COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

REPRESENTATIONS MACROSCOPIQUES : MODELES ALEATOIRES ET MODELES DETERMINISTES REPRODUCTIBILITE MACROSCOPIQUE - ERGODISME ET STATIONNARITE

A. BLANC-LAPIERRE

Université de Paris-Sud - Ecole Supérieure d'Electricité
[Laboratoire des Signaux et Systèmes (C.N.R.S.-E.S.E.)]

RESUME

Dans les représentations macroscopiques, la présence de phénomènes microscopiques sous-jacents est prise en compte par l'introduction de termes de fluctuations. Leurs propriétés peuvent être traduites dans des modèles aléatoires [dans lesquels les grandeurs sont représentées par des fonctions aléatoires $X(t,\omega)$] ou dans des modèles déterministes (dans lesquels l'existence des phénomènes de fluctuations conduira à utiliser des fonctions certaines ayant des propriétés assez complexes). Un certain nombre de remarques sont faites sur cette double possibilité et des résultats sont donnés à son sujet.

L'idée de reproductibilité macroscopique est liée à l'indépendance des moyennes temporelles par rapport à l'expérience choisie dans un ensemble d'expériences "macroscopiquement identiques". C'est le sens physique attaché à la notion d'ergodisme. Cette notion est analysée et des résultats établis à son sujet. On précise, en particulier, ses liens -et leurs limites- avec la stationnarité au sens des fonctions aléatoires. On étudie, notamment, les relations entre fonctions aléatoires stationnaires et fonctions certaines admettant des répartitions asymptotiques.

SUMMARY

In macroscopic representations, the presence of underlying microscopic phenomena is expressed by the introduction of random sources. In these representations, one can work either on random models (using random functions) or on deterministic models (in which the existence of fluctuation phenomena will result in using deterministic functions with rather complex properties). A number of remarks are made on this double possibility and results about it are noted.

The idea of macroscopic reproductibility is related to the independence of time averages from the experiment drawn from a set of "macroscopically identical" experiments. This is the physical meaning pertaining to the notion of ergodicity. This notion is analyzed and results about it are noted. Its links -and their limits- with stationarity in the sense of random functions are precised. In particular, the connexions between stationary random functions and non-random functions admitting asymptotic distributions are studied.

REPRESENTATIONS MACROSCOPIQUES :
MODELES ALEATOIRES ET MODELES DETERMINISTES
REPRODUCTIBILITE MACROSCOPIQUE - ERGODISME ET STATIONNARITE

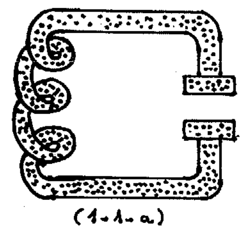
1 - INTRODUCTION PHYSIQUE

1-1. Grandeurs et systèmes physiques - Description microscopique et représentations macroscopiques.

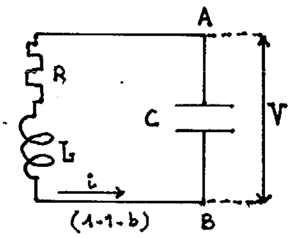
Un kilogramme-masse d'un métal bien spécifié, un litre d'un gaz particulier, le rayonnement électromagnétique dans une enceinte, un mélange de gaz, un circuit oscillant, un appareillage complexe d'électronique, d'électromécanique, de fluidique,... constituent des SYSTEMES PHYSIQUES dans la mesure où leur désignation précise la manière dont ils sont constitués physiquement. Les GRANDEURS intéressant un système physique définissent son ETAT et les INTERACTIONS qu'il a avec d'autres systèmes...

La DESCRIPTION MICROSCOPIQUE d'un système physique implique la connaissance des propriétés de ses constituants à l'échelle moléculaire ou atomique. Dans les problèmes courants, on se contente de REPRESENTATIONS MACROSCOPIQUES donnant, de ce système, une description "à notre échelle" présentant un caractère partiel, fonction du problème étudié. Exemples : description mécanique, thermique, électrique...

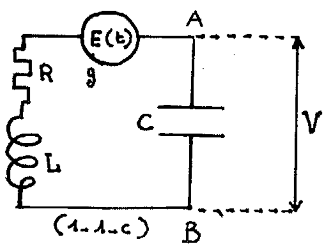
Prenons, pour fixer les idées, le cas d'un circuit oscillant. Dans sa réalité microscopique, il faut faire intervenir, comme le suggère la figure (1-1-a), les ions et les électrons du métal... Pour certaines représentations macroscopiques électriques, on pourra utiliser le schéma (1-1-b) qui ne constitue qu'une représentation partielle de la réalité physique, et même électrique. C'est à ce niveau que s'introduisent les notions de résistance, de self, de capacité... Si l'on veut prendre en compte les effets macroscopiques de l'agitation thermique, on utilisera la représentation macroscopique (1-1-c), qui comporte un générateur fictif g de résistance interne nulle et de force électromotrice E(t) convenable pour une description correcte de l'effet, à la température Θ, des fluctuations sur le circuit (1-1-b).



(1-1-a)



(1-1-b) B



(1-1-c) B

1-2. Les fluctuations - Caractéristiques - Mesures

Soit un système physique S que, macroscopiquement, nous supposerons invariant au cours du temps : par exemple, S_1 de description microscopique conforme à (1-1-a). Intéressons nous aux fluctuations de potentiel $V_1 = V_{1,A} - V_{1,B}$ que nous étudions sur (1-1-c) en ayant spécifié la température Θ dont dépend g.

L'enregistrement de $V_1(t)$ correspondant à un circuit oscillant S_1 donné, présente des caractères d'irrégularité et de permanence compatibles avec la définition des moyennes temporelles telles que, par exemple :

$$\overline{V_1} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T V_1(t)\,dt\ [=0],\quad \overline{V_1^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T V_1^2(t)\,dt \qquad (1\text{-}1)$$

$$C_{V_1}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T V_1(t)V_1(t-\tau)\,dt \qquad (1\text{-}2)$$

Un autre caractère des fluctuations réside dans leur irreproductibilité fondamentale :

- irreproductibilité quand on passe de $V_1(t)$ à $V_2(t)$, $V_3(t),\dots,$ correspondant respectivement à des systèmes $S_1, S_2, S_3,\dots$ "macroscopiquement identiques",
- irreproductibilité au cours du temps pour chaque système S_j.

