

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

EGALISEUR DE GIGUE

Michel LEVY et Odile MACCHI

L2S - ESE - Plateau du Moulon - 91190. GIF - s - YVETTE.

RESUME

Un système de transmission de données doit faire face à différents phénomènes nuisibles tels que les interférences entre symboles, le bruit additif, et les erreurs de restitution de la phase de l'onde de référence (gigue de phase et dérive de fréquence) qui proviennent des imperfections du canal de transmission ou d'une démodulation imparfaite.

Le présent article introduit un nouveau récepteur afin d'éliminer l'erreur de phase de manière autoadaptative par des méthodes linéaires. La lutte contre les interférences entre symboles et le bruit additif est généralement assurée au niveau du récepteur par un filtre transversal numérique, nommé égaliseur, le plus souvent complexe (c'est-à-dire utilisant le signal démodulé à la fois sur deux ondes en quadrature). En présence de gigue de phase rapide, un égaliseur de ce type ne peut assurer des performances convenables. Le nouveau système présenté comporte un tel égaliseur suivi d'un égaliseur à un coefficient complexe dit égaliseur de gigue, qui permet d'améliorer considérablement les performances du récepteur. L'ensemble des deux égaliseurs est en effet très proche du filtre linéaire non stationnaire optimal, qui compenserait de manière optimale une erreur de phase variable dans le temps.

Des simulations sur ordinateur ont prouvé l'efficacité d'un tel système pour des transmissions sur voies téléphoniques utilisant la modulation d'amplitude en quadrature et assurant un débit de 9600 bits par seconde.

SUMMARY

A data transmission system suffers from intersymbol interferences (I.S.I.), additive noise, and phase error in the process of carrier recovery (phase jitter or frequency drift) due to impairments of the channel or to imperfect demodulation. This paper introduces a new receiver in order to eliminate the phase errors by linear autoadaptive methods. I.S.I. suppression is usually performed by a transversal digital filter or equalizer. In the case of quadrature amplitude modulation or phase modulation, this equalizer is a complex one. In the presence of rapid phase jitter, such an equalizer does not perform satisfactorily. The new system which we propose includes such an equalizer followed by a single complex coefficient equalizer which improves the performances of the receiver. The set of the two equalizers is very close to the non stationary filter which is optimal for eliminating a time varying error phase.

Computer simulations have proved the efficiency of such a system for data transmission on telephone lines using quadrature amplitude modulation for a 9600 bits per second rate.



1.- INTRODUCTION.

Nous considérons dans cet article un système de transmission de données sur voies téléphoniques. Pour assurer un débit de 9600 bits/seconde, le type de modulation utilisé actuellement est la modulation d'amplitude en quadrature (MAQ), c'est-à-dire que l'on module deux porteuses en quadrature (figure 1) par deux trains de données a'_k et a''_k . Chacune de ces données prend une valeur parmi 4 niveaux (2 bits) et les données sont émises à la fréquence rythme de 2400 bauds. Le canal de transmission est simplement modelisé par un filtre linéaire et par l'addition d'un bruit additif au signal modulé. Le récepteur comporte un égaliseur en bande de base, c'est-à-dire que le signal est démodulé, échantillonné à la fréquence d'émission des données (toutes les Δ secondes) puis traité dans un filtre transversal, l'égaliseur, généralement autoadaptatif [1],[2],[3]. Un modèle en bande de base équivalent à l'ensemble {modulateur - ligne de transmission - démodulateur} peut être introduit en utilisant des notations complexes (figure 2). Ainsi le signal reçu $x(t)$ à l'entrée de l'égaliseur s'écrit :

$$(1) \quad x(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k S(t-k\Delta) + B(t) \right] e^{-i\theta(t)}$$

où $a_k = a'_k + i a''_k$ est un symbole complexe qui regroupe les deux données émises, et où la fonction $S(t)$, réponse impulsionnelle globale du canal, est une fonction complexe qui tient compte des filtres de mise en forme, de ceux d'émission et de réception, et du milieu de transmission (exemple figure 3).

On suppose que :

$$(2) \quad E\{a_k\} = 0, \quad E\{a_k a_j^*\} = a^2 \delta_{k,j} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

et que le bruit additif $B(t)$ (complexe) est indépendant des a_k et satisfait :

$$(3) \quad E\{B(t)\} = 0, \quad E\{B(t) B^*(t+s)\} = \Gamma_B(s) \quad s < +\infty$$

Le rapport signal sur bruit (ρ) est défini par :

$$(4) \quad \rho = 10 \log \left(\frac{E\{|x(t)|^2\}}{E\{|B(t)|^2\}} \right)$$

Le facteur $e^{-i\theta(t)}$ traduit une rotation du signal reçu par rapport au signal émis, rotation liée à la différence de phase $\theta(t)$ entre la porteuse à l'entrée du récepteur et l'onde de référence de démodulation. La fonction $\theta(t)$ comporte deux termes [6] ; un terme très basse fréquence, lié à la dérive de fréquence des oscillateurs d'émission et de réception, et à

une dérive de fréquence dans le canal lorsque celui-ci comporte des transpositions en fréquences intermédiaires ; un terme de fréquence moyenne dit "gigue de phase" au voisinage des fréquences 50, 100, 150 Hz, provenant lui aussi de distorsions dues au canal de transmission.

