

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

ANALYSE SPECTRALE GENERALISEE

Pierre BOIS

INSTITUT FRANCAIS DU PETROLE, 4, avenue de Bois Préau, 92502 Rueil-Malmaison

RESUME

SUMMARY

Depuis ces vingt dernières années, l'analyse spectrale est de plus en plus utilisée. On la trouve intimement liée au traitement du signal, à l'étude des séries temporelles, à la reconnaissance des formes, au traitement des images, etc.

Dans cette étude, nous donnons deux méthodes pour effectuer des transformations sur des données discrétisées. Il s'agit de transformations linéaires, calculées très rapidement à l'ordinateur, que l'on appelle Transformations Rapides Généralisées (T.R.G.).

La première méthode consiste à appliquer les T.R.G. séquentiellement. Pour ce faire, on utilise les produits simples de Kronecker pour bâtir un processus multiplicatif qui sert de lien entre les différentes T.R.G.

La seconde méthode est globale et emploie les produits généralisés de Kronecker pour relier les T.R.G. entre elles.

Dans le premier cas, on obtient les chaînes de T.R.G. en cascade et dans le second, les chaînes de T.R.G. en groupes.

Dans chacun de ces cas, on étudie les temps de calcul et les performances de ces chaînes en fonction des T.R.G. qui les composent pour les trois problèmes suivants :

- filtrage généralisé de Wiener,
- condensation de l'information,
- reconnaissance des formes.

Over the past two decades, spectral analysis has been used more and more frequently. It is closely connected with signal processing, time series, pattern recognition, image processing, etc.

In this paper, two methods are given to perform transformations with discrete samples. They are linear transformations that are computed very fast and called generalized fast transformations (GFT).

The first method consists in using GFTs in sequence. Kronecker simple products are used for carrying out a multiplicative process which links the different GFTs together.

The second method is an overall one and uses Kronecker generalized products to connect the different GFTs together.

On the one hand, the cascade chains of GFTs are obtained, and on the other hand we have the cluster chains of GFTs.

In both cases, we are studying the calculation times and the performances of these chains as a function of the GFTs that make them up for the following three problems:

- . generalized Wiener filtering
- . data compression
- . pattern recognition.



INTRODUCTION

Depuis ces dernières années, l'étude des transformations orthogonales a vu son champ d'applications s'étendre sensiblement : traitement des images, reconnaissance de la parole, reconnaissance des formes, compression et transmission de l'information, filtrage généralisé de Wiener. On en trouve même des applications proposées en sismique, en biologie ou en médecine. Cette importance est due au fait que l'on utilise des calculateurs qui opèrent avec des cycles de base de plus en plus petits et qui possèdent des mémoires de plus en plus grandes. On peut ainsi envisager d'effectuer très rapidement au moyen d'ordinateurs des transformations sur des systèmes à très grandes dimensions.

Si les progrès technologiques ont joué un rôle prépondérant dans l'intérêt que l'on porte maintenant à ces transformations, il ne faut pas oublier que des améliorations sensibles ont été apportées à la conception des algorithmes qui permettent de calculer ces transformations linéaires que les physiciens appellent *spectres*.

Nous consacrerons un premier chapitre aux *Transformations Rapides Généralisées (T.R.G.)* qui ont donné une impulsion nouvelle et décisive à la théorie des transformations linéaires. Dans un second chapitre, nous élaborerons un processus multiplicatif pour relier les différentes T.R.G. entre elles pour constituer des *chaînes de T.R.G.* Les deux derniers chapitres seront consacrés aux *chaînes de T.R.G. en cascade et en groupes*. Les premières sont régies par un processus séquentiel ; quant aux secondes, elles ont une action globale.

I - TRANSFORMATIONS RAPIDES GENERALISEES (T.R.G.)

I.1 - Généralités

Rappelons que la transformée linéaire F d'un vecteur f à N composantes est donnée par :

$$F = \sum_{N} [\phi] \cdot f, \quad (I.1)$$

où $[\phi]$ est une matrice carrée ($N \times N$) appelée noyau de la transformation et

$$f = [\phi]^{-1} F, \quad (I.2)$$

$$\text{avec } [\phi]^{-1} \cdot [\phi] = N [I]. \quad (I.3)$$

La relation (I.2) est l'inverse de (I.1).

I.2 - Degrés de liberté d'une matrice

Pour obtenir F (I.1) ou f (I.2), nous devons effectuer N^2 opérations (multiplications et additions ou soustractions de nombres réels ou complexes selon les cas), ce qui peut demander un temps considérable à l'ordinateur. Ceci est valable si la matrice $[\phi]$ (ou $[\phi]^{-1}$) est absolument quelconque, mais dès qu'il existe une contrainte ou une redondance dans l'information contenue dans ses coefficients, le nombre d'opérations devient inférieur à N^2 . Dans ce cas, on définit le *nombre de degrés de liberté* (Andrews et Caspari, 1971) d'une matrice comme la mesure de la redondance de l'information contenue dans cette matrice. Le nombre de degrés de liberté est également fonction des contraintes qui peuvent exister entre les différents éléments de cette matrice. Pour une matrice ($N \times N$) absolument quelconque le nombre de degrés de liberté atteint son maximum qui est N^2 .

L'algorithme est optimal du point de vue du temps de calcul s'il peut effectuer une transformation

linéaire avec un nombre d'opérations égal au nombre de degrés de liberté.

