

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

BOUCLE DE PHASE NUMERIQUE ADAPTATIVE

Jean-Marc BOUCHER

Boursier au CENTRE NATIONAL D'ETUDES SPATIALES - CENTRE SPATIAL DE TOULOUSE - 31055 TOULOUSE CEDEX

RESUME

Le signal, envoyé d'une balise vers un satellite dans le système de localisation et de collecte de données ARGOS, se trouve émis en porteuse pure dans un premier temps, puis est modulé en phase dans un second temps.

Pour effectuer l'acquisition en fréquence et en phase de ce signal, on envisage l'utilisation d'un algorithme discret d'estimation non linéaire s'appliquant au signal non modulé bruité.

On indique les simplifications à faire, par rapport au cas optimal, en vue d'une réalisation avec les technologies numériques actuelles.

On montre que le comportement de cet algorithme correspond, lorsque l'erreur de phase est faible, à celui qu'aurait une boucle de phase numérisée permettant la démodulation du signal.

On indique les difficultés particulières de réalisation (troncatures).

SUMMARY

The signal sent from a beacon to the satellite in the data collection and localization system ARGOS is in a first time a non-modulated carrier, then a phase modulated signal.

To achieve the frequency and phase acquisition of this signal, we propose the use of a discrete non-linear estimation algorithm.

We give the simplifications to be done to come to a realization with present numerical technics.

When it works in the linear domain, this algorithm acts like a digital phase locked loop and performs a phase demodulation of the signal.

We note some practical difficulties as troncatures.



I - EXPOSE DU PROBLEME

Une balise émet vers un satellite un signal qui, dans un premier temps, est une porteuse pure dont la fréquence peut se trouver dans la plage $(f_0 - \Delta f_n, f_0 + \Delta f_n)$.

Dans un second temps, la porteuse est modulée en phase par le message binaire à transmettre. On se propose de construire un récepteur numérique capable d'effectuer l'acquisition de la porteuse, de mesurer avec une précision définie la fréquence f et d'assurer la démodulation du message.

Pour ce faire, on décide d'utiliser un algorithme discret d'estimation non linéaire et de le simplifier afin de pouvoir envisager une réalisation avec les technologies actuelles.

II - ACQUISITION DE FREQUENCE ET EN PHASE

II.1. - Modélisation du signal

On définit un modèle d'état permettant d'estimer la fréquence f et la phase initiale φ . Le signal se présente sous la forme :

$$z(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \varphi) + n(t)$$

où $n(t)$ est un bruit blanc gaussien de covariance $\frac{N_0}{2} \delta(t)$. L'amplitude a peut varier dans une certaine dynamique, mais on se place, pour la modélisation, dans le cas où a correspond à un rapport signal sur densité de bruit minimal et on considère a constante. La fréquence f se trouve dans l'intervalle $(f_0 - \Delta f_n, f_0 + \Delta f_n)$.

$z(t)$ peut être vu comme un signal à bande limitée de largeur $2 \cdot \Delta f_n$ centrée autour de f_0 . On désire échantillonner $z(t)$ avec une fréquence f_e bien inférieure à la fréquence porteuse f .

Le choix de la fréquence f_e doit se faire dans un intervalle permis par le théorème d'échantillonnage, soit : $(\frac{2}{h+1} (f_0 + \Delta f_n), \frac{2}{h} (f_0 - \Delta f_n))$ h est un entier.

On prend f_0 au centre de cet intervalle. En posant $\frac{\Delta f_n}{f_0} = a'$, on obtient :

$$\frac{f_0}{f_e} = \frac{h(h+1)}{2h+1-a'}$$

Ce rapport peut être décomposé en la somme d'

une partie entière m et d'une partie fractionnaire α ($0 \leq \alpha < 1$)

Le signal échantillonné s'écrit alors :

$$z_k = a \cdot \sin(2\pi f t_k + \varphi) + n_k$$

avec : $t_k = k \cdot T_e$ où $T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{m+\alpha}{f_0}$

$$2\pi f t_k = k \cdot \frac{f-f_0}{f_0} \cdot 2\pi(m+\alpha) + k \cdot 2\pi(m+\alpha)$$