Cette irreproductibilité est limitée par une double nécessité :

- assurer, pour chaque S_j, l'existence des moyennes temporelles telles que $\overline{V_j}$, $\overline{V_j^2}$, $C_{V_j}(\tau)$ qui constituent des grandeurs macroscopiques attachées à $V_j(t)$,
- assurer l'indépendance de ces grandeurs macroscopiques par rapport au système S_j choisi, c'est-à-dire permettre d'écrire, $\forall\ j$:

$$\overline{V_j} = \overline{V},\ \overline{V_j^2} = \overline{V^2},\ C_{V_j}(\tau) = C_V(\tau),\ \dots \qquad (1\text{-}3)$$

Cette indépendance traduit la REPRODUCTIBILITE MACROSCOPIQUE. C'est à elle que s'attache la notion d'ERGODISME.

2 - MODELES ALEATOIRES ET MODELES DETERMINISTES

2-1. Modèles aléatoires. On représente les grandeurs du type $V_j(t)$ par des FONCTIONS ALEATOIRES [F.A.] :

$$X(t,\omega) \qquad \omega \in \Omega \qquad (2\text{-}1)$$

La notion d'épreuve ω découle de celle de choix dans un ensemble de dispositifs macroscopiquement identiques. A côté des MOYENNES TEMPORELLES

$$\overline{X(\omega)} = \lim_{T\to\infty} \overline{X[T,\omega]} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t,\omega)\,dt \qquad (2\text{-}2)$$

REPRESENTATIONS MACROSCOPIQUES :
MODELES ALEATOIRES ET MODELES DETERMINISTES
REPRODUCTIBILITE MACROSCOPIQUE - ERGODISME ET STATIONNARITE

qui a priori, sont aléatoires, on introduit les ESPERANCES MATHEMATIQUES telles que $E\{X(t,\omega)\}$, $E\{X(t,\omega)X(t-\tau,\omega)\}$ qui, elles, ont des valeurs certaines. $X(t,\omega)$ est dite stationnaire si sa loi temporelle est invariante par translation dans le temps. Il en est alors de même des espérances mathématiques liées à $X(t,\omega)$ [stationnarité au sens strict, stationnarité de second ordre,... etc...] . La stationnarité n'est pas nécessaire pour assurer l'ergodisme. Des caractères de permanence beaucoup plus larges suffisent.

2-2. Modèles déterministes. Comme l'expérimentateur, on ne travaille que sur une épreuve. Tout caractère probabiliste a alors disparu et on ne manie que des fonctions certaines. Notons que les fonctions certaines $X(t)$, $Y(t)$,..., aptes à représenter une grandeur fluctuante associée à un phénomène permanent, présentent des propriétés particulières d'un type assez subtil imposées par l'irreproductibilité au cours du temps : elles ne peuvent, par exemple, être ni analytiques, ni périodiques, ni quasipériodiques... Elles doivent, aussi, assurer l'existence des moyennes temporelles, ce qui implique, pour elles, la nécessité d'admettre des REPARTITIONS ASYMPTOTIQUES (cf. § 4).

3 - MODELES ALEATOIRES ET ERGODISME

Nous rassemblons ici les résultats essentiels relatifs à l'ergodisme dans les modèles aléatoires Nous considérons d'abord le cas des modèles stationnaires, montrant ensuite que l'ergodisme n'implique pas la stationnarité.

3-1. Modèles stationnaires.

3-1-1. Stationnarité d'ordre deux.(On ne fait intervenir que des propriétés du second ordre au plus).

a) Hypothèses et notations. $X(t,\omega)$: f.a. réelle, centrée, mesurable, continue en m.q., stationnaire de second ordre [(1)(2)]. $C_X(\tau)$ et $F_X(\nu)$: fonctions de corrélation et de répartition spectrale de X.

$$\overline{X[T,\omega]} = \frac{1}{T}\int_0^T X(\theta,\omega)\,d\theta \qquad (3\text{-}1)$$

On rappelle les résultats suivants :

$$E\left\{\overline{[X(T,\omega)]}^2\right\} = \frac{2}{T}\int_0^T \left[1-\frac{s}{T}\right] C_X(s)\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\pi\nu T}{\pi^2\nu^2 T^2}\,dF_X(\nu) = 2\,\overset{\Rightarrow}{C}_X(T) \qquad (3\text{-}2)$$

avec

$$\vec{C}_X(T) = \frac{1}{T}\int_0^T C_X(\theta)\,d\theta \quad \text{et} \quad \overset{\Rightarrow}{C}_X(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{s}{T}\,\vec{C}_X(s)\,ds \qquad (3\text{-}3)$$

- Analyse harmonique de $X(t,\omega)$:

$$X(t,\omega) = \underset{m.q.}{\int_{-\infty}^{+\infty}} e^{2\pi i\nu t}\,dx(\nu,\omega) \qquad (3\text{-}4)$$

$$E\left\{|dx(\nu,\omega)|^2\right\} = dF_X(\nu) \qquad (3\text{-}5)$$

les $dx(\nu,\omega)$ étant orthogonaux. (3-6)

b) Loi des grands nombres. Pour $T\to\infty$, $\overline{X(T,\omega)}$ tend en m.q. vers une limite qui n'est autre que la filtrée de $X(t,\omega)$ dans le filtre $\mathfrak{F}_0$ de gain nul pour $\nu\neq 0$ et égal à 1 pour $\nu = 0$.

$$\lim_{T\to\infty} \text{m.q. } \overline{X[T,\omega]} = \overline{X(\omega)} = \mathfrak{F}_0\{X(t,\omega)\} = dx(0,\omega) \qquad (3\text{-}7)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{X(\omega)}$ soit presque sûrement (p.s.) égal à zéro est que l'on ait :

$$dF_X(0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C_X(\tau)\,d\tau = E\left\{|dx(0,\omega)|^2\right\} = 0 \qquad (3\text{-}8)$$

c) Loi forte des grands nombres. Nous dirons que l'évènement L est réalisé sur $\omega_1\in\Omega$ ou, encore, que $\omega_1\in L\subset\Omega$ si $\overline{X[T,\omega_1]}\longrightarrow 0$ pour $T\longrightarrow\infty$. On dit que $X(t,\omega)$ obéit à la loi forte si Prob L = 1.