L'échantillonneur fonctionnant aux instants $k\Delta + t_0$ sur les deux voies en quadrature fournit la suite complexe des $x_k = x(k\Delta + t_0)$

L'égaliseur réalise le filtrage à l'instant $(k\Delta + t_0)$

$$(5) \quad y_k = \sum_{i=-L}^{i=+N} h_k^i x_{k-i}$$

Les coefficients h_k^i ($i=-L, \dots, +N$) sont complexes. Pour simplifier les notations, on introduit les vecteurs \vec{x}_k , \vec{s}_i , et \vec{h}_k de \mathcal{C}^{N+L+1} :

$$(6) \quad \begin{aligned} \vec{x}_k^T &= [x_{k-L}, \dots, x_k, \dots, x_{k+N}] , \\ \vec{s}_i^T &= [S((-L+i)\Delta + t_0), \dots, S(i\Delta + t_0), \dots, S((N+i)\Delta + t_0)] , \\ \vec{h}_k^T &= [h_k^{-L}, \dots, h_k^0, \dots, h_k^N] ; \\ y_k &= \vec{h}_k^T \vec{x}_k \end{aligned}$$

Les détecteurs placés à la sortie de l'égaliseur fournissent des estimations \hat{y}_k des données émises. Nous allons maintenant examiner les différents cas d'utilisation de cet égaliseur dit "complexe", dont les coefficients devront être optimisés de manière à minimiser l'écart quadratique moyen $\epsilon^2(\vec{H})$:

$$(7) \quad \epsilon^2(\vec{H}) = E\{|y_k - a_k|^2\} = E\{|\vec{H}^T \vec{x}_k - a_k|^2\} .$$

En supposant que les éléments aléatoires a_k, \vec{x}_k sont stationnaires dans leur ensemble, et en posant :

$$(8) \quad \underline{A} = \frac{1}{a^2} E(\vec{x}_k \vec{x}_k^T) = (a_{ij}) \quad E(a_k^* \hat{y}_k) = a^2 \underline{R}$$

on a :

$$(9) \quad \epsilon^2(\vec{H}) = a^2 (\vec{H}^T \underline{A} \vec{H} + 1 - 2 R(\vec{H}^T \underline{R}))$$

où $R(\quad)$ désigne la partie réelle.

Lorsque la matrice \underline{A} est inversible, ce que nous supposons, cet écart quadratique moyen est une fonction convexe de \vec{H} et est minimal pour le vecteur de filtrage \vec{H}_{opt} :

$$(10) \quad \vec{H}_{opt} = (A^{-1} \vec{R})^*$$

et il vaut alors ϵ_{opt}^2 :

$$(11) \quad \epsilon_{opt}^2 = a^2(1 - \vec{R}^T A^{-1} \vec{R}) = a^2(1 - \vec{H}_{opt}^T \vec{R}).$$

2.- PERFORMANCES D'UN EGALISEUR LINEAIRE CLASSIQUE DANS LE CAS OU L'ERREUR DE PHASE EST STATIONNAIRE.

Premier cas :

La démodulation est parfaite et la ligne n'introduit pas d'erreur de phase :

$\theta(t) = 0$ - Alors A vaut A_0

$$(12) \quad A = A_0 \triangleq \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \vec{S}_i \vec{S}_i^T + \frac{1}{a^2} R_B = (a^0_{ij})$$

où R_B est la matrice complexe de corrélation des échantillons du bruit $B_k = B(k\Delta + t_0)$. En outre, on a

$$(13) \quad \vec{R} = \vec{S}_0$$

Le vecteur optimal \vec{H}_0 et l'écart quadratique moyen ϵ_0^2 sont alors :

$$(14) \quad \vec{H}_0 \triangleq (A_0^{-1} \vec{S}_0)^* \text{ et } \epsilon_0^2 \triangleq a^2(1 - \vec{S}_0^T A_0^{-1} \vec{S}_0) = a^2(1 - \vec{H}_0^T \vec{S}_0).$$

Second cas :

La démodulation est imparfaite mais l'erreur de phase est constante :