Posons :

$$f - f_0 = \Delta f = 2\pi \Delta f$$

$$\Delta \varphi = 2\pi \frac{\Delta f}{f_0}$$

Alors :

$$2\pi f t_k = k \cdot \Delta \varphi + k \cdot 2\pi \alpha + k \cdot 2\pi m$$

Par suite :

$$z_k = a \cdot \sin(k \Delta \varphi + k \cdot 2\pi \alpha + \varphi) + n_k$$

Les variables d'état choisies sont la phase totale x_{1k} et la variation de phase x_{2k} égale à $2\pi \alpha + \Delta \varphi$.

$$x_{1k} = k (\Delta \varphi + 2\pi \alpha) + \varphi$$

$$x_{2k} = \Delta \varphi + 2\pi \alpha$$

D'où :

$$x_{1k} = x_{1k-1} + x_{2k-1}$$

$$x_{2k} = x_{2k-1}$$

z_k s'écrit alors :

$$z_k = a \cdot \sin x_{1k} + n_k \quad E(n_k n_{k'}) = \frac{N_0}{2} \delta_{kk'} = \sigma^2 \delta_{kk'}$$

II.2. - Choix de l'algorithme

On a appliqué successivement l'algorithme discret du maximum a posteriori et celui de Kalman étendu discret à ce modèle. Leurs expressions diffèrent en fait très peu. (références 1,2,3).

On utilise les notations suivantes :

$\hat{x}_{1k|k}, \hat{x}_{2k|k}$ estimées a posteriori de x_1 et x_2 à l'instant t_k connaissant la valeur z_k
 $\hat{x}_{1k|k-1}, \hat{x}_{2k|k-1}$ estimées a priori de x_1 et x_2 à l'instant t_k connaissant la valeur z_{k-1} .

$V_{11k|k}, V_{12k|k}, V_{22k|k}$ variance de l'erreur d'estimation respectivement sur $\hat{x}_{1k|k}, \hat{x}_{2k|k}, \hat{x}_{2k|k}$

$V_{11k|k-1}, V_{12k|k-1}, V_{22k|k-1}$ variance de l'erreur d'estimation respectivement sur $\hat{x}_{1k|k-1}, \hat{x}_{2k|k-1}, \hat{x}_{2k|k-1}$.

Les équations suivantes se déduisent de l'emploi des algorithmes :

- Filtrage



$$\hat{x}_{1KIK} = \hat{x}_{1KIK-1} + V_{11KIK} \frac{a}{\sigma^2} \cos \hat{x}_{1KIK-1} (z_K - a \sin \hat{x}_{1KIK-1})$$

$$\hat{x}_{2KIK} = \hat{x}_{2KIK-1} + V_{22KIK} \frac{a}{\sigma^2} \cos \hat{x}_{2KIK-1} (z_K - a \sin \hat{x}_{2KIK-1})$$

- Prédiction à un pas

$$\hat{x}_{1KIK-1} = \hat{x}_{1K-1IK-1} + \hat{x}_{2K-1IK-1}$$

$$\hat{x}_{2KIK-1} = \hat{x}_{2K-1IK-1}$$

- Variances a priori

$$V_{11KIK-1} = V_{11K-1IK-1} + 2V_{12K-1IK-1} + V_{22K-1IK-1}$$

$$V_{12KIK-1} = V_{12K-1IK-1} + V_{22K-1IK-1}$$

$$V_{22KIK-1} = V_{22K-1IK-1}$$

- Variances a posteriori

$$V_{11KIK} = V_{11KIK-1} - V_{11KIK-1}^2 \cdot \beta$$

$$V_{12KIK} = V_{12KIK-1} - V_{11KIK-1} \cdot V_{22KIK-1} \cdot \beta$$

$$V_{22KIK} = V_{22KIK-1} - V_{22KIK-1}^2 \cdot \beta$$

avec :

$$\beta = \frac{A}{A + V_{11KIK-1} + \sigma^2}$$

• Algorithme du maximum a posteriori :

$$A = a \cdot \sin(\hat{x}_{1KIK-1}) \cdot z_K + 2a^2 \cos(\hat{x}_{1KIK-1})$$

• Algorithme de Kalman étendu :

$$A = a^2 \cdot \cos^2(\hat{x}_{1KIK-1})$$

On s'est orienté vers le choix de l'algorithme de Kalman étendu, résultant du critère d'écart quadratique moyen, pour deux raisons visant à simplifier la réalisation :