Soit $\{C \rightleftarrows F\}$ une paire {fonction de corrélation $\rightleftarrows$ fonction spectrale} satisfaisant à (3-8). Nous appellerons X_C ou X_F une f.a. centrée, de second ordre, conforme à $\{C\rightleftarrows F\}$. Soit Φ l'ensemble de tous les F possibles. Tout X_F est, d'après b), tel que, pour $T\longrightarrow\infty$, $\overline{X_F[T]}\longrightarrow 0$ en m.q. En ce qui concerne la cv. p.s., on peut dire ce qui suit.

Divers auteurs ont énoncé des conditions suffisantes [(3) (4) (5) (6)], portant sur F, pour que tout $X_F(t,\omega)$ soit tel que Prob L = 1. Il est, d'autre part, évident qu'à un F quelconque, on peut toujours associer au moins une f.a. X_F telle que, pour elle, on ait Prob L = 1. Il suffit de prendre $X_F = \sqrt{F(+\infty)}\exp\{2\pi i\nu(\omega)t\}$ où $\nu(\omega)$ est une v.a. de fonction de répartition $F(\nu)$ normée(+). Par ailleurs, A. Blanc-Lapierre et A. Tortrat ont donné [(6)] des exemples de f.a. stationnaires de second ordre [et pas au sens strict !] telles que Prob L = 0. Ces exemples que, peut être par un abus de langage, nous nommerons des "contre exemples", montrent qu'il existe des spectres F tels que, pour certains des X_F, la loi forte ne s'applique pas, donc pour lesquels il n'y a pas ergodisme pour

(+) Pour cette f.a. l'ergodisme est réalisé pour le premier ordre. Il n'est pas total puisque la fréquence $\nu(\omega)$ dépend effectivement de ω .

le moment du premier ordre.

En définitive, l'ensemble Φ de tous les spectres possibles se divise en deux sous-ensembles disjoints Φ_1 et Φ_2 $[\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi]$ [cf. fig. (2)] tels que :

- si $F \in \Phi_1$, on a Prob L = 1 pour tout X_F
- si $F \in \Phi_2$, il existe au moins un X_F tel que Prob L $<$ 1 et, évidemment, toujours des X_F tels que Prob L = 1.

La question de la définition précise de la séparatrice de Φ_1 et Φ_2, c'est-à-dire l'expression d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un F donné appartienne à Φ_1 ou Φ_2 est encore complètement ouverte.

Remarque. Les "contre exemples" correspondent, en quelque sorte, à des cas "pathologiques" n'ayant qu'un intérêt mathématique. Nous n'insisterons pas sur eux. Par contre, il est intéressant de revenir sur les conditions suffisantes qui permettent d'assurer le bon comportement d'un modèle en ce qui concerne l'ergodisme pour le premier ordre. Sans chercher à extraire de [(3) (4) (5) (6)] les conditions suffisantes les moins restrictives possibles, il peut être utile d'en expliciter quelques unes, relativement simples, largement vérifiées dans les cas concrets. Elles peuvent suffire à "donner confiance" dans les qualités ergodiques de larges classes de modèles. Naturellement, nous supposons toujours vérifiée la condition (3-8). Voici, alors, diverses conditions supplémentaires dont chacune est suffisante :

i) Il existe une valeur réelle $\alpha < 1$ telle que, pour les grandes valeurs de T, l'expression :

$$\frac{1}{T^\alpha}\int_0^T \left[1 - \frac{u}{T}\right] C_X(u)\, du \qquad (3\text{-}9)$$

reste bornée en module.

ii) Il existe un nombre positif η tel que, pour les grandes valeurs de T on ait :

$$T^\eta \int_0^\infty \frac{\sin^2 \pi \nu T}{\pi^2 \nu^2 T^2}\, dF(\nu) < A \quad [\text{A réel positif fini}] \qquad (3\text{-}10)$$

iii) Il est possible de trouver un nombre $\alpha < 1$ tel que, dans un domaine non nul $0 \leq |\nu| < \nu_0$ $[\nu_0 \neq 0]$, on ait :

$$dF(\nu) \leq [d\nu / |\nu|^\alpha] \qquad (3\text{-}11)$$

iiii) Le spectre $F(\nu)$ comporte, près de $\nu = 0$, une densité $f(\nu) = 0\,(1/|\nu|^\gamma)$ $[\gamma < 1]$ ou même

$$0(1/|\nu|\,|\text{Log}\,|\nu||^\gamma)\ [\gamma > 3] \qquad (3\text{-}12)$$

Naturellement, ces conditions portent soit sur les valeurs de $C(\tau)$ pour les grands $|\tau|$ soit sur celles de $F(\nu)$ près de $\nu = 0$.

3-1-2. Stationnarité au sens strict [(7) (8)]

i) Théorème de G. Birkhoff. Si $X(t,\omega)$ est strictement stationnaire et si $E\{|X(t,\omega)|\} = m$ existe [on ne suppose rien d'autre sur les moments, pas même l'existence, par exemple, de moments du second ordre] , alors, p.s. la limite, pour $T \to \infty$, de $\overline{X(T,\omega)}$ soit $\overline{X(\omega)}$ existe.

ii) Condition d'ergodisme. En général, $\overline{X(\omega)}$ est aléatoire. Il y aura ergodisme si $\overline{X(\omega)} \overset{p.s.}{=} m$, c'est-à-dire, sous réserve que les moments du second ordre existent, si $X'(t,\omega) = X(t,\omega) - m$ a un spectre continu à l'origine [cf. condition (3-8)].

3-1-3. Modèles ergodiques non stationnaires.

a) Hypothèses et notations. Supposons que la covariance $\Gamma_{XX}(t_1,t_2)$ de X(t) soit "harmonisable" c'est-à-dire telle que :

$$\Gamma_{XX}(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i[\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2]} d^2\gamma(\nu_1,\nu_2) \qquad (3\text{-}13)$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |d^2\gamma(\nu_1,\nu_2)| < C < +\infty \qquad (3\text{-}14)$$

On sait que X(t) admet alors la représentation harmonique :

$$X(t,\omega) = \text{m.q.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \nu t} dx(\nu,\omega) \qquad (3\text{-}15)$$

avec

$$d^2\gamma(\nu_1,\nu_2) = E\{dx(\nu_1,\omega)\, dx^*(\nu_2,\omega)\} \qquad (3\text{-}16)$$