$\theta(t) = \theta_0 \forall t$. Dans ce cas la matrice A s'écrit :

$$(15) \quad A = e^{-i\theta_0} A_0 e^{+i\theta_0} = A_0,$$

et

$$(16) \quad \vec{R} = e^{-i\theta_0} \vec{S}_0.$$

Le vecteur optimal est $e^{i\theta_0} \vec{H}_0$ et l'écart quadratique moyen ϵ_{opt}^2 :

$$(17) \quad \epsilon_{opt}^2 = a^2(1 - e^{i\theta_0} \vec{H}_0^T e^{-i\theta_0} \vec{S}_0) = \epsilon_0^2.$$

Il est inchangé par rapport à une démodulation parfaite. Ce résultat n'est guère surprenant car on aurait obtenu les mêmes résultats en considérant que la réponse impulsionnelle était $S(t) e^{-i\theta_0}$ et

qu'il n'y avait pas d'erreur de phase à la démodulation.

Troisième cas :

C'est un cas plus proche de la réalité : l'erreur de phase $\theta(t)$ est un processus aléatoire stationnaire qui peut être modélisé comme suit :

$$(18) \quad \theta(t) = \theta_0 + \sum_{p=1}^{p=M} \alpha_p \cos(2\pi F_p t + \beta_p) + n(t)$$

où

θ_0 est une phase constante ,

β_1, \dots, β_M des variables aléatoires indépendantes équiréparties sur $[0, 2\pi]$,

α_p, F_p ($p = 1, \dots, M$), les amplitudes et les fréquences de M sinusoïdes. Les α_p sont décroissants avec p et l'on a en général $F_p = p.F$ (harmoniques du secteur), $F = F_1 = 50$ Hz ou 60 Hz,

$n(t)$ est un bruit centré gaussien, basse fréquence, de puissance σ_n^2 , et de fonction de corrélation $r_n(s)$. On calcule :

$$(19) \quad G_1 = E\{e^{-i\theta(t)}\} = \left(\prod_{p=1}^{p=M} J_0(\alpha_p) \right) e^{-i\theta_0} e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}}$$

$$G_2(s) = E\{e^{-i\theta(t)} e^{+i\theta(t+s)}\} = \left(\prod_{p=1}^{p=M} J_0(\alpha_p \sin(\pi F_p s)) \right) e^{-\frac{\sigma_n^2}{2} + r_n(s)}.$$

On obtient alors la matrice A , notée ici A' :

$$(20) \quad A = A' \triangleq (a'_{ij}) \text{ avec } a'_{ij} = a^0_{ij} G_2((i-j)\Delta), \quad \vec{R} = G_1 \vec{S}_0.$$

Le vecteur optimal \vec{H}_{opt} est alors \vec{H}'_0 :

$$(21) \quad \vec{H}_{opt} = \vec{H}'_0 \triangleq (A'^{-1} G_1 \vec{S}_0)$$

et l'écart quadratique moyen minimal ϵ_{opt}^2 vaut ϵ'^2_0 :

$$(22) \quad \epsilon_{opt}^2 = \epsilon'^2_0 \triangleq a^2(1 - \vec{H}'_0{}^T G_1 \vec{S}_0).$$

On démontre aisément la relation suivante [4] :

$$(23) \quad \epsilon'^2_0 \geq \epsilon_0^2.$$

Illustrons ce résultat par des valeurs numériques ; des calculs sur ordinateur ont montré, par



exemple, pour la réponse impulsionnelle de la figure 3, pour un rapport signal sur bruit $\rho = 25$ dB, un égaliseur à 15 coefficients complexes, et des données complexes de puissance unité ($a^2 = 1$), que l'on

$$a : \quad \epsilon_0^2 = 6,26 \cdot 10^{-3}.$$

Si l'on est en présence d'une gigue de phase sinusoïdale,

$$\theta(t) = \theta_0 + \alpha \sin(2\pi Ft + \beta)$$

$$\alpha = \pi / 24 \quad (15^\circ \text{ crête à crête})$$

$$F = 50 \text{ Hz}$$

$$\text{alors : } \epsilon_0'^2 = 1,48 \cdot 10^{-2}$$

L'écart quadratique moyen a ainsi plus que doublé, ce qui peut correspondre à une multiplication par 10 ou 100 du taux d'erreur.

La conséquence pratique est simple : en présence de gigue de phase, le taux d'erreur à la sortie d'un égaliseur optimal stationnaire est le plus souvent inacceptable.

D'où la nécessité d'abandonner une théorie stationnaire et de définir un égaliseur optimal non stationnaire qui pourrait poursuivre plus finement l'erreur de phase à la démodulation.

3.- EGALISEUR OPTIMAL NON STATIONNAIRE : POURSUITE PLUS FINE DE LA PHASE.