- sa simplicité de calcul puisqu'il ne fait intervenir que $\cos(\hat{x}_{1KIK-1})$ dans A et que z_K n'apparaît pas dans cette expression,
- sa plus forte tolérance envers les inexactitudes du modèle : en effet celui-ci n'incorpore pas la légère variation de fréquence qu'introduit l'effet Doppler (dû au mouvement du satellite), ni la différence qui peut exister entre l'amplitude réelle du signal et l'amplitude nominale constante a .

Une modification du modèle prenant en compte ces perturbations aurait conduit à une dimension d'ordre 4 pour les estimées et à une trop grande difficulté pour la réalisation pratique.

II.3. - Simplifications supplémentaires

Même en utilisant l'algorithme le plus simple, on constate qu'il sera impossible de concevoir un système fonctionnant en temps réel à cause du nombre important d'opérations à faire séquentiellement et de la rapidité limitée des microprocesseurs existant.

On envisage donc deux simplifications supplémentaires :

• remplacer $\cos^2(\hat{x}_{1KIK-1})$ par $\frac{1}{2}$: ceci revient à négliger l'intervention des termes en $2\hat{x}_{1KIK-1}$ dans le calcul de V_{11}, V_{12}, V_{22} . Les courbes 1, 2, 3 montrent l'effet qu'à cette simplification respectivement sur V_{11}, V_{12}, V_{22} . On remplace l'évolution en dent de scie par une variation moyenne. *(Ceci même les courbes 4 et 5 montrent l'évolution de σ_2 .)*

La réalisation s'en trouve allégée puisque les coefficients ne dépendent plus que des conditions initiales et possèdent leur propre loi de récurrence. Ils peuvent être placés dans une mémoire morte que l'on adressera en séquence pendant l'estimation. On obtient un algorithme sans couplage.

• remplacer le produit $\cos(\hat{x}_{1KIK-1})(z_K - a \sin(\hat{x}_{1KIK-1}))$ par $z_K \cdot \cos(\hat{x}_{1KIK-1})$. Ceci est justifié en régime établi par l'élimination du terme en $2\hat{x}_{1KIK-1}$ dû au filtrage numérique passe bas que réalise l'algorithme. Mais pendant l'acquisition, on modifie le comportement de ce dernier, ainsi qu'on le montre ci-dessous. L'algorithme est alors simplifié, sans couplage.

II.4. - Phénomènes dus aux simplifications

On définit un plan d'acquisition ayant pour abscisse φ et pour ordonnée $\Delta \varphi$. Dans ce plan, l'acquisition de phase peut s'effectuer sans saut de cycle, (l'erreur de phase $(x_{1K} - \hat{x}_{1KIK-1})$ tend vers zéro) ou avec un ou plusieurs sauts de cycle (l'erreur de phase tend alors vers $h \cdot 2\pi$). On appelle zones I et II respectivement les régions du plan où l'un ou l'autre de ces modes d'acquisition se produit. La figure 6 montre l'influence des diverses simplifications sur la frontière séparant les deux zones I et II. Cette frontière, par ailleurs, dans le cas simplifié, possède une largeur ($4/10$ de degré) dans laquelle il est impossible d'acquérir ; ceci détériore la probabilité d'acquisition.

II.5. - Choix des valeurs initiales

Les valeurs suivantes ont été choisies pour les estimées $\hat{x}_2 = 2\pi\alpha$, centre de l'intervalle dans lequel s'effectue l'estimation et $\hat{x}_1 = 0$.

Un changement de valeur initiale pour \hat{x}_1 entraîne une translation du plan d'acquisition suivant l'axe des abscisses de la même quantité. Pour améliorer la probabilité d'acquisition dans le cas simplifié en restreignant la plage de phase à acquérir à π et en s'éloignant de la zone frontière, on peut initialiser \hat{x}_1 à $\pm \frac{\pi}{2}$ avec le même signe que

.../...