La stationnarité de second ordre correspond à l'orthogonalité des $dx(\nu,\omega)$. En général X(t) n'est donc pas stationnaire de second ordre. X(t) possède cependant certains caractères de permanence : par exemple, $\forall$ le filtre $\mathfrak{F}$ de gain $|G(\nu)| \leq 1$, on a, pour tout t :

$$E\{|\mathfrak{F}\{X(t)\}|^2\} < C \qquad (3\text{-}17)$$

b) Loi des grands nombres. Comme dans le cas stationnaire, $\overline{X(T,\omega)}$ tend en m.q., pour $T \to \infty$, vers une limite $\overline{X(\omega)}$ telle que

$$\overline{X(\omega)} = \lim_{T\to\infty} \text{m.q. } \overline{X(T,\omega)} = \mathfrak{F}_0\{X(t,\omega)\} = dx(0,\omega) \qquad (3\text{-}18)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{X(\omega)}$ soit p.s. égal à zéro [on suppose $E\{X(t)\} \equiv 0$] est que l'on ait :

$$d^2\gamma(0,0) = E\{|dx(0,\omega)|^2\}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \Gamma_{XX}(t_1,t_2)\,dt_1 dt_2 = 0 \qquad (3\text{-}19)$$

c) Loi forte des grands nombres. Nous supposons évidemment (3-19) remplie. On peut en précisant la tendance vers zéro, de $\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \Gamma_{XX}(t_1,t_2)dt_1dt_2$, pour $T \to \infty$, assurer que la convergence en m.q. de (3-18) devienne p.s. Voici, à titre d'exemple, une condition suffisante susceptible, d'ailleurs, d'être largement améliorée :

Théorème[(+)]. S'il existe deux constantes certaines, > 0, a et δ telles que, pour les grandes valeurs de $T > 0$, on ait :

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \Gamma_{XX}(t_1,t_2)dt_1dt_2 \leqslant \frac{a}{T^{\delta}} \qquad (3\text{-}20)$$

alors $\overline{X(T,\omega)} \xrightarrow{p.s.} \overline{X(\omega)} = 0$

Nous avons supposé $X(t,\omega)$ centré. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Posons $X(t,\omega) = E\{X(t,\omega)\} + X'(t,\omega)$ et admettons que $X'(t,\omega)$ vérifie la condition d'application (3-20) du théorème ci-dessus. Supposons également que l'espérance mathématique $E\{X(t,\omega)\}$, non supposée constante, admette une moyenne temporelle $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T E\{X(t,\omega)\}dt$, alors l'ergodisme pour le premier ordre se traduit par

$$\lim_{T\to\infty} \text{p.s.}\ \frac{1}{T}\int_0^T X(t,\omega)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T E\{X(t)\}dt \qquad (3\text{-}21)$$

3-1-4. Remarques diverses.

i) Retour sur le cas stationnaire (strictement ou de second ordre). Nous supposons l'existence des moments du second ordre et la relation (3-8) vérifiée. Alors le cas strictement stationnaire et ergodique correspond à un sous-ensemble Φ_1' du domaine Φ_1 introduit p. 3. La figure (2) résume les divers cas possibles concernant la loi forte

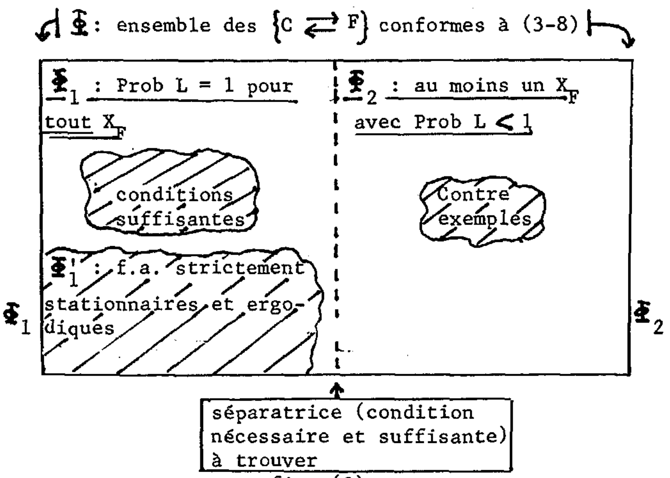


fig. (2)

(+) Voir (2) et plus particulièrement : M. Loève, Probability Theory (3e ed.) D. Van Nostrand, New York 1963 p. 488.

ii) Ergodisme pour les moments d'ordres supérieurs.

Ce qui précède traite de l'ergodisme du moment du premier ordre. Naturellement, l'ergodisme d'un modèle implique celui des moments d'ordres supérieurs. Pour fixer les idées, examinons l'ergodisme d'un moment du second ordre.

Replaçons-nous dans le cadre des hypothèses du début du § (3-1-3) [relations (3-13) et (3-14)]. Considérons l'expression $\frac{1}{T}\int_0^T Y_1(\theta)Y_2^*(\theta-\tau)d\theta$ - où Y_1 et Y_2 sont les filtrées respectives de X(t) dans les deux filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de gains uniformément bornés. Nous souhaitons que, pour $T \to \infty$, elle tende vers une limite $\mathcal{L}(\tau)$ p.s. égale à $E\{\mathcal{L}(\tau)\}$. La convergence

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Y_1(\theta)Y_2^*(\theta-\tau)d\theta = \mathcal{L}(\tau) \qquad (3\text{-}22)$$

est assurée en m.q. par les hypothèses rappelées ci-dessus avec, en plus, l'hypothèse M_2 donnée en[(1)] p. 395.

On a, d'ailleurs :

$$\mathcal{L}(\tau) = \underset{m.q.}{\int_{-\infty}^{+\infty}} G_1(\nu)G_2^*(\nu)e^{2\pi i\nu\tau}|dx(\nu)|^2 \qquad (3\text{-}23)$$

Le fait d'avoir $\mathcal{L}(\tau) \overset{p.s.}{=} E\{\mathcal{L}(\tau)\}$ dépendra de propriétés des éléments aléatoires $dx(\nu_1)\ dx^*(\nu_2)$ sur $\nu_1 = \nu_2$. D'autre part, le fait que la convergence (3-22) ait lieu, non seulement en m.q. mais aussi p.s., dépend des propriétés des éléments $|E\{dx(\nu_1)dx^*(\nu_2)dx^*(\nu_1')dx(\nu_2')\}|$ au voisinage de $\nu_1 = \nu_2$ et de $\nu_1' = \nu_2'$. Au total, on peut donner des conditions sur les $dx(\nu_1)dx^*(\nu_2)$ situés sur $\nu_1 = \nu_2$ et sur son voisinage assurant l'ergodisme du moment considéré sous la forme[(+)] :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Y_1(\theta)Y_2^*(\theta-\tau)d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\nu)G_2^*(\nu)e^{2\pi i\nu\tau}E\{|dx(\nu)|^2\}$$
$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T E\{Y_1(\theta)Y_2^*(\theta-\tau)\}d\theta \qquad (3\text{-}24)$$