Ecrivons l'écart quadratique moyen à la sortie de l'égaliseur (dans l'état \vec{H}), conditionnellement à une réalisation du processus à l'instant $(k \Delta + t_0)$, c'est-à-dire conditionnellement à $\theta(t)$

$$(24) \quad \epsilon_k^2(\vec{H}, \theta) = E \{ |\vec{H}^T \vec{X}_k - a_k|^2 / \theta \} \\ = a^2 (\vec{H}^T \vec{C}_{kk} \vec{A} \vec{C}_{kk}^* \vec{H} + 1 - 2R(\vec{H}^T \vec{C}_{kk} \vec{S}_0))$$

où \vec{C}_{kk} est une matrice diagonale de terme générique C_{jj}^k :

$$(25) \quad C_{jj}^k = e^{-i\theta((k+j)\Delta + t_0)} \quad (j = -L, \dots, 0, \dots, N).$$

Le vecteur optimal est alors :

$$(26) \quad \vec{H}_{\text{opt},k}(\theta) = \vec{C}_{kk}^* \vec{H}_0.$$

Il varie donc au cours du temps ; par contre

l'écart quadratique moyen minimal est constant :

$$(27) \quad \epsilon_{\text{opt},k}^2(\theta) = a^2 (1 - H_{\text{opt},k}^*(\theta) \vec{C}_{kk} \vec{S}_0) = \epsilon_0^2.$$

Ce calcul simple montre de plus, comme on pouvait le pressentir, qu'un égaliseur optimal non stationnaire offrirait les mêmes performances qu'un égaliseur stationnaire en absence d'erreur de phase.

L'approche d'un égaliseur optimal non stationnaire est d'autant plus intéressante qu'on ne peut pas toujours définir un vecteur optimal stationnaire. Supposons par exemple que $\theta(t)$ soit de la forme :

$$(28) \quad \theta(t) = \theta_0 + 2\pi F_g t,$$

C'est-à-dire qu'il y a une "dérive de fréquence" (de l'ordre de 1 Hz par exemple), une différence entre l'onde de modulation et l'onde de démodulation. Alors :

$$E\{e^{-i\theta(t)}\} = e^{-i(\theta_0 + 2\pi F_g t)} \text{ n'est pas constant,} \\ \text{et,} \\ (29) \quad G_2(s) = E\{e^{-i\theta(t)} e^{+i\theta(t+s)}\} = e^{+2i\pi F_g s}.$$

La matrice \vec{A} reste constante, son terme générique $a_{\ell j}$ est :

$$(30) \quad a_{\ell j} = a_{\ell j}^0 e^{-2i\pi F_g \Delta(j+\ell)}.$$

Le vecteur \vec{R} n'est pas constant, et doit être noté \vec{R}_k :

$$(31) \quad \vec{R}_k = \vec{D}_k \vec{S}_0$$

Où \vec{D}_k est une matrice diagonale de terme générique d_{jj}^k :

$$(32) \quad d_{jj}^k = e^{-2i\pi F_g (\Delta(j+k) + t_0)} \quad (j = -L, \dots, N).$$

Finalement l'égaliseur optimal n'est pas constant au cours du temps. On doit donc essayer de le poursuivre pour obtenir un écart quadratique minimal, conformément à (27), puisque l'écart quadratique moyen minimal reste constant et égal à ϵ_0^2 . Cependant cette poursuite n'est en général pas réalisable. En effet, lorsque l'on utilise des algorithmes adaptatifs [5], les vitesses de convergence des égaliseurs sont le plus souvent des fonctions décroissantes du nombre de coefficients. Or une lutte efficace contre les interférences intersymboles

EGALISEUR DE GIGUE

n'est possible que si l'égaliseur a un nombre assez grand de coefficients, c'est-à-dire que sa ligne à retard est suffisamment longue. Dans ces conditions la vitesse d'adaptation de l'égaliseur est faible et celui-ci ne peut absolument pas poursuivre l'égaliseur optimal non stationnaire que nous venons de décrire. D'où l'impossibilité pour un égaliseur classique de poursuivre la gigue de phase et les dérives de fréquences importantes. C'est la raison pour laquelle nous allons introduire un égaliseur sous optimal.

4.- EGALISEUR SOUS OPTIMAL NON STATIONNAIRE.