BOUCLE DE PHASE NUMERIQUE ADAPTATIVE

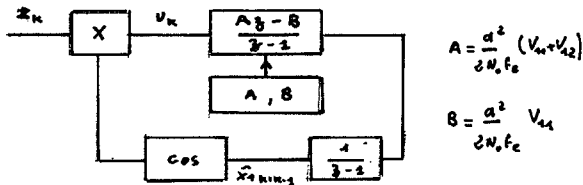
le premier échantillon x_1 bruité. Ceci se justifie pour un rapport signal à bruit élevé (10 dB par exemple).

Les valeurs initiales V_{s1}, V_{s2}, V_{s3} ont été choisies en cherchant à obtenir la surface de plan d'acquisition la plus importante possible sans saut de cycle (zone I) afin de réduire au minimum le nombre de zones frontalières où l'acquisition se fait mal.

Ces valeurs varient proportionnellement au rapport $\frac{d^2}{3 N_0 f_c}$. De nombreuses simulations ont permis d'approcher les coefficients optimaux : lorsque $\frac{d^2}{3 N_0 f_c}$ vaut 6 dB on choisit $V_{s1} = 0.35$, $V_{s2} = 0$, $V_{s3} = 0.06$.

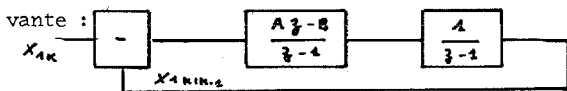
III - FONCTIONNEMENT EN BOUCLE NUMERIQUE

Pendant la phase d'acquisition on peut donner le schéma suivant pour l'algorithme, simplifié sans couplage, rappelant celui d'une boucle de phase classique.



Lorsque V_{s1} et V_{s2} atteignent les valeurs que l'on souhaite pour effectuer la démodulation (en fonction notamment de spécifications sur les fluctuations de phase admissibles dues au bruit additif et sur l'écart statique de phase maximum dû à l'effet Doppler), on bloque ces coefficients, de telle sorte que l'on fonctionne ensuite en boucle de phase numérique dans le domaine linéaire.

La boucle se modélise alors de la manière suivante :



Une rampe de fréquence de pente R induit un écart statique de phase égal à $\frac{\pi R T_e N_0}{d^2 V_{s2}}$

Les fluctuations de phase dues au bruit sont calculées de manière approchée par : $\sigma^2 = \frac{V_{s1}}{4}$

La démodulation nécessite l'utilisation d'un filtre passe bas numérique afin d'atténuer le terme

$\sin(x_k + \hat{x}_{k|k-1})$ résultant du produit x_k par $\cos(\hat{x}_{k|k-1})$ on choisit le filtre le plus simple à réaliser, de fonction de transfert $\frac{1}{z} (\frac{z+1}{z})$ (une addition et un décalage à droite). On peut placer ce filtre hors de la boucle pour traiter le produit $x_k \cdot \cos(\hat{x}_{k|k-1})$ ou dans la boucle sans perturber la stabilité de celle-ci et en conservant des performances équivalentes pour l'écart statique de phase et les fluctuations de phase ($\sigma^2 \approx \frac{2}{z} V_{s1}$).

IV - INFLUENCE DES TRONCATURES

Les calculs s'effectuent avec un nombre de bits limités. La précision que l'on souhaite pour \hat{x}_k et \hat{x}_2 va donc s'en trouver affectée.

Les troncatures sur les estimées engendrent une erreur systématique de phase; en l'ajoutant à l'erreur statique due à la rampe Doppler, il est nécessaire que la boucle ne revienne pas dans le domaine non linéaire: l'erreur totale sur \hat{x}_k devra donc rester inférieure à 0,3 radian. En virgule fixe, 12 bits de précision créent déjà un écart de 0,4 radian.

Les troncatures sur les coefficients V_{s1}, V_{s2} ont une influence moindre; tout se passe comme si l'acquisition se faisait par commutation, la loi donnant les temps de commutation étant imposée par l'évolution de V_{s1}, V_{s2} , ainsi que par le degré de troncature. La figure 7 montre ce phénomène.

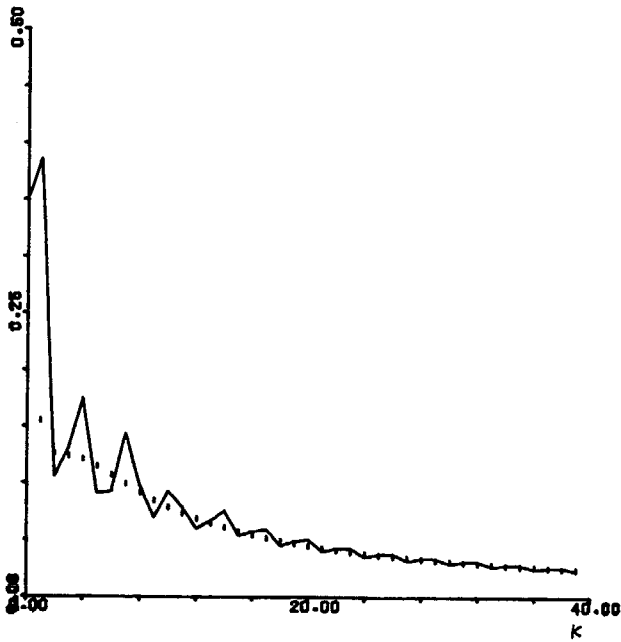
V - CONCLUSION

On a choisi de réaliser une boucle de phase en profitant des possibilités qu'offrent les techniques numériques pour faire varier les paramètres de la boucle pendant l'acquisition suivant une loi découplant d'un critère d'optimalité. Il a été nécessaire de procéder à diverses simplifications en vue de faciliter une réalisation par microprocesseur.

BIBLIOGRAPHIE

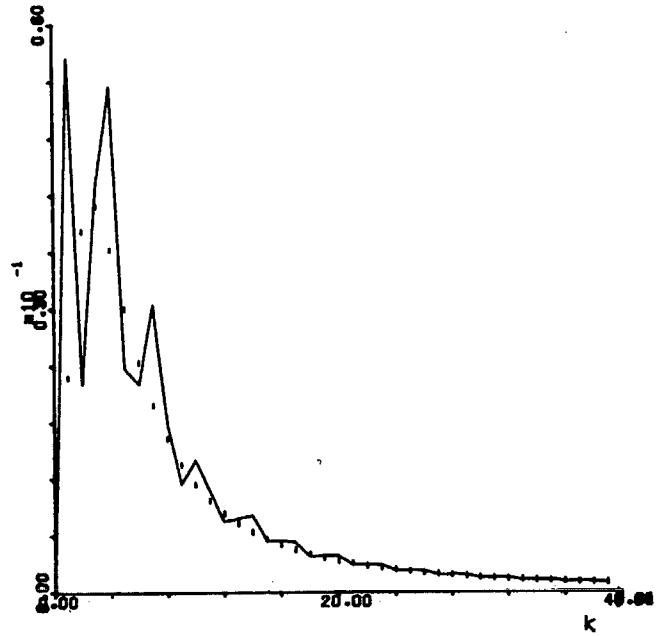
- 1 - SAGE-MELSA - Estimation theory with applications to communications and control. MCGRAW HILL
- 2 - ALENGRIN - Thèse de doctorat d'état à l'Université Paul Sabatier de TOULOUSE - Théorie du filtrage non linéaire et ses applications.
- 3 - POLK-GUPTA - Quasi optimum digital phase locked loop - IEEE Trans. Comm. Technology - VOL. COM 21 - P. 75 à 82 - January 1973.