I.3 - Définition d'une T.R.G.

Les T.R.G. sont des transformations linéaires dont les algorithmes de calcul satisfont au critère ci-dessus : *le nombre d'opérations nécessaires au calcul de la transformation linéaire doit être égal au nombre de degrés de liberté de la matrice, noyau de la transformation, lorsque ce nombre de degrés de liberté est inférieur à N^2 .*

Remarquons le caractère relatif d'une telle définition ; en effet si elle est vraie maintenant, elle peut très bien se trouver dépassée dans un avenir plus ou moins proche grâce à la découverte d'une algorithmique plus performante. Dans ce cas, le critère que nous avons énoncé doit être remplacé par un autre qui s'adapte mieux à cette nouvelle algorithmique. Il n'y a pas conflit, mais perpétuelle adaptation grâce aux améliorations apportées aux algorithmes. On se rend compte que ce caractère relatif est en fait très proche d'être heuristique.

I.4 - Exemples de T.R.G.

La famille des transformations de Kronecker orthogonales (T.K.O.) (Andrews, 1970) constitue un premier exemple de T.R.G. Ces T.K.O. sont des transformations orthogonales dont les noyaux sont obtenus à partir de produits de Kronecker de matrices qui sont elles-mêmes des T.R.G. Rappelons que les transformations dont les noyaux sont des matrices de Hadamard appartiennent à la famille des T.K.O.

La famille des transformations orthogonales généralisées introduite par Elliot (1974) constitue un exemple de T.R.G. Les transformations de Fourier appartiennent également à cette famille.

II - LES CHAINES DE T.R.G.

II.1 - Introduction

Le rôle joué par les T.R.G. peut devenir encore plus important. En effet, les T.R.G. sont effectuées à l'ordinateur par des algorithmes très efficaces et très rapides mais leurs performances peuvent être encore améliorées en

- créant des *hardwares* hautement spécialisés ;
- élaborant une algorithmique spécialement conçue pour transformer des données aussi rapidement que possible.

Nous possédons ainsi une panoplie de transformations qui ont leurs caractéristiques, leurs performances et leurs temps de calcul propres. Parmi les plus importantes, nous citons les transformations de *Karhunen-Loève** (K.L.), de *Fourier* (T.F.), de *Walsh* (T.W.), de *Paley* (T.P.), de *Hadamard* (T.H.), de *Haar*** (T.H.), de *Chebyshev* (T.C.) ou "Discreté Cosine Transform"; en *gradins*** (T.G.) ou "Slant Transform". Ahmed et Rao (1975) ont appliqué certaines d'entre elles à trois problèmes test : *le filtrage généralisé de Wiener, la condensation de l'information et la reconnaissance des formes* pour déterminer leurs performances ainsi que leurs temps de calcul.

II.2 - Définition des chaînes de T.R.G.

Une chaîne de T.R.G. est une transformation dont le noyau est défini par une suite de produits

* cette transformation n'est pas une T.R.G.

** cette transformation peut être assimilée à une T.R.G.

simples de Kronecker de T.R.G. ou/et de produits généralisés de Kronecker de T.R.G.

Nous donnons dans une annexe, la définition et le calcul du produit généralisé de Kronecker.

Ces chaînes de T.R.G. qui ont une définition très complexe ont des performances très variables et des temps de calcul sensiblement différents. Pour un problème déterminé, ces performances et ces temps de calcul dépendent :

- . des T.R.G. qui composent la chaîne,
- . du processus qui relie les T.R.G. entre elles.

Les performances et les temps de calcul sont évalués comme l'avaient fait Ahmed et Rao (1975), en appliquant les chaînes sur les trois problèmes test déjà cités : le filtrage de Wiener, la condensation de l'information et la reconnaissance des formes.

Nous allons donner dans ce qui suit les deux formes de chaînes qui ont les plus nombreuses applications. On peut d'ailleurs en concevoir d'autres, cela dépend du problème posé.

III - CHAINES DE T.R.G. EN CASCADE

III.1 - Définition

Une chaîne de T.R.G. en cascade est une transformation \mathcal{C} qui a pour noyau une matrice $[M^r(n)]$ qui est le produit simple de Kronecker de matrices noyaux de T.R.G.

Soit $X(n) = (X(0), X(1), \dots, X(N-1))$, le vecteur composé des $N = 2^n$ échantillons de la fonction $X(t)$ dont on cherche la transformée qui est donnée par :

$$L^r(n) = [M^r(n)] X(n) , \quad (III.1)$$

avec r , ensemble des r_i qu'on appelle la distribution de la chaîne.

$$r = \{r_1, r_2, \dots, r_{p-1}\}, r_i \in \mathbb{N}^{+*} \text{ et } \sum_{i=1}^{p-1} r_i \leq n - 1 ,$$

où $[M^r(n)]$ est la matrice $(N \times N)$ noyau de la chaîne, qui est elle-même égale à :

$$[M^r(n)] = [K^1(r_1)] \otimes [K^2(r_2)] \otimes \dots \otimes [K^{p-1}(r_{p-1})] \otimes [K^p(n - \sum_{i=1}^{p-1} r_i)] \quad (III.2)$$

avec $[K^i(r_i)] \in \mathcal{F}, \mathcal{F}$ famille des matrices, noyaux de T.R.G., p la puissance de la chaîne en cascade est le nombre de T.R.G. qui composent la chaîne et \otimes le symbole du produit simple de Kronecker.