Supposons que l'égaliseur considéré précédemment soit dans un certain état \vec{H} . Plaçons derrière lui un égaliseur à 1 coefficient, c'est-à-dire multiplions la sortie de l'égaliseur (\vec{H}) par un nombre complexe G (figure 4). L'idée intuitive étant la suivante : comme le second égaliseur a un coefficient unique, sa vitesse de convergence est plus grande que celle de (\vec{H}), et il est donc plus apte à poursuivre la phase du signal reçu. On a donc successivement :

$$(33) \quad y_k = \vec{H}^T \vec{x}_k \quad G y_k = G \vec{H}^T \vec{x}_k .$$

L'écart quadratique moyen à la sortie de (G), conditionnellement à la phase, s'écrit

$$(34) \quad \epsilon_k^2(\vec{H}, \theta) = E\{ |G \vec{H}^T \vec{x}_k - a_k|^2 / \theta \} .$$

Pour \vec{H} fixé, cet écart quadratique moyen est minimal pour :

$$(35) \quad G_{opt,k}(\vec{H}) = \frac{E\{ a_k^* \vec{H}^T \vec{x}_k / \theta \}}{E\{ |\vec{H}^T \vec{x}_k|^2 / \theta \}}$$

et vaut alors

$$(36) \quad \epsilon_k^2(\vec{H}, \theta) \triangleq \epsilon_k^2(G_{opt,k}(\vec{H}), \vec{H}, \theta) = a^2 (1 - \frac{1}{a^2} G_{opt,k}(\vec{H}) \cdot E(a_k^* y_k / \theta)) .$$

Bien évidemment, on a :

$$(37) \quad \epsilon_k^2(\vec{H}, \theta) \geq \epsilon_0^2 .$$

Supposons maintenant que le premier égaliseur soit dans son état optimal stationnaire, \vec{H}'_0 , dans l'hypothèse où celui-ci peut être défini (gigue de

phase de 2.,3è cas, par exemple). Alors l'écart quadratique moyen stationnaire à sa sortie est ϵ_0^2 . Nous plaçons à sa suite un égaliseur (G) supposé optimal non stationnaire pour \vec{H}'_0 fixé, c'est-à-dire $G_{opt,k}(\vec{H}'_0)$, ce qui fournit $\epsilon_k^2(\vec{H}'_0, \theta)$ en sortie.

Remarquons que :

$$(38) \quad \epsilon_0^2 = E\{\epsilon_k^2(1, \vec{H}'_0, \theta)\}$$

et que l'on a d'autre part :

$$(39) \quad \epsilon_k^2(1, \vec{H}'_0, \theta) \geq \epsilon_k^2(G_{opt,k}(\vec{H}'_0), \theta) .$$

Par conséquent :

$$(40) \quad \epsilon_k^2(\vec{H}'_0, \theta) \geq \epsilon^2(\vec{H}'_0, \theta) \geq \epsilon_0^2 .$$

Et en prenant les espérances mathématiques :

$$(41) \quad \epsilon_0^2 \geq E\{\epsilon_k^2(\vec{H}'_0, \theta)\} \geq \epsilon_0^2$$

Ce résultat exprime le fait qu'on a défini une structure (\vec{H}, G) qui fournit à sa sortie un écart quadratique moyen stationnaire intermédiaire entre celui obtenu à la sortie d'un égaliseur stationnaire classique (ϵ_0^2) et celui que fournirait l'égaliseur optimal non stationnaire (ϵ_k^2). Si l'on interprète ce résultat en distance dans l'espace euclidien \mathcal{L}^{N+L+1} , cela veut dire que pour chaque indice k, on a

$$(42) \quad \|\vec{H}'_0 - \vec{H}_{opt,k}(\theta)\| \geq \|G_{opt,k}(\vec{H}'_0) \cdot \vec{H}'_0 - \vec{H}_{opt,k}(\theta)\| .$$

Le vecteur réalisé par l'ensemble (\vec{H}, G) est donc plus proche, au cours du temps, de l'égaliseur optimal non stationnaire que l'égaliseur stationnaire.

Illustrons ce résultat par quelques valeurs numériques dans les conditions définies au 2.3è cas, mais avec une gigue de phase d'amplitude double :

$$\theta(t) = \theta_0 + \alpha \cos(2\pi Ft + \beta)$$

$$(43) \quad \alpha = \pi/12 \text{ (30° crête à crête)}$$

$$F = 50 \text{ Hz}$$

$$\text{Alors : } \epsilon_0^2 = 4,00 \cdot 10^{-2}$$

$$E\{\epsilon_k^2(\vec{H}'_0, \theta_k)\} = 6,27 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_0^2 = 6,26 \cdot 10^{-3}$$



Sur cet exemple de forte gigue de phase (30° crête à crête), puisqu'il y a environ un facteur 7 entre ϵ_0^2 et $\epsilon_0'^2$, il apparaît que l'égaliseur sous optimal défini est susceptible de fournir un écart quadratique moyen très proche de l'optimum. Résultat d'ailleurs illustré par les distances entre les différents vecteurs :

$$(44) \quad \|\vec{H}'_0 - \vec{H}'_{opt,k}(\theta)\| \simeq 1,28 \cdot 10^{-1}$$

$$\|\vec{G}_{opt,k}(\vec{H}'_0) \cdot \vec{H}'_0 - \vec{H}'_{opt,k}(\theta)\| \simeq 5,95 \cdot 10^{-5}$$

d'où la quasi optimalité du récepteur défini.