BOUCLE DE PHASE NUMERIQUE ADAPTATIVE



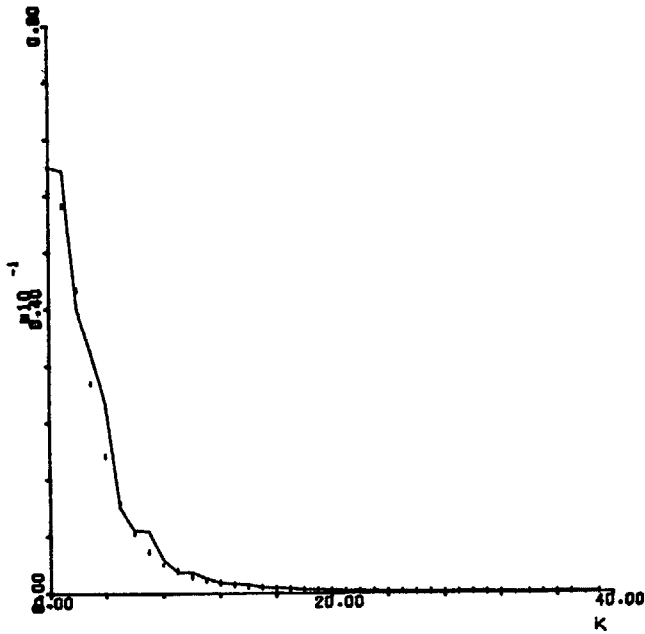
- Figure 1 -

Variance V_{11}
 . en continu : algorithme non simplifié
 . en pointillé : algorithme simplifié sans couplage
 Valeur initiale : 0.35
 Rapport : $\frac{a^2}{2N_0 f_c} = 4$



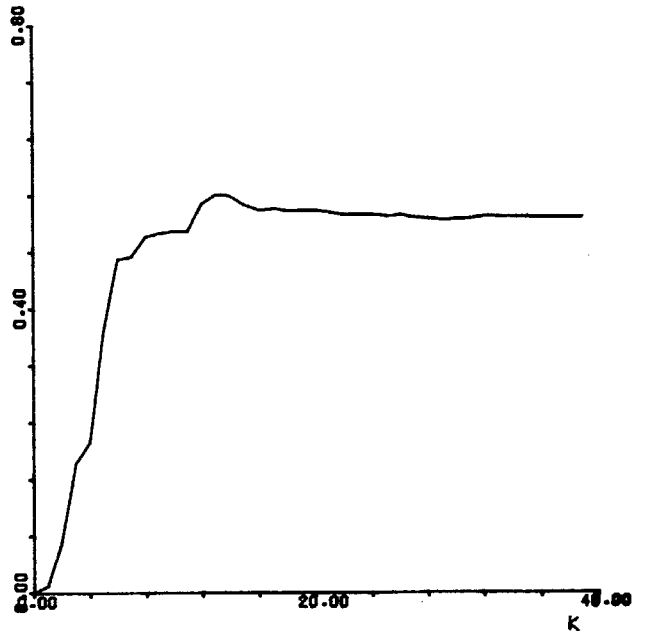
- Figure 3 -

Variance V_{12}
 . en continu : algorithme non simplifié
 . en pointillé : algorithme simplifié sans couplage
 Valeur initiale : 0
 Rapport : $\frac{a^2}{2N_0 f_c} = 4$



- Figure 2 -

Variance V_{22}
 . en continu : algorithme non simplifié
 . en pointillé : algorithme simplifié sans couplage
 Valeur initiale : 0.06
 Rapport : $\frac{a^2}{2N_0 f_c} = 4$

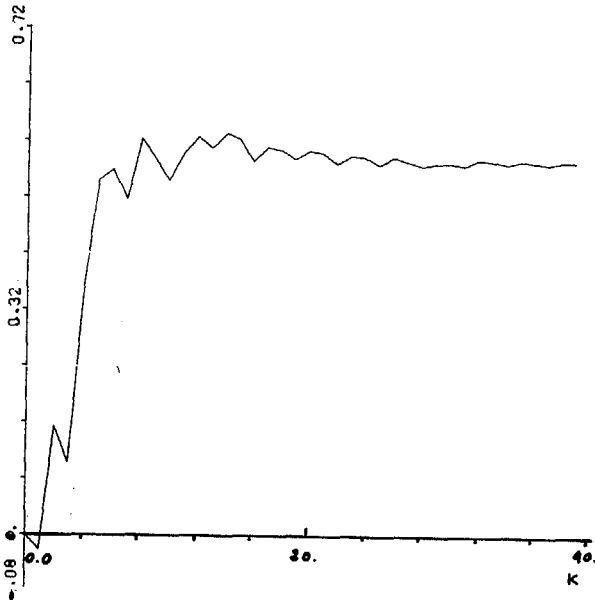


- Figure 4 -

Estimée \hat{x}_2
 . algorithme non simplifié
 Valeur : $\Delta \varphi = 0.51 \text{ rad.}$