Plus généralement, les propriétés ergodiques des moments d'ordres supérieurs sont liées à celles des éléments aléatoires $\underset{\varepsilon_1}{dx(\nu_1)}\ \underset{\varepsilon_2}{dx(\nu_2)} \ldots\ldots \underset{\varepsilon_K}{dx(\nu_K)}$ - où a_{ε} = a ou a^* selon que ε vaut +1 ou -1 - sur les multiplicités "stationnaires" respectives

$$\varepsilon_1\nu_1 + \varepsilon_2\nu_2 + \ldots\ldots\ \varepsilon_K\nu_K = 0 \qquad (3\text{-}25)$$

et à leur voisinage.

(+) Ces questions sont discutées en détail dans [(1)] à propos des propriétés ergodiques intervenant dans la détermination expérimentale des spectres de puissance [cf. p. 394 et suivantes].

iii) Tout ce qui précède est, au fond, lié au filtrage, par l'opération de moyenne temporelle, de la composante $dx(0,\omega)$. Des questions analogues se poseraient, dans le cas stationnaire ou non stationnaire, à propos de l'amplitude $dx[\nu_0,\omega]$ de la composante $dx[\nu_0,\omega]e^{2\pi i\nu_0 t}$ relative à une raie du spectre de $X(t)$.

4 - MODELES DETERMINISTES - FONCTIONS ADMETTANT DES REPARTITIONS ASYMPTOTIQUES.

4-1. Notations et hypothèses.

Introduction des fonctions admettant des répartitions asymptotiques.

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de fonctions $H(t)$ mesurables, à valeurs complexes $[H(t) \in C$ = plan complexe$]$ telles que :

a) si $H(t) \in \mathcal{H}$, il en est de même de $H(t+\tau)$ $[\forall \tau]$

b) toute combinaison linéaire, soit $G(t)$, d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{H}$, a une répartition asymptotique au sens suivant : pour toute fonction Φ, continue et bornée sur C, la moyenne temporelle suivante existe :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Phi[G(t)]dt = \overline{\Phi[G(t)]} \qquad (4\text{-}1)$$

Pour la possibilité de l'existence et les propriétés de tels ensembles $\mathcal{H}$, voir [10]. L'existence de la limite (4-1) pour tout Φ entraine automatiquement celle d'une mesure μ_G sur C telle que l'on ait :

$$\overline{\Phi[G(t)]} = \int_C \Phi(x)d\mu_G(x) \qquad (4\text{-}2)$$

Par ailleurs, l'hypothèse b) entraine qu'une fonction vectorielle quelconque $K(t)=[H_1(t),\ldots,H_K(t)]$ admet une répartition asymptotique sur C^K en ce sens que, pour toute fonction complexe Φ, continue et bornée sur C^K, on a, de façon analogue à (4-1) et (4-2) :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Phi[H_1(t),\ldots,H_K(t)]\,dt = \overline{\Phi[K(t)]}$$

$$= \int_{C^K}\cdots\int \Phi[x_1,\ldots,x_K]\; d\mu_K(x_1,\ldots,x_K) \qquad (4\text{-}3)$$

où μ_k est une mesure de probabilité sur C^k. L'existence de cette mesure de probabilité découlant, en quelque sorte, d'une pondération liée à la notion de temps relatif de réalisation [au sens de $(\Delta t)/T$] permet, dans le cadre strictement déterministe actuel, d'introduire des concepts de nature aléatoire. On explicite clairement ce point de vue en montrant qu'au modèle déterministe actuel, on peut associer des êtres aléatoires (variables aléatoires, fonctions aléatoires...). C'est l'idée de base des travaux de Kac et Steinhaus [11] sur les fonctions (certaines) indépendantes (au sens stochastique), de Wiener [12] sur l'analyse harmonique généralisée et de Bass et Bertrandias [13] sur les fonctions pseudo-aléatoires. Les résultats contenus dans ce paragraphe ont été rassemblés à propos d'un problème d'automatique lié à la stabilité d'un système bouclé posé par Lefèvre. Ils sont, par ailleurs, résumés dans [14] [15] D'ailleurs, le contenu de ce paragraphe reproduit pour l'essentiel un article publié par A. Blanc-Lapierre dans le volume jubilaire publié en l'honneur du professeur M.S. Bartlett [16]

4-2. Variables aléatoires associées aux $H \in \mathcal{H}$.

Sous les hypothèses énoncées ci-dessus, la loi P_T, image (pour l'application $t(0 \leq t \leq T) \to \prod_{\mathcal{H}} H(t)$ de $[0,T]$ dans $C^{\mathcal{H}}$) de la mesure $[dt/T]$, converge cylindriquement, pour $T \to \infty$, vers une probabilité P dans $C^{\mathcal{H}}$. Par ce procédé, un ensemble de K fonctions : $H_j \in \mathcal{H}$ $[j=1,2,\ldots K]$ définit une multivariable aléatoire $h_j(\omega)$ $[\omega \in \Omega = C^{\mathcal{H}}][j=1,2,\ldots K]$ dont la loi est conforme à P.

Naturellement, la correspondance $H \to h$ est linéaire.

A ce stade, toutes les propriétés des variables aléatoires (v.a.) sont transposables à l'ensemble $\mathcal{H}$:

i) Indépendance. Si les $\{h_j(\omega)\}$ $[j=1,2,\ldots J]$ sont des v.a. indépendantes, on dira que les fonctions certaines $\{H_j(t)\}$ le sont aussi. La moyenne temporelle d'un produit de fonctions H_j indépendantes est égale au produit des moyennes temporelles de chacune de ces fonctions.

ii) Caractère gaussien. Si les $h_j(\omega)$ $[j=1,2,\ldots J]$ sont gaussiens dans leur ensemble, on dira qu'il en est de même des $H_j(t)$ $[j=1,2,\ldots J]$.

iii) Moments. Second ordre. Les relations (4-1), (4-2) et (4-3) identifient, pour les Φ continues bornées, l'espérance mathématique (dans P) $E_{(P)}\{\Phi[g(\omega)]\}$ avec la moyenne temporelle $\overline{\Phi\{G(t)\}}$. Dans beaucoup d'applications, cette propriété subsistera pour des Φ non bornées et (notamment) pour certaines puissances entières des x (moments). Il faudra faire, à ce sujet, des hypothèses adaptées à chaque problème particulier. Dans ce qui suit, nous admettrons que, quelles que soient les deux fonctions H et H' de $\mathcal{H}$, $\overline{H(t)H'^*(t)}$ existe et vaut $E_{(P)}\{h(\omega)h'^*(\omega)\}$. Dans $\mathcal{H}$, nous introduirons alors la norme $\|H\|$ définie par $\|H\|^2 = E_{(P)}\{|h(\omega)|^2\} = \overline{|H(t)|^2}$ et nous supposerons $\mathcal{H}$ complet pour cette norme.

iiii) Convergences des suites de v.a. etc...