Son intérêt apparaît encore mieux dans le cas où $e^{-i\theta(t)}$ n'est pas un processus stationnaire, c'est le cas d'une dérive de fréquence, où, pour un vecteur \vec{H} fixé, $\vec{G}_{opt,k}(\vec{H}) \cdot \vec{H}$ est plus proche du vecteur optimal $\vec{H}'_{opt,k}(\theta)$.

Tout ce qui a été fait précédemment concernait les performances optimales ; examinons maintenant les algorithmes qui permettent d'approcher ces optimums.

5.- ALGORITHMES ADAPTATIFS APPROCHANT LES DIFFERENTS OPTIMUMS.

A la sortie de l'égaliseur (\vec{H}), l'écart quadratique moyen s'écrit suivant (7). On peut approcher le vecteur optimal \vec{H}'_0 par un algorithme du gradient :

$$(H1) \quad \vec{H}'_{k+1} = \vec{H}'_k - \mu_0 E\{(y_k - a_k) \vec{X}_k^*\},$$

lui-même approximé par un algorithme stochastique :

$$(H2) \quad \vec{H}'_{k+1} = \vec{H}'_k - \mu_0 (y_k - a_k) \vec{X}_k^*.$$

Cet algorithme converge pour μ_0 assez petit en un sens explicité dans [6], et cette constante peut être choisie inversement proportionnelle à la puissance des signaux reçus et au nombre de coefficients (L+N+1) de l'égaliseur [5].

C'est cet algorithme qui est utilisé dans la période d'apprentissage de l'égaliseur, c'est-à-dire lorsque l'on émet une séquence $\{a_k\}$ connue du récepteur. Ayant ainsi obtenu une première convergence, on passe ensuite en mode autoadaptatif, c'est à dire que l'on utilise dans l'algorithme (H2) la donnée \hat{a}_k estimée à partir de la sortie y_k de l'égaliseur. On diminue d'autre part la constante μ_0 (par exemple $\mu = \mu_0/10$) de manière à affiner la convergence et à approcher \vec{H}'_0 :

$$(H'2) \quad \vec{H}'_{k+1} = \vec{H}'_k - \mu (y_k - \hat{a}_k) \vec{X}_k^*.$$

On approche le coefficient optimal $G_{opt,k}(\vec{H}'_0)$ également par un algorithme du gradient, mais pour que (G) puisse suivre le processus de phase, il faut que ce gradient soit pris conditionnellement à la réalisation du processus d'erreur de phase. On pourrait prendre l'algorithme :

$$(G1) \quad G_{k+1} = G_k - \lambda E\{(G_k y_k - a_k) y_k^* / \theta\}$$

approché par l'algorithme stochastique :

$$(G2) \quad G_{k+1} = G_k - \lambda (G_k y_k - a_k) y_k^*.$$

Un algorithme meilleur est :

$$(G3) \quad G_{k+1} = G_k - \lambda (G_k y_{k+1} - a_{k+1}) y_{k+1}^*$$

car

$(G_k y_{k+1} - a_{k+1}) y_{k+1}^*$ approche le gradient déterministe

$E\{(G_k y_{k+1} - a_{k+1}) y_{k+1}^* / \theta\}$ qui contient plus d'informations sur le processus de phase $\theta(t)$ à l'instant

$t_0 + (k+1) \Delta$ que $E\{(G_k y_k - a_k) y_k^* / \theta\}$ intervenant dans

(G1). Néanmoins les deux algorithmes stochastiques

(G2) et (G3) se sont révélés satisfaisants.

Dans la phase autoadaptative, on utilise dans l'algorithme (G2) le symbole \hat{a}_k détecté à la sortie de (G) c'est-à-dire à partir de $G_k y_k$:

$$(G2') \quad G_{k+1} = G_k - \lambda (G_k y_k - \hat{a}_k) y_k^*$$

et pour l'algorithme (G3), on utilise le résultat de la détection sur $G_k y_{k+1} \cdot \hat{a}_{k+1}$

$$(G3') \quad G_{k+1} = G_k - \lambda (G_k y_{k+1} - \hat{a}_{k+1}) y_{k+1}^*$$

puis la détection finale est effectuée sur $G_{k+1} y_{k+1}$, ce qui fournit \hat{a}_{k+1} .

Il est à signaler que dans la phase autoadaptative, on peut utiliser \hat{a}_k au lieu de \hat{a}_k dans l'algorithme (H2')

6.- QUELQUES RESULTATS DE SIMULATIONS SUR ORDINATEUR.

Les simulations portaient sur un système défini comme précédemment à 9600 bits par seconde. Les mesures ont été faites sur 10000 bits (2500 itérations) pendant la phase autoadaptative. Les paramètres autres que ceux concernant l'erreur de phase $\theta(t)$ étaient les mêmes que dans 2. 3è cas ($\rho = 25$ dB) Les grandeurs de mesure sont les écarts quadratiques moyens normalisés ($a^2 = 1$) que l'on estime :

$$\text{- à la sortie de (H) : } \epsilon_H^2 = \frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{k=10000} |\vec{H}_k \vec{X}_k - a_k|^2$$

EGALISEUR DE GIGUE

- à la sortie de l'ensemble (\vec{H}, G) :

$$\epsilon_G^2 = \frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{k=10000} |G_k \vec{H}_k T_{\vec{X}} - a_k|^2.$$

On calcule également le nombre de bits erronés sur 10000 émis :

- N_H à la sortie de (\vec{H})
- N_G à la sortie de l'ensemble (\vec{H}, G) .

A- Gigue de phase sinusoïdale

$$\theta(t) = \theta_0 + \alpha \cos(2\pi Ft + \beta)$$

a) $\alpha = \frac{\pi}{24}$ (15° crête à crête), $F = 50 \text{ Hz}$

$$\epsilon_H^2 = 1,60 \cdot 10^{-2} \quad N_H = 0$$

$$\mu = 3,33 \cdot 10^{-3} \quad \lambda = 0,20$$

$$\epsilon_G^2 = 6,76 \cdot 10^{-3} \quad N_G = 0$$

b) $\alpha = \frac{\pi}{12}$ (30° crête à crête), $F = 50 \text{ Hz}$

$$\epsilon_H^2 = 4,45 \cdot 10^{-2} \quad N_H = 166$$

$$\mu = 3,33 \cdot 10^{-3} \quad \lambda = 0,20$$

$$\epsilon_G^2 = 1,76 \cdot 10^{-2} \quad N_G = 37$$

B- Derive de fréquence

$$\theta(t) = 2\pi F_g t + \theta_0$$

a) $F_g = 0,5 \text{ Hz}$ $\epsilon_H^2 = 1,79$ $N_H = 4161$

$$\mu = 3,33 \cdot 10^{-3} \quad \lambda = 0,20 \quad \epsilon_G^2 = 1,73 \cdot 10^{-2} \quad N_G = 22$$

b) $F_g = 1 \text{ Hz}$ $\epsilon_H^2 = 1,78$ $N_H = 4017$

$$\mu = 3,33 \cdot 10^{-3} \quad \lambda = 0,20 \quad \epsilon_G^2 = 1,53 \cdot 10^{-2} \quad N_G = 19$$

c) $F_g = 0,5 \text{ Hz}$ $\epsilon_H^2 = 2,17$ $N_H = 4259$

$$\mu = 0 \text{ (}\vec{H} \text{ fixé dans la phase autoadaptative)}$$

$$\lambda = 0,20 \quad \epsilon_G^2 = 0,72 \cdot 10^{-2} \quad N_G = 0$$

d) $F_g = 1 \text{ Hz}$ $\epsilon_H^2 = 1,94$ $N_H = 4002$

$$\mu = 0 \text{ (}\vec{H} \text{ fixé dans la phase autoadaptative)}$$

$$\lambda = 0,20 \quad \epsilon_G^2 = 1,21 \cdot 10^{-2} \quad N_G = 5$$

C- Derive de fréquence et gigue de phase

$$\theta(t) = \alpha \cos(2\pi Ft + \beta) + 2\pi F_g t$$

$$F_g = 1 \text{ Hz}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{24} \text{ (15° crête à crête)} \quad \epsilon_H^2 = 1,79 \quad N_H = 4013$$

$$F = 50 \text{ Hz}$$

$$\mu = 3,33 \cdot 10^{-3} \quad \lambda = 0,20 \quad \epsilon_G^2 = 1,70 \cdot 10^{-2} \quad N_G = 27$$

Ces quelques exemples mettent en évidence les possibilités du système autoadaptatif décrit.

7. CONCLUSION

La nécessité d'approcher l'égaliseur optimal non stationnaire a été mise en évidence. Un égaliseur sous optimal réalisable itérativement a été défini et ses performances présentées sur quelques exemples de simulations sur ordinateur. Le principe du récepteur est d'utiliser deux égaliseurs ; le premier long, lent, stationnaire, chargé essentiellement d'éliminer les interférences entre symboles ; le second court, rapide, et non stationnaire, assurant l'élimination d'une erreur de phase indésirée ou de tout bruit multiplicatif sur le signal d'entrée du récepteur. Le concept développé pour la MAQ se généralise bien entendu à d'autres types de modulation (BLU, ou BLR par exemple), ainsi qu'à d'autres structures de récepteurs, tels les égaliseurs en bande passante (égalisation avant la démodulation). Son faible coût le rend de plus tout à fait apte à des réalisations industrielles rentables.

Bibliographie :

1. R.W.Lucky, "Automatic Equalization for Digital Communication", BSTJ, 44, 547 (1965)
2. O.Macchi, C.Macchi et J.P.Jouannaud, "Récepteurs adaptatifs pour transmissions de données à grande vitesse", Ann. des Télécom. Sept.-Octobre 1975.
3. D.D.Falconer, "Analysis of a gradient algorithm for simultaneous pass-band equalization and carrier phase recovery", BSTJ, 55, n°4, Avril 1976.
4. M.Levy -Thèse de Docteur-Ingénieur (à soutenir)
5. G.Ungerboeck, "Theory of the speed of convergence in adaptive equalizers for digital communication", IBM Research and Development, Nov. 72.
6. O.Macchi, "Estimation linéaire adaptative- Application aux transmissions de données" GRETSI, Nice, Avril 1977.



EGALISEUR DE GIGUE

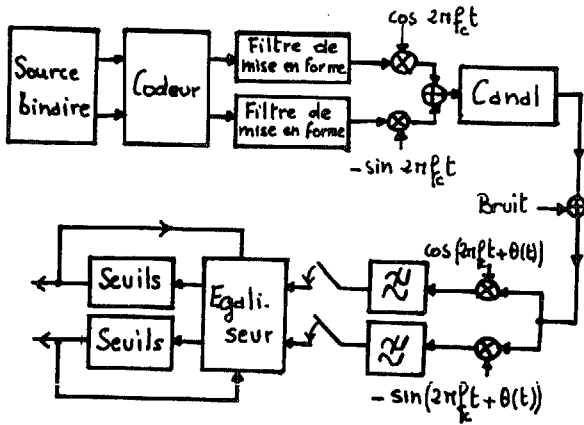


Figure 1 Système de transmission MAQ avec égaliseur en bande de base

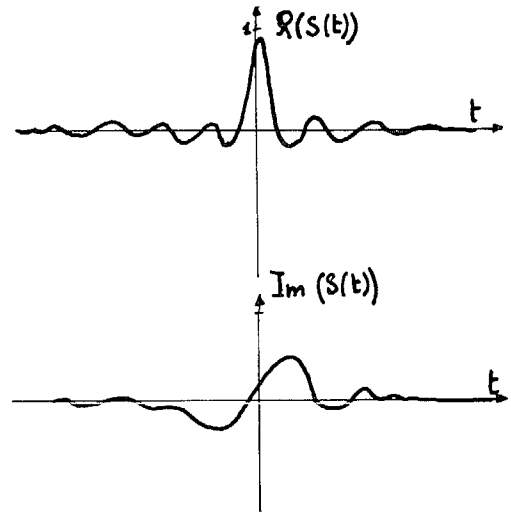


Figure 3 Exemple de réponse impulsionnelle S(t)

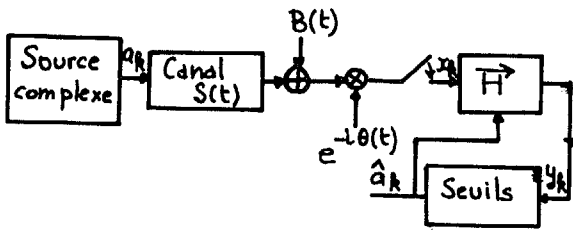


Figure 2 Equivalent complexe en bande de base

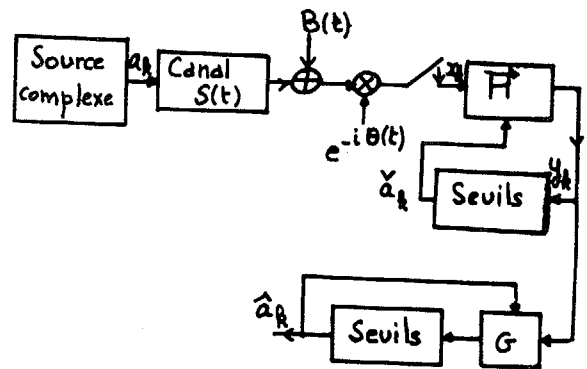


Figure 4 Nouvelle structure de récepteur.