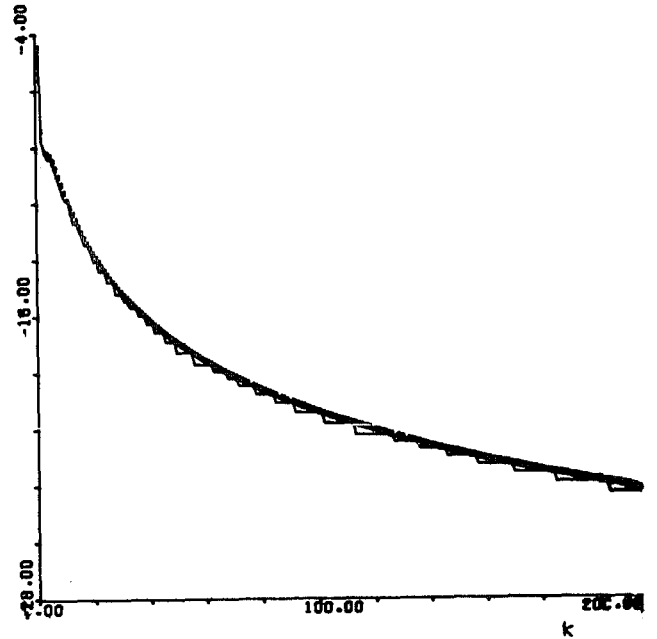


BOUCLE DE PHASE NUMERIQUE ADAPTATIVE



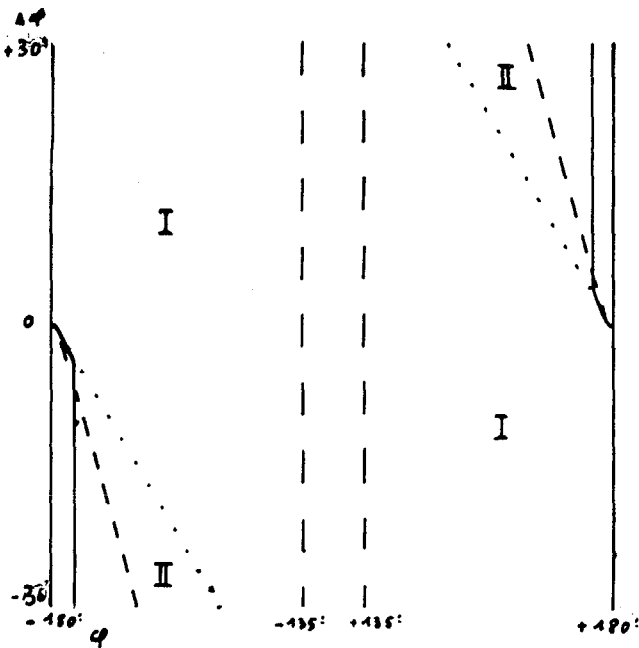
- Figure 5 -

Estimée \hat{x}_2
 . algorithme simplifié sans couplage
 Valeur $\Delta\varphi = 0.51 \text{ rad}$



- Figure 7 -

$10 \log V_{11}$ tronqué avec une mantisse de 4 bits en flottant



- Figure 6 -

Déplacement de la frontière entre les zones I et II
 . continu : algorithme non simplifié (produit : $\cos(\hat{x}_{1k|k-1}) \cdot (z_k - d \cdot \sin(\hat{x}_{1k|k-1}))$)
 . traits interrompus : algorithme simplifié sans couplage (produit $z_k \cdot \cos(\hat{x}_{1k|k-1})$)
 . pointillés : algorithme où l'on a supprimé tous les termes d'ordre 2 (Il ne reste que $\sin(x_{1k} - \hat{x}_{1k|k-1})$)