilaire). Il apparaît clairement qu'à précision donnée, celà introduit un dilemme entre la rapidité (N) et la complexité des opérateurs (n).

3- APPLICATION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

La simplicité des opérateurs classiques, surtout d'addition et de multiplication, montre à l'évidence que le Calcul Stochastique est particulièrement adapté au traitement parallèle des données. Son formalisme est proche de celui du Calcul Analogique (autant d'opérateurs que d'opérations à effectuer) et sa technologie numérique.

On peut dégager, sans que ce soit exhaustif, quelques centres d'intérêt dans le domaine du Traitement du Signal :

3-1 Calculateurs Spécialisés du Traitement du Signal

Les transformations usuelles du Traitement du Signal font appel aux opérations d'intégration, produit, et génération de fonctions, opérations simples à réaliser en Calcul Stochastiques.

Nous avons déjà exposé [9] [10] [11] [12] les résultats obtenus avec le Transformateur Stochastique de Fourier.

Cela pourrait facilement s'étendre à la transformation de Walsh-Fourier, de Laplace, en Z, etc...

3-2 Filtrage linéaire

Il est toujours possible de décomposer un filtre linéaire en éléments simples tels que intégrateurs, multiplieurs par des constantes, et sommateurs.

Les méthodes utilisées sont très classiques en Calcul Analogique (Horner, duelle, etc...). La transposition de ces méthodes au Calcul Stochastique (problème des facteurs d'échelles, etc...) fait l'objet d'un travail effectué au GAPSE [13] . On est ainsi à même de synthétiser un filtre dont tous les paramètres sont accessibles et modifiables, ce qui laisse envisager des applications en particulier au filtrage adaptatif, optimal.

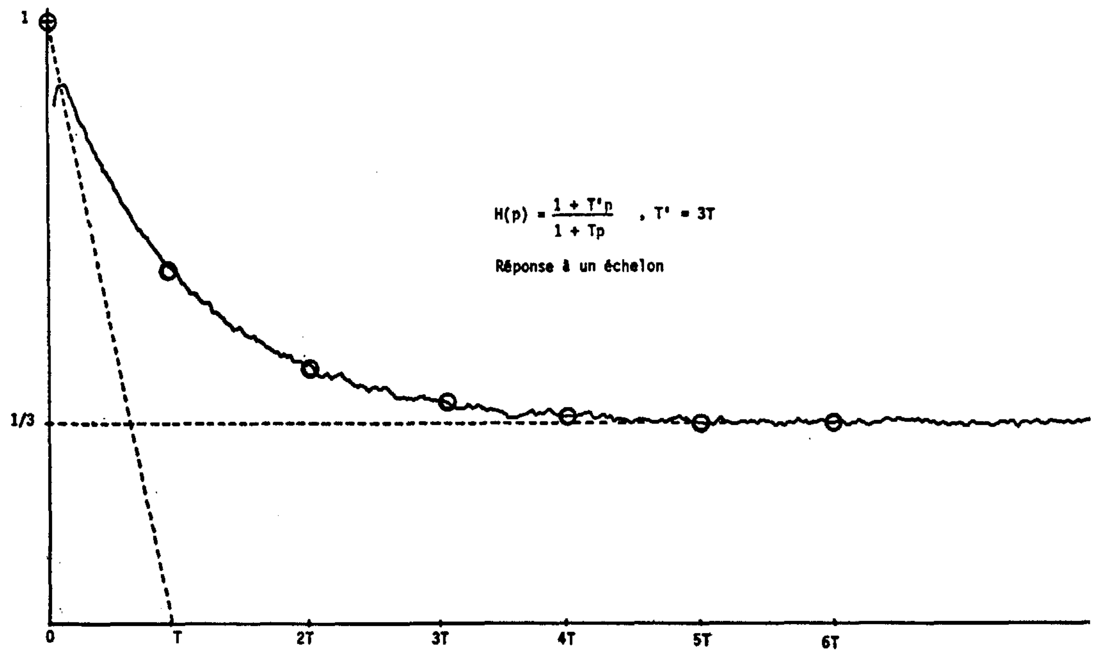

Figure 6

Nous donnons ci-dessus un exemple d'application à un réseau correcteur d'asservissement, tiré de [13] ainsi que sa réponse à un échelon.

Nous travaillons actuellement au problème de l'implantation d'équation aux différences finies linéaires (filtres digitaux) en Calcul Stochastique. Il semble que la disponibilité de registres à décalage très longs (capacité $\geqslant 10^4$) confère à cette technique les avantages d'une moindre complexité macroscopique, par rapport à la méthode précédente.

Il semble enfin que le Calcul Stochastique trouve des applications dans le domaine du contrôle et de l'identification : méthode du gradient [14] , identification [15] , calcul matriciel stochastique [16] , etc...

En conclusion, nous pouvons dire que ce mode de calcul présente des avantages certains dans les applications suivantes :

- Recherche de structures de calculs très simples, à performances en précision et rapidité, moyenne : calcul de transformées, filtrages, etc...
- Traitements d'un grand nombre de données en parallèle : Traitement image, multiplications matricielles, traitement de signaux multidimensionnels, etc...
- Traitements classiques implantés en milieux très bruités : calcultateurs embarqués [8] , régulations de moteurs [17] ...

BIBLIOGRAPHIE :

1 - NEUMANN Von
Probalistic logics and Synthesis of reliable organism from unreliables components.
Automata Studies, Princeton Univ., Press 1958.

2 - POPPELBAUM W.J., AFUSO C., ESCH J.W.
Stochastic Computing Elements and Systems.
Proceeding of the Fall. Joint Computers Conf. 1967, pp. 631-644.

3 - GAINES B.R.
Stochastic Computing
Spring Joint Computer Conference, vol. 30, pp. 149-156.

4 - DEGLI ANTONI, ROSSI R., TANZI E.G.
Le Reti Combinatorie comme moduli di Calcolo per Calcolatori Stocastici.
Alta Frequenza, vol. XL, n° 3, Marzo 1971.

5 - CASTANIE F.
Opérateurs en Calcul Stochastique Classique.
Note Interne GAPSE II, 1976.

6 - CASTANIE F.
Estimation de Moments par Quantification à Référence Stochastique.
Thèse de Dr. d'Etat (à paraître 1977).

7 - MASSEN R.
Zur Problematik des Fluidischen Rauschens und Seiner Anwendung in der Stochastischen Rechentecnik.
Thèse Dr-Ing., Aachen, 1974.

8 - CASTANIE F., HOFFMANN J.C., MIRAMBET P., HAGHIGHI N.
Contrat SNIAS n° 174-391, 1976.

9 - CASTANIE F., HOFFMANN J.C., LACAZE B.
Transformateur Stochastique de Fourier et Analyseur Spectral réalisé à partir de celui-ci.
Brevet ANVAR N° 74.23395, Juillet 1974.

10 - CASTANIE F., HOFFMANN J.C.
Analyseur Spectral Stochastique.
5ème Colloque GRETSI, Nice, Juin 1975.

11 - CASTANIE F., HOFFMANN J.C.
Transformateur Stochastique de Fourier.
Advanced Signal Processing Technology,
Journées d'Etudes 1975 de l'EPFL.
Lausanne 1975.

12 - CASTANIE F., HOFFMANN J.C., VERNIERE F.
Contrat DGRST 1977/1978.

13 - HAGHIGHI N.
Calcul Stochastique : Méthodes intégro-différentielles.
Thèse Dr-Ingénieur Toulouse. A soutenir en 1977.

14 - MARS P., MAC LEAN H.
Implementation of Linear Programming with a digital Stochastic Computer.
Electronics Letters, vol. 12, n° 20, Oct.76.

15 - GAINES B.R.
Techniques of identification with the Stochastic Computer.
Congrès I.F.A.C. Prague 1967.

16 - MARS P., MAC LEAN H.R.
High Speed Matrix inversion by Stochastic Computer.
Electronics Letters, vol. 12, n°18, Sept. 76.

17 - CASTANIE F., HOFFMANN J.C.
Contrat TURBOMECA N° 95.734, Mars 1977.