Remarquons que la matrice $[M^r(n)]$ obtenue à partir de produits simples de Kronecker de T.R.G. est elle-même le noyau de \mathcal{C} qui est de ce fait une T.R.G. (Andrews H.C., Caspari K.L., 1971).

III.2 - Transformations de Hadamard-Haar ($p=2$)

Rao, Narasimhan et Krishnaiah Revuluri (1975) ont étudié une telle transformation qu'ils ont qualifiée d'hybride en la considérant comme une transformation de Hadamard-Haar d'ordre r , $(THH)_r$, définie de la façon suivante :

$$L^r(n) = \frac{1}{N} [HH^r(n)] X(n) , \quad (III.3)$$

$$\text{où } [HH^r(n)] = [H_1(r)] \otimes [H_2(n-r)] , \quad (III.4)$$

$[H_1(m)]$ et $[H_2(m)]$ sont respectivement les matrices de Hadamard et de Haar d'ordre 2^m . D'après la remarque faite plus haut, la transformation de Hadamard-Haar est une T.R.G. et peut être factorisée en un produit de

matrices de Good (Andrews et Caspari, 1971).

Dans l'article cité au début de ce paragraphe, Rao et les autres appliquent les $(THH)_r$ aux trois problèmes test déjà mentionnés et donnent des tableaux permettant de comparer leurs performances.

Pour le problème de la reconnaissance des formes (sélection des caractères), on a selon Rao et les autres, dans le cas d'un processus de Markov d'ordre 1 et pour un coefficient de corrélation $\rho = 0,9$:

$$(TP) > (THH)_2 > (THH)_1 > (TH_2) , \quad (III.5)$$

ce qui signifie que la transformation de Paley (TP) est plus performante que les transformations de Hadamard-Haar pour $r = 2$ et $r = 1$ $(THH)_2$ et $(THH)_1$ qui sont elles-mêmes plus performantes que la transformation de Haar (TH_2) .

Pour le problème du filtrage de Wiener, on a* dans le cas de la recherche d'un signal au sens de l'erreur quadratique moyenne :

$$(TP) > (THH)_3 > (THH)_2 > (THH)_1 \gg (TH_2) . \quad (III.6)$$

Pour le problème de la compression de l'information dans le traitement des images, on a* toujours au sens de l'erreur quadratique moyenne :

$$\begin{aligned} 4 : 1^{**} & (TH_2) > (TP) > (THH)_1 > (THH)_2 \\ 6 : 1 & (TH_2) > (TP) > (THH)_2 > (THH)_1 \\ 8 : 1 & (TH_2) > (TP) > (THH)_2 > (THH)_1 \\ 12 : 1 & (TH_2) > (THH)_2 > (THH)_1 > (TP) . \end{aligned} \quad (III.7)$$

Nous constatons que pour les deux premiers problèmes, la transformation de Paley est plus performante que la transformation de Hadamard-Haar qui est pourtant plus complexe. La transformation de Haar a des performances supérieures pour la compression de l'information. On remarque également que $(THH)_2$ est en général plus performante que $(THH)_1$, ce qui tend à montrer l'importance du choix de r .

Pour ce qui est des temps de calcul, nous

donnons ci-dessous le nombre d'additions (ou soustractions) nécessaires pour effectuer la transformation d'un vecteur à $N = 2^n$ composantes (nous n'avons pas tenu compte des décalages) :

- Haar (TH_2) $2 N - 1$,
- Paley (TP) $N \log_2 N$,
- Hadamard-Haar $(THH)_1$ $3 N - 4$.

III.3 - Transformation de Fourier-Walsh-Haar ($p=3$)

En sismique, on est souvent intéressé par des transformations qui sont plus rapides que celles de Fourier et qui néanmoins donnent une assez bonne information sur le contenu fréquentiel des données à analyser. Supposons qu'on ait à traiter des traces sismiques $N = 2^9 = 512$ échantillons, on a à considérer des transformations \mathcal{C} dont le noyau est la matrice $[M^r(9)]$ qui peut se mettre sous la forme :

* selon Rao, Narasimhan et Krishnaiah Revuluri.
** compression 4 : 1 signifie qu'une valeur sur quatre de la transformée est prise pour faire la transformée inverse.



$$[M^r(9)] = [M^{3,3}(9)] = [K^1(3)] \otimes [K^2(3)] \otimes [K^3(3)], \text{ (III.8)}$$

où $[K^1(3)]$, $[K^2(3)]$ et $[K^3(3)]$ sont respectivement les matrices de Fourier, de Walsh et de Haar d'ordre $2^3=8$.

Dans ce cas, la transformation \mathcal{T}_{r_1, r_2} est la transformation de Fourier-Walsh-Haar (TFWH)^c où $r_1 = r_2 = 3$.

$$[M^{3,3}(9)] = [F(3)] \otimes [W(3)] \otimes [H_2(3)], \text{ (III.9)}$$

dans ce cas $r_1=r_2=3$, l'influence des trois transformations est grossièrement la même. Le produit simple de Kronecker n'étant pas commutatif, le résultat dépend de l'ordre dans lequel il est effectué. En réalité, le résultat de la transformation est pratiquement indépendant de l'ordre dans lequel on effectue les produits de Kronecker.

Dans le problème posé, nous avons à chercher une transformation qui soit moins exigeante sur l'analyse fréquentielle de la trace, mais plus rapide que la transformation de Fourier on a donc envisagé les cas suivants :

$$\begin{aligned} [M^{2,3}(9)] &= [F(2)] \otimes [W(3)] \otimes [H_2(4)], \\ [M^{3,2}(9)] &= [F(3)] \otimes [W(2)] \otimes [H_2(4)], \\ [M^{4,2}(9)] &= [F(4)] \otimes [W(2)] \otimes [H_2(3)]. \end{aligned} \text{ (III.10)}$$

Ces transformations correspondent respectivement à (TFWH)_{2,3}, (TFWH)_{3,2} et (TFWH)_{4,2}.

Au point de vue des performances de \mathcal{T} en ce qui concerne l'analyse fréquentielle, et dans le cas de traces sismiques de 512 échantillons, on a l'ordre des valeurs suivantes :

$$(TF) \gg (TFWH)_{4,2} \gg (TFWH)_{3,3} > (TFWH)_{3,2} \gg (TFWH)_{2,3} \gg (TH_2). \text{ (III.11)}$$

Quant à la rapidité de calcul, l'ordre est inverse :

$$(TH_2) \gg (TFWH)_{2,3} > (TFWH)_{3,2} > (TFWH)_{3,3} > (TFWH)_{4,2} \gg (TF), \text{ (III.12)}$$

On constate que le temps de calcul pour effectuer la transformation de Haar (TH₂) est bien meilleur, c'est-à-dire beaucoup plus court que celui pour effectuer la transformation de Fourier-Walsh-Haar pour $r = \{2,3\}$ qui est à son tour meilleur (plus court) que celui pour effectuer la transformation de Fourier-Walsh-Haar pour $r = \{3,2\}$... L'ensemble $r = \{r_1, r_2, \dots, r_{p-1}\}$ joue un rôle important sur les performances et les temps de calcul d'une transformation \mathcal{T}_{r_1, r_2} . En effet, le choix des valeurs de r_i permettent de posséder non seulement les temps de calcul, mais également l'influence de chacune des transformations qui composent \mathcal{T} .

A titre d'exemples, nous traitons les trois problèmes type en appliquant successivement les transformations de Fourier (TF), de Walsh (TW), de Haar (TH₂) et de Fourier-Walsh-Haar (TFWH)_{r₁, r₂} à des traces sismiques de 512 échantillons.

i - Compression d'information

- Performances en se basant sur l'erreur moyenne quadratique.

$$\begin{aligned} 4 : 1 & (TF) > (TH_2) > (TW) > (TFWH)_{4,2} > (TFWH)_{3,3} > (TFWH)_{3,2} > (TFWH)_{2,3}, \\ 6 : 1 & (TF) > (TH_2) > (TFWH)_{4,2} > (TFWH)_{3,3} > (TFWH)_{3,2} > (TW) > (TFWH)_{2,3}, \\ 8 : 1 & (TH_2) > (TFWH)_{4,2} > (TFWH)_{3,3} > (TFWH)_{3,2} > (TF) > (TFWH)_{2,3} > (TW). \end{aligned} \text{ (III.13)}$$

- Temps de calcul

$$(TH_2) > (TW) > (TFWH)_{2,3} > (TFWH)_{3,2} > (TFWH)_{3,3} > (TFWH)_{4,2} > (TF). \text{ (III.14)}$$

Incontestablement, les préférences vont à la transformation de Haar, qui est la plus performante et la plus rapide.

ii - Reconnaissance des formes

- Performances relatives à des classifieurs euclidiens qui vérifient le critère de la distance minimale.

L'échelle des performances est la suivante :

$$(TF) > (TFWH)_{4,2} > (TFWH)_{3,3} > (TW) > (TH_2) > (TFWH)_{3,2} > (TFWH)_{2,3}. \text{ (III.15)}$$

- Temps de calcul

$$(TH_2) > (TW) > (TFWH)_{3,2} > (TFWH)_{2,3} > (TFWH)_{3,3} > (TFWH)_{4,2} > (TF). \text{ (III.16)}$$

L'échelle des temps et celle des performances sont très différentes et c'est dans de pareils cas que l'utilisation de chaînes peut être intéressante.

iii - Filtrage de Wiener

- Performances au sens de l'erreur moyenne quadratique.

$$(TF) > (TFWH)_{4,2} > (TFWH)_{3,3} > (TW) > (TFWH)_{3,2} > (TH_2) > (TFWH)_{2,3}. \text{ (III.17)}$$

- Temps de calcul

$$(TH_2) > (TFWH)_{3,2} > (TFWH)_{2,3} > (TFWH)_{3,3} > (TW) > (TFWH)_{4,2} > (TF). \text{ (III.18)}$$

On constate également que les échelles (III.17) et (III.18) sont très différentes. On peut néanmoins envisager qu'une (TFWH)_{3,3} doit donner des résultats satisfaisants en fonction de ses performances et de son temps de calcul.

Pour être honnête, il faut dire que ces

échelles de valeurs n'ont été déterminées qu'à partir de quelques exemples bien particuliers concernant la

sismique (N=256). De plus, pour la compression de l'information et surtout pour la reconnaissance des formes, nous n'avons envisagé qu'un seul critère. Ces échelles de valeur ne sont donc ni absolues ni générales, mais néanmoins, nous pensons qu'elles ne sont pas tellement éloignées de la réalité.

Ces chaînes de transformations en cascade voient leur efficacité, leurs performances, leur temps de calcul directement liés aux coefficients r_i . De plus, nous constatons que l'échelle des valeurs des performances est souvent inverse de celle des temps de calcul. En général, plus une transformation est performante, plus le temps de calcul pour l'effectuer à l'ordinateur est long. Lorsque nous avons à effectuer une transformation, nous avons d'abord à choisir les transformations constituant la chaîne en fonction des caractéristiques du problème posé. Ensuite, nous avons à faire le bilan performances-temps de calcul de chacune de ces transformations élémentaires. Enfin, nous avons à trouver un compromis pour choisir la distribution de

ANALYSE SPECTRALE GENERALISEE

la chaîne $r = \{r_i\}$, ce qui revient à pondérer l'influence de chacune des transformations constituant la chaîne.

IV - CHAINES DE T.R.G. EN GROUPES

IV.1 - Définition

Une chaîne de T.R.G. en groupes est une transformation \mathcal{C}_p dont le noyau est une matrice $[\mathcal{M}_p(n)]$ obtenue en effectuant une succession de produits généralisés de Kronecker de groupes de matrices elles-mêmes noyaux de T.R.G.*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^p(n) = \mathcal{P}_1\{\mathcal{Y}_1\} \otimes \{\mathcal{Y}_2\} \otimes \dots \otimes \mathcal{P}_p\{\mathcal{Y}_{2p-1}\} \otimes \{\mathcal{Y}_{2p}\}, \quad (IV.1)$$

où les \mathcal{Y}_i , pour $i=1,2,\dots, 2p$ sont des suites de matrices telles que les matrices appartenant aux groupes d'indice impair /pair ont pour ordre le nombre de matrices appartenant aux groupes d'indice pair/impair et sont en nombre égal à l'ordre des matrices appartenant également aux groupes d'indice pair/impair.

Rappelons que le symbole \otimes est celui du produit simple de Kronecker tandis que le symbole \odot est celui du produit généralisé de Kronecker.

Pour calculer $[\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^p(n)]$, on a à effectuer successivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1\{\mathcal{Y}_1\} \odot \{\mathcal{Y}_2\} &= M^1 \\ \mathcal{P}_2\{\mathcal{Y}_3\} \odot \{\mathcal{Y}_4\} &= M^2 \\ &\vdots \\ \mathcal{P}_p\{\mathcal{Y}_{2p-1}\} \odot \{\mathcal{Y}_{2p}\} &= M^p, \end{aligned}$$

où les matrices \mathcal{P}_i sont des matrices unitaires de permutation avec une seule valeur non nulle égale à l'unité dans chaque ligne et chaque colonne. Leur rôle est de réordonner les lignes et les colonnes des matrices résultats des produits généralisés de Kronecker. Si cette réorganisation n'est pas nécessaire, la matrice \mathcal{P}_i est égale à la matrice unité.

Dans ces conditions, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^p$ est une chaîne en cascade :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^p(n) = M^1 \otimes M^2 \otimes \dots \otimes M^p, \quad (IV.2)$$

où p est la puissance de la chaîne, c'est-à-dire le nombre de produits généralisés de Kronecker.

Dans le cas où $p = 1$, la chaîne de puissance 1 se réduit à un simple produit généralisé de Kronecker.

Dans le cas général, pour une chaîne de puissance p , $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^p(n)$ est une matrice carrée d'ordre $N = 2^n$, avec :

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^p m_i + \sum_{j=1}^p n_j, \\ N &= 2^{\sum_{i=1}^p (m_i+n_i)} = \prod_{i=1}^p N_i, \end{aligned} \quad (IV.3)$$

où 2^{m_i} et 2^{n_i} sont respectivement le nombre et l'ordre des matrices constituant la suite $\{\mathcal{Y}_{2i-1}\}$. 2^{n_i} et 2^{m_i} sont aussi respectivement le nombre et l'ordre des matrices constituant la suite $\{\mathcal{Y}_{2i}\}$. $N_i = 2^{m_i+n_i}$ est l'ordre de la matrice M^i . La suite des p valeurs de m et des p valeurs de n constitue la suite des $2p$ caractéristiques de la chaîne \mathcal{C}_p , qui permettent d'en définir la distribution. Les caractéristiques de la chaîne sont données par :

$$\mathcal{C} = \{(m_i, n_i) / m_i \in N^{+*}, n_i \in N^{+*} \text{ et } i = 1, 2, \dots, p\} \quad (IV.4)$$

et la distribution est définie par :

$$r = \{r_i / r_i \in N^{+*}, r_i = m_i + n_i \text{ et } i = 1, 2, \dots, p\} \quad (IV.5)$$

avec $n = \sum_{i=1}^p r_i$, où p est la puissance de la chaîne.

Si les matrices composant les groupes \mathcal{Y}_i sont les noyaux de T.R.G., la transformation \mathcal{C}_p est dans ce cas une T.R.G.

IV.2 - Chaînes des T.R.G. en groupes de puissance 2

Pour $p = 2$, (IV.1) s'écrit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^2(n) = \underbrace{\mathcal{P}_1\{\mathcal{Y}_1\} \odot \{\mathcal{Y}_2\}}_{M^1} \otimes \underbrace{\mathcal{P}_2\{\mathcal{Y}_3\} \odot \{\mathcal{Y}_4\}}_{M^2} \quad (IV.6)$$

L'ordre N de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^2(n)$ est donnée par $N = 2^n$ où $n = n_1 + m_1 + n_2 + m_2$. Dans ces conditions $N = N_1 N_2$ où $N_1 = 2^{m_1+n_1}$ et $N_2 = 2^{m_2+n_2}$.

Les caractéristiques de la chaîne sont les couples :

$$\mathcal{C} = \{(m_1, n_1), (m_2, n_2), m_1, n_1, m_2, n_2 \in N^{+*}\}$$

et la distribution r est donnée par :

$$r = \{r_1 = m_1 + n_1, r_2 = m_2 + n_2, r_1 \text{ et } r_2 \in N^{+*}\}$$

IV.3 - Chaînes des T.R.G. en groupes de puissance supérieure à deux

Pour $p = 3$, (IV.1) s'exprime par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^3(n) = \underbrace{\mathcal{P}_1\{\mathcal{Y}_1\} \odot \{\mathcal{Y}_2\}}_{M^1} \otimes \underbrace{\mathcal{P}_2\{\mathcal{Y}_3\} \odot \{\mathcal{Y}_4\}}_{M^2} \otimes \underbrace{\mathcal{P}_3\{\mathcal{Y}_5\} \odot \{\mathcal{Y}_6\}}_{M^3} \quad (IV.7)$$

En considérant (IV.6), on a :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^3(n) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}^2(n_1) \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{C}_2}^1(n_2), \quad (IV.8)$$

où $N = 2^n = 2^{n_1+n_2} = N_1 \cdot N_2$,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2.$$

Pour calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^3(n)$, il suffit de calculer :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}^2(n_1) = M^1 \otimes M^2$$

$$\text{et } \mathcal{M}_{\mathcal{C}_2}^1(n_2) = M^3$$

et d'en effectuer le produit simple de Kronecker. Si p est quelconque, on a la relation de récurrence suivante :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^p(n) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}^{p-1}(n') \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{C}_2}^1(n''),$$

* Pour simplifier les notations, on supprime les crochets des matrices et on n'indique pas toujours explicitement leur ordre.



où $N = 2^{n'+n''} = N' \cdot N''$.

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$$

Le calcul de telles matrices se fait à l'ordinateur en utilisant des algorithmes qui permettent d'effectuer les produits simples et généralisés de Kronecker. Ces algorithmes ont été programmés en Fortran IV.

IV.4 - Les chaînes de T.R.G. en groupes devant les trois problèmes test

i) Filtrage de Wiener

Le test a été fait sur des traces sismiques de $N = 256$ échantillons, (pas d'échantillonnage, $\tau = 4$ ms). Nous avons considéré les trois chaînes ($p = 2$) suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'_1 &: \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{H_1(2), H_1(2)\}}^2 \otimes \overbrace{\{H_1(2), \dots, H_1(2)\}}^8 \otimes \overbrace{\{H_1(3), \dots, H_1(3)\}}^4 \\ \mathcal{C}'_2 &: \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{H_2(2), H_2(2)\}}^2 \otimes \overbrace{\{H_2(2), \dots, H_2(2)\}}^8 \otimes \overbrace{\{H_2(3), \dots, H_2(3)\}}^4 \\ \mathcal{C}'_3 &: \overbrace{\{H_1(1), H_1(1), I(1), I(1)\}}^2 \otimes \overbrace{\{H_2(2), H_2(2)\}}^2 \otimes \overbrace{\{H_1(2), \dots, H_1(2), H_2(2), \dots, H_2(2)\}}^4 \otimes \overbrace{\{H_1(3), H_1(3), H_2(3), H_2(3)\}}^2 \end{aligned} \quad (IV.10)$$

où $H_1(1), H_1(2), H_1(3)$ sont respectivement les matrices de Hadamard d'ordre 2, 4, 8 ; $H_2(2), H_2(3)$ sont respectivement les matrices de Haar d'ordre 4 et 8. $I(1)$ est la matrice unité d'ordre 2.

Du point de vue des performances, nous avons l'ordre des valeurs suivant :

$$\mathcal{C}'_1 \gg \mathcal{C}'_2 > \mathcal{C}'_3 \quad (IV.11)$$

Du point de vue de la rapidité de calcul, nous avons trouvé :

$$\mathcal{C}'_2 > \mathcal{C}'_3 \gg \mathcal{C}'_1 \quad (IV.12)$$

Nous avons choisi la chaîne de caractéristique \mathcal{C}'_2 , à la fois performante et rapidement calculée à l'ordinateur pour filtrer nos traces sismiques et nous avons obtenu de bons résultats.

ii) Condensation de l'information (Bois, 1972)

Notre étude a porté sur la compression de l'information contenue dans des traces sismiques de $N = 512$ échantillons (pas d'échantillonnage, $\tau = 4$ ms). D'après notre expérience, nous savons que les transformations de Walsh, de Haar et les transformations en gradins* sont bien adaptées à la condensation de l'information contenue dans des séries normales et markoviennes. Nous avons considéré les trois chaînes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}''_1 &: \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{W(2), W(2)\}}^2 \otimes \overbrace{\{W(2), \dots, W(2)\}}^{16} \otimes \overbrace{\{W(4), \dots, W(4)\}}^4 \\ \mathcal{C}''_2 &: \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{W(2), W(2)\}}^2 \otimes \overbrace{\{W(2), \dots, W_2(2), H_2(2), \dots, H_2(2)\}}^4 \otimes \overbrace{\{H_2(4), \dots, H_2(4)\}}^{12} \otimes \overbrace{\{H_2(4), \dots, H_2(4)\}}^4 \\ \mathcal{C}''_3 &: \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{W(2), G(2)\}}^1 \otimes \overbrace{\{W(2), \dots, W(2), G(2), \dots, G(2)\}}^4 \otimes \overbrace{\{G(4), \dots, G(4)\}}^{12} \otimes \overbrace{\{G(4), \dots, G(4)\}}^4 \end{aligned} \quad (IV.13)$$

* Les matrices en gradins correspondent aux "slant matrices" chez les anglo-saxons (Enomoto & Shibata, 1971)

où $H_1(1), W(2), W(4), H_2(2), H_2(4), G(2), G(4)$ sont respectivement les matrices de Hadamard d'ordre 2, de Walsh d'ordre 4 et 16, de Haar d'ordre 4 et 16 et en gradins d'ordre 4 et 16.

Du point de vue des performances, nous avons pour la compression basée sur le critère de l'erreur moyenne quadratique l'ordre suivant :

$$\begin{aligned} 4 : 1 & \mathcal{C}''_3 > \mathcal{C}''_1 > \mathcal{C}''_2 \\ 8 : 1 & \mathcal{C}''_3 > \mathcal{C}''_2 > \mathcal{C}''_1 \\ 12 : 1 & \mathcal{C}''_2 > \mathcal{C}''_3 \gg \mathcal{C}''_1 \end{aligned} \quad (IV.14)$$

Du point de vue de la rapidité de calcul, nous avons :

$$\mathcal{C}''_2 > \mathcal{C}''_1 \gg \mathcal{C}''_3 \quad (IV.15)$$

La chaîne \mathcal{C}''_2 présente une solution intéressante pour les compressions élevées et la chaîne \mathcal{C}''_1 pour les faibles compressions.

iii) Reconnaissance des formes (choix des caractères)

Nous avons utilisé des chaînes de T.R.G. en groupes pour reconnaître des horizons sismiques. L'étude a été faite sur des tronçons de traces sismiques de $N = 128$ échantillons (pas d'échantillonnage, $\tau = 4$ ms) avec les trois chaînes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'''_1 &: \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{H_1(2), H_1(2)\}}^2 \otimes \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1), I(1), \dots, I(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{H_1(3), H_1(3)\}}^2 \\ \mathcal{C}'''_2 &: \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{H_2(2), H_2(2)\}}^2 \otimes \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1), I(1), \dots, I(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{H_1(3), H_1(3)\}}^2 \\ \mathcal{C}'''_3 &: \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{H_1(2), H_2(2)\}}^1 \otimes \overbrace{\{H_1(1), \dots, H_1(1), I(1), \dots, I(1)\}}^4 \otimes \overbrace{\{H_1(3), H_1(3)\}}^2 \end{aligned} \quad (IV.16)$$

Les expériences faites sur ces tronçons de traces permettent de donner l'échelle des performances suivantes :

$$\mathcal{C}'''_1 > \mathcal{C}'''_3 > \mathcal{C}'''_2$$

et l'échelle concernant la rapidité de calcul :

$$\mathcal{E}_2'' > \mathcal{E}_3'' > \mathcal{E}_1'' .$$

Nous avons constaté que les différences à l'intérieur de chacune des deux échelles sont faibles et que l'ordre de ces deux échelles est inverse. La chaîne \mathcal{E}_3'' que nous avons utilisée pour reconnaître les horizons sismiques nous a donné des résultats satisfaisants.

Les échelles de valeurs que nous donnons pour les trois problèmes test ne sont valables que pour les exemples traités plus haut. Elles n'ont aucun caractère général et ne peuvent être étendues à d'autres cas qu'avec précautions.

Avant de conclure, en examinant ces différents résultats, on constate généralement que plus une chaîne est performante pour accomplir une tâche donnée plus le temps de calcul pour l'effectuer est long. Dans le même ordre d'idée, *Les chaînes de T.R.G. en groupes sont en général plus performantes que les chaînes de T.R.G. en cascade.* Par contre, le calcul à l'ordinateur des chaînes de T.R.G. en groupes est plus long. Il se pose donc un problème pour définir la chaîne de T.R.G. en fonction des performances qu'on attend d'elle et du temps de calcul dont on dispose. L'étude que nous venons de faire permet précisément de choisir les T.R.G. qui constituent la chaîne en adoptant le processus suivant qui sera notre conclusion.

CONCLUSION

Après avoir défini les temps de calcul et les performances des T.R.G. classiques, on peut concevoir deux familles de chaînes de T.R.G., l'une séquentielle au moyen de produits simples de Kronecker et l'autre en groupes au moyen de produits généralisés de Kronecker. Ces chaînes peuvent être élaborées pour accomplir à l'ordinateur une tâche déterminée en un temps donné à l'avance. Pour ce faire, on choisit les matrices, noyaux de T.R.G. classiques, selon leurs caractéristiques, leurs performances et leurs temps de calcul pour répondre au mieux au problème posé. Il reste à pondérer l'action de chacune de ces T.R.G. en choisissant la distribution de la chaîne. Si nous recherchons les performances, nous choisirons une chaîne en groupes, au contraire nous utiliserons une chaîne en cascade si nous optons pour un calcul plus rapide.

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie M. GRAU pour ses nombreux conseils et encouragements.

A N N E X E

PRODUIT GENERALISE DE KRONECKER (Fino J.B., Algazi V.R., 1974)

1 - Définition

Le produit généralisé de Kronecker d'une suite S_1 de n matrices carrées $[M_i^1]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) d'ordre m et d'une suite S_2 de m matrices carrées $[M_j^2]$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$) d'ordre n est par définition une ²matrice $[M]$ d'ordre mn qui s'écrit :

$$\{S_1\} \otimes \{S_2\} = [M] , \tag{A.1}$$

$$. \text{ avec } M_{um+w, u'm+w'} = M_{1u, u'}^w \cdot M_{2w, w'}^{u'} \tag{A.2}$$

$$. \text{ avec } 0 \leq u, u' < n \text{ et } 0 \leq w, w' < m .$$

Remarquons que le produit simple de Kronecker de deux matrices $[M_1]$ d'ordre m et $[M_2]$ d'ordre n est le produit généralisé de Kronecker d'une suite S_1 constituée par n matrices identiques à $[M_1]$ et d'une suite S_2 formée de m matrices identiques à $[M_2]$. La matrice ²produit $[M]$ est d'ordre mn :

$$\{M\} = \{M_1\} \otimes \{M_2\} = \overbrace{\{M_1, \dots, M_1\}}^n \otimes \overbrace{\{M_2, \dots, M_2\}}^m \tag{A.3}$$

De (A.2), on tire :

$$M_{um+w, u'm+w'} = M_{1u, u'} \cdot M_{2w, w'} \tag{A.4}$$

avec $u, u' < n$ & $w, w' < m$.

Le deuxième membre de (A.4) est précisément l'expression d'un élément quelconque du produit simple de Kronecker des deux matrices $[M_1]$ et $[M_2]$.

2 - Exemple

Le produit généralisé de Kronecker d'une suite de deux matrices (A^0, A^1) d'ordre deux par une suite de deux matrices (B^0, B^1) d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} A_{0,0}^0 & A_{0,1}^0 \\ A_{1,0}^0 & A_{1,1}^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{0,0}^1 & A_{0,1}^1 \\ A_{1,0}^1 & A_{1,1}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{0,0}^0 & B_{0,1}^0 \\ B_{1,0}^0 & B_{1,1}^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{0,0}^1 & B_{0,1}^1 \\ B_{1,0}^1 & B_{1,1}^1 \end{pmatrix}$$

est une matrice C d'ordre quatre pour laquelle

$$C_{um+w, u'm+w'} = A_{u, u'}^w \cdot B_{w, w'}^{u'}$$

$$C = \begin{pmatrix} A_{0,0}^0 & B_{0,0}^0 & A_{0,0}^0 & B_{0,0}^1 & A_{0,0}^1 & B_{0,0}^1 & A_{0,0}^1 & B_{0,0}^1 \\ A_{0,0}^1 & B_{1,0}^0 & A_{0,0}^1 & B_{0,1}^0 & A_{0,0}^1 & B_{1,0}^1 & A_{0,0}^1 & B_{1,0}^1 \\ A_{1,0}^0 & B_{0,0}^0 & A_{1,0}^0 & B_{0,0}^1 & A_{1,0}^1 & B_{0,0}^1 & A_{1,0}^1 & B_{0,0}^1 \\ A_{1,0}^1 & B_{1,0}^0 & A_{1,0}^1 & B_{0,1}^1 & A_{1,0}^1 & B_{1,0}^1 & A_{1,0}^1 & B_{1,0}^1 \end{pmatrix}$$

$$(A.5)$$



BIBLIOGRAPHIE

AHMED, N., RAO, K.R., 1975, Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing, Springer-Verlag.

ANDREWS, H.C., 1970, Computer Techniques in Image Processing, Academic Press.

ANDREWS, H.C., CASPARI, K.L., 1971, Degrees of Freedom and Modular Structure in Matrix Multiplication, IEEE Trans. on Comput., vol. C-20, n° 2, p. 133-141.

BOIS, P., 1972, Analyse séquentielle, Geophysical Prospecting, vol. XX, n° 3, p. 497-513.

ELLIOT, D.F., 1974, A class of generalized continuous orthogonal transforms, IEEE Trans. on Acoust., vol. ASSP - 22, n° 4, p. 245-254.

ENOMOTO, H., SHIBATA, K., 1971, Orthogonal Transform Coding Systems for Television Signals, Proc. 1971 Symp. Applications of Walsh Functions, p. 11-17.

FINO, B.J., ALGAZI, V.R., 1974, Slant Haar Transform., Proc. IEEE, 62, n° 5, p. 653-654.

RAO, K.R., NARASIMHAN, M.A., KRISHNAIAH REVULURI, 1975, Image Data Processing by Hadamard-Haar Transform., IEEE Trans. on Comput., vol. C-24, n° 9, p. 888-896.