4-3. Fonctions aléatoires stationnaires associées aux $H(t)$.

4-3-1. Introduction de la f.a. stationnaire $h(\lambda,H;\omega)$ associée à $H(t)$.

Soient $H \in \mathcal{H}$, K valeurs réelles quelconques λ_j $[j=1,2,\ldots K]$, les K translatées de H, $H(t+\lambda_j)$, et $h(\lambda_j,H;\omega)$ les v.a. associées. L'ensemble des $h(\lambda_j,H;\omega)$ $[\omega \subset C^{\mathcal{H}}]$ définit une multivariable aléatoire de loi P. Si λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, on introduit ainsi une f.a. de λ : $h(\lambda,H;\omega)$, correspondant à H, à valeurs dans C, et définie sur $(\lambda \times C^{\mathcal{H}})$. Evidemment, $h(\lambda,H;\omega)$ est stationnaire en λ (strictement) ; de même, $\{h(\lambda,H_m;\omega)\}$ $[m=1,E,\ldots,M]$ définit une f.a. vectorielle stationnaire.

4-3-2. Propriétés du second ordre des $h(\lambda,H;\omega)$.

Les propriétés des f.a. stationnaires du second ordre s'appliquent aux $h(\lambda,H;\omega)$. Elles induisent des propriétés corrélatives pour les $H(t+\lambda)$. Il en est ainsi pour tout ce qui touche au filtrage linéaire, à la corrélation, aux spectres, à l'analyse harmonique [cf. [1] pp. 342-470 et [2] pp. 464-489]. On notera que la filtrée $\mathcal{F}\{h(\lambda,H;\omega)\}$ de la f.a. $h(\lambda,H;\omega)$ est la f.a. de λ $h[\lambda,\mathcal{F}[H];\omega]$ associée à la filtrée $\mathcal{F}[H(t)]$ de $H(t)$.

L'orthogonalité est définie par la nullité d'une espérance mathématique pour les h ou par celle de la moyenne temporelle correspondante pour les H. On distinguera entre l'orthonogalité de deux fonctions H et H' qui traduit la nullité de la moyenne temporelle de $H(t)\,H'^{*}(t)$ ou de $E\{h(\lambda,H;\omega)h^{*}(\lambda,H';\omega)\}$ et l'orthogonalité de ces deux fonctions et de leurs translatées qui traduit, pour τ quelconque, la nullité de la moyenne temporelle de $H(t+\tau)\,H'^{*}(t)$ ou de $E\{h(\lambda+\tau,H;\omega)h^{*}(\lambda,H';\omega)\}$

Si, par exemple, on a :

$$H(t) = \sum_{m.q.} A_n e^{2\pi i\nu_n t} \quad \text{et} \quad H'(t) = \sum_{m.q.} A'_n e^{2\pi i\nu'_n t} \tag{4-4}$$

l'orthogonalité de H et H' et de leurs translatées implique que les deux ensembles $\boldsymbol{\nu}=\{\nu_n\}$ et $\boldsymbol{\nu}'=\{\nu'_n\}$ n'aient pas d'élément commun.

En ce qui concerne les propriétés harmoniques, on introduit, pour $h(\lambda,H;\omega)$ la représentation suivante, classique pour les f.a. stationnaires de second ordre :

$$h(\lambda,H;\omega) = \int_{-\infty\ m.q.}^{+\infty} e^{2\pi i\nu\lambda}\, d_{\nu}\eta\,(\nu,H;\omega) \tag{4-5}$$

où les $d_{\nu}\eta\,(\nu,H;\omega)$ sont orthogonaux. Cette orthogonalité a sa correspondance dans $\mathcal{H}$: si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des filtres disjoints $[G_1(\nu)G_2(\nu) \equiv 0]$, on a, :

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}_1[H(t)]\,.\,[\mathcal{F}_2[H(t+\tau)]]^{*}} &= E\{h(\lambda,\mathcal{F}_1[H];\omega)\,.\,h^{*}(\lambda+\tau,\mathcal{F}_2[H];\omega)\} \\ &= E\{\mathcal{F}_1\{h(\lambda,H;\omega)\}\,.\,[\mathcal{F}_2\{h(\lambda+\tau,H;\omega)\}]^{*}\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4-6}$$

Les passages à la limite intervenant dans la définition des filtres linéaires, ou dans celle de l'intégrale (4-5), sont entendus en moyenne quadratique au sens de $[\omega,P]$. D'après ce qui précède, ces moyennes quadratiques peuvent, si on se réfère aux $H(t)$ eux-mêmes, être interprétées comme des moyennes temporelles.

N.B. On notera que, dans la correspondance $H(t+\lambda) \longrightarrow h(\lambda,H;\omega)$, t et λ, quoique, l'un et l'autre, homogènes à un temps, jouent des rôles très différents. λ est le paramètre de la f.a. $h(\lambda,H;\omega)$, tandis que t sert à prendre les moyennes temporelles qui, par hypothèse, s'identifient aux $E_{(P)}\{\ \}$ correspondants (on peut aussi dire que la probabilité introduite est directement rattachée à la mesure $[dt/T]$ où, si l'on veut, comme cela est courant, à la notion de fréquence temporelle).

4-3-3. Propriétés d'ordres supérieurs.

Ensemble $\mathcal{H}_{(\infty)}$. Par analogie avec la classe $\Phi(\infty)$ de la théorie des f.a. [cf. [1] p. 365 et p. 419], nous introduirons ici des ensembles $\mathcal{H}_{(\infty)}$. Un ensemble $\mathcal{H}$ sera dit du type $\mathcal{H}_{(\infty)}$, si, en plus des hypothèses de définition de $\mathcal{H}$, les $H(t)$ satisfont, encore, aux suivantes.

Quels que soient : l'entier $K > 0$, les $H_j(t)$ [distincts ou non], les $\epsilon_j = \pm 1$ et les τ_j $[j=1,2,\ldots K]$, on a :

a) $\overline{H_{\epsilon_1}(t+\tau_1)\ldots H_{\epsilon_K}(t+\tau_K)}$ existe et vaut :

$$E_{(P)}\{h_{\epsilon_1}(\tau_1,H_1;\omega)\ldots h_{\epsilon_K}(\tau_K,H_K;\omega)\} \tag{4-6}$$

où $a_{\epsilon} = a$ si $\epsilon = +1$ et $a_{\epsilon} = a^{*}$ [imaginaire conjugué] si $\epsilon = -1$;

b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} |E_{(P)}\{d_{\nu_1}\eta_{\epsilon_1}(\nu_1,H_1;\omega)\ldots d_{\nu_K}\eta_{\epsilon_K}(\nu_K,H_K;\omega)\}| < +\infty \tag{4-7}$$

Théorème. Pour tout ensemble $\{\nu_j,\epsilon_j,H_j\}$ $[j=1,2,\ldots K]$ ne satisfaisant pas à :

$$\epsilon_1\nu_1 + \epsilon_2\nu_2 + \ldots + \epsilon_K\nu_K = 0 \tag{4-8}$$

on a, si $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{H}_{(\infty)}$:

$$\begin{aligned} E_{(P)}\{d_{\nu_1}\eta_{\epsilon_1}(\nu_1,H_1;\omega)\ldots d_{\nu_K}\eta_{\epsilon_K}(\nu_K,H_K;\omega)\} &= \overline{[\mathcal{F}_{d_{\nu_1}}[H_1(t)]]_{\epsilon_1}\ldots[\mathcal{F}_{d_{\nu_K}}[H_K(t)]]_{\epsilon_K}} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4-9}$$

où $\mathfrak{F}_{d\nu_j}$ est le filtre laissant passer la bande $[\nu_j, \nu_j + d\nu_j]$.

Seuls peuvent différer de zéro les éléments du type (4-9) qui sont distribués sur les multiplicités définies par (4-8) qu'on peut appeler multiplicités "stationnaires".

4-4. Fonctions indépendantes ainsi que leurs translatées (même définition que dans le cas de l'orthogonalité). Si deux ensembles $H_j(t)$ $[j=1,2,\ldots]$ et $H'_\ell(t)$ $[\ell=1,2,\ldots]$ sont indépendants, l'un par rapport à l'autre, au sens des fonctions et de leurs translatées, les moyennes temporelles et les espérances mathématiques se scindent en deux facteurs et, $\forall$ les τ_j et les τ'_j, on a :

$$\overline{H_{1_{\epsilon_1}}(t+\tau_1)\ldots H'_{1_{\epsilon'_1}}(t+\tau'_1)\ldots}$$

$$= E_{(P)}\{h_{\epsilon_1}(\tau_1, H_1;\omega)\ldots h_{\epsilon'_1}(\tau'_1, H'_1;\omega)\ldots\}$$

$$= \overline{H_{1_{\epsilon_1}}(t+\tau_1)\ldots} \;.\; \overline{H'_{1_{\epsilon'_1}}(t+\tau'_1)\ldots}$$

$$= E_{(P)}\{h_{\epsilon_1}(\tau_1, H_1;\omega)\ldots\} E_{(P)}\{h_{\epsilon'_1}(\tau'_1, H'_1;\omega)\ldots\} \qquad (4\text{-}10)$$

Théorème. Pour que les deux fonctions H et H' introduites en (4-4) soient indépendantes ainsi que leurs translatées, il faut et il suffit que les deux ensembles $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ définis ci-dessous n'aient d'autre élément commun que $\nu = 0$. $\mathcal{V}$ est constitué par les combinaisons linéaires d'un nombre fini d'éléments ν_n à coefficients $\gtreqless 0$. $\mathcal{V}'$ est constitué de la même façon du côté des ν'_n.

Remarque. On rencontre souvent, en automatique, des transformations $x(t) \longrightarrow s(t)$ du type :

$$s(t) = M\{x(t)\} = \mathfrak{F}\{f(t)x(t)\} ,$$

où $\mathfrak{F}$ est un filtre linéaire et x(t) une fonction contenue dans un certain ensemble X. Supposons que f(t) et X fassent partie d'un $\mathcal{H}_{(\infty)}$. L'indépendance, pour les fonctions et leurs translatées, de f(t) et de l'ensemble X, qui peut être imposée par des raisons physiques [par exemple, si le signal x(t) provient de phénomènes n'ayant aucun couplage avec l'appareil qui produit f(t)], introduit de grandes simplifications dans le calcul des moments de s à partir des propriétés respectives de f et $x \in X$. En particulier, cette indépendance assure que M conserve l'orthogonalité des fonctions et leurs translatées. On trouvera dans (15) des applications de ces considérations à l'étude de la stabilité du système bouclé :

$$\mathfrak{F}\{f(t)[e(t)-s(t)]\} = s(t) \qquad (4\text{-}12)$$

[e(t) : signal d'entrée ; s(t) réponse].

4-5. Fonctions de Laplace-Gauss.

Pour simplifier, supposons les H réels. Soit $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$. Nous dirons que tous les $H \in \mathcal{H}_1$ sont, dans leur ensemble, de Laplace-Gauss, ainsi que leurs translatées, si, $\forall$ K et L, $\forall$ les $H_k \in \mathcal{H}_1$ (k=1,...,K) et $\forall$ les λ_ℓ $[\ell=1,\ldots,L]$, les LK v.a. $h[\lambda_\ell, H_k;\omega]$ correspondant aux $H_k(t+\lambda_\ell)$ sont gaussiennes dans leur ensemble au sens de P. S'il en est ainsi, les fonctions aléatoires $h[\lambda, H_k;\omega]$ constituent un ensemble de f.a. de Laplace-Gauss. Toutes les propriétés de ces f.a. induisent alors des propriétés corrélatives pour les fonctions certaines $H \in \mathcal{H}_1$.

5 - FONCTIONS A REPARTITION ASYMPTOTIQUE ET ERGODISME

Ce paragraphe établit un pont entre les deux points de vue correspondant respectivement aux modèles aléatoires (§ 3) et aux modèles déterministes (§ 4).

Nous sommes, au début du § 4, partis d'un ensemble de fonctions certaines $H \in \mathcal{H}$ essentiellement caractérisé par une invariance vis-à-vis des translations et par l'existence des répartitions asymptotiques. A cet ensemble, nous avons associé un ensemble de f.a. stationnaires $h[\lambda, H;\omega]$

$$\mathcal{H} \longrightarrow h[\lambda, H;\omega] \qquad (5\text{-}1)$$

On peut chercher à faire le cheminement inverse. Partons d'un ensemble $\mathcal{E}'$ de f.a. $X_j(t,\omega') \in \mathcal{E}'$, strictement stationnaires dans leur ensemble, définies sur les épreuves $\omega' \in \Omega'$. Considérons une épreuve particulière ω'_0. Les $X_j(t,\omega'_0)$ correspondants constituent-ils -ou non- un ensemble $\mathcal{H}$? Est-il possible que la réponse soit affirmative avec une probabilité 1 ? Suggérons, dans ses grandes lignes, la construction d'un exemple où il en est ainsi. Nous partons d'une f.a. à accroissements indépendants et stationnaires, soit $\mathcal{N}[\theta,\omega']$ et nous considérons les fonctions aléatoires

$$X_{R_j}(t,\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} R_j(t-\theta)\, d\mathcal{N}(\theta,\omega') \qquad (5\text{-}2)$$

Par généralisation du raisonnement donné en (1), à la page 368, on peut montrer que, sous réserve d'astreindre R(t) à des conditions très larges de régularité, d'intégralité et de décroissance pour les grands $|t|$, il est possible d'imposer à l'ensemble des $X_j(t,\omega')$, d'une part, de faire partie d'un ensemble $\Phi(\infty)$ et, d'autre part, de possèder un ergodisme suffisant (conséquence de la décroissance des R pour $|t| \longrightarrow \infty$ et du fait que des conditions suffisantes du type (3-9) peuvent être remplies) pour que la réponse à la question posée soit affirmative.

REPRESENTATIONS MICROSCOPIQUES :
MODELES ALEATOIRES ET MODELES DETERMINISTES
REPRODUCTIBILITE MACROSCOPIQUE - ERGODISME ET STATIONNARITE

Soit, alors, P' la loi temporelle de l'ensemble des $X_j(t,\omega')$. Presque sûrement, on peut affirmer ce qui suit. Considérons les réalisations $X_j(t,\omega'_o)$ correspondant à une épreuve particulière ω'_o. Procédons sur cet ensemble comme nous l'avons fait sur $\mathcal{H}$ au paragraphe (4-1). Nous obtenons alors une loi asymptotique $P(\omega'_o)$. Cette loi n'est autre que P' (p.s.).

Il y a plus. On peut construire des ensembles $\mathcal{E}''$ de f.a. $X_j(t,\omega'') \in \mathcal{E}''$ non stationnaires mais ergodiques au sens du § 3-1-3, c'est-à-dire vérifiant les relations du type (3-21) ou (3-24) ou, encore :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F[X_{j_1}(t+\tau_1)\ldots X_{j_M}(t+\tau_M)]dt$$

$$\overset{p.s.}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T E\{F[X_{j_1}(t+\tau_1)\ldots X_{j_M}(t+\tau_M)]\}dt \qquad (5\text{-}3)$$

F étant une fonction de $[X_{j_1}(t_1),\ldots,X_{j_M}(t_M)]$ assez générale et la moyenne temporelle du second membre de (5-3) étant supposée exister. Alors, sur presque tous les ω'', on définira une loi asymptotique $P''(\omega'')$ qui sera indépendante de ω'', soit $P''(\omega'')=P$. Naturellement, P différera de la loi temporelle P'' des $\{X_j(t,\omega'')\}$.

De toute évidence, P est stationnaire (par construction) alors que P'' ne l'est pas. En particulier, seuls les éléments du type

$$E\left\{dx_{j_1,\varepsilon_1}(\nu_1)\ dx_{j_2,\varepsilon_2}(\nu_2)\ldots\ldots\right\} \qquad (5\text{-}4)$$

situés sur une "multiplicité stationnaire" du type (4-8) joueront un rôle dans P.

De même, si P'' présente le caractère markovien, il n'en sera pas de même, en général, pour P par suite d'une sorte d'effet de mélange produit par la moyenne temporelle.

De même, en général, le caractère gaussien se perd en passant de P'' à P. Par exemple, si $X(t,\omega)$ est une f.a. centrée, stationnaire et laplacienne pourvue d'une densité spectrale bornée, $X(t,\omega)\cos 2\pi\nu_o t$ reste laplacien mais n'est pas stationnaire tandis que sa loi asymptotique est stationnaire mais plus laplacienne.

Remarque. Les fonctions périodiques admettent des répartitions asymptotiques. Nous avons cependant vu qu'elles n'étaient pas acceptables pour représenter un phénomène stationnaire de fluctuations parce qu'incompatibles avec l'irréproductibilité au cours du temps (cf. § 2). Permanence et irréproductibilité sont rendues compatibles sur chaque épreuve ω, pour $X(t,\omega)$ conforme à (3-4), par les propriétés très particulières des $dx(\nu,\omega)$ liées à leur orthogonalité et par les conséquences de ces propriétés sur le plan temporel dans un cadre ergodique.

Notons de plus que les générateurs de fonctions pseudo-aléatoires réalisent du fait même du processus de production utilisé, des fonctions périodiques à période suffisamment grande pour ne pas être gênante. C'est, en fait, sur une période, que sont définies les répartitions de valeurs introduisant une probabilité.

.·.

Bibliographie.

(1) A. Blanc-Lapierre et R. Fortet - Théorie des fonctions aléatoires - Masson Paris 1953, p. 374 et suivantes.

(2) M. Loève - Probability theory (3e ed) D. Van Nostrand, New York, 1963, p. 455 et suivantes ; Revue Scientifique - Paris 83, 1945, p. 297 et 84, 1946, p. 195.

(3) M. Loève - Probability theory (3e ed) D. Van Nostrand, New York, 1963, p. 486 et suivantes Revue Scientifique - Paris 83, 1945, p. 297 et 84, 1946, p. 195.

(4) A. Blanc-Lapierre et R. Brard - Comptes Rendus Académie des Sciences - Paris, 220, 1945, p. 134 et Bull. Soc. Math. Fr. 1946, p. 102.

(5) I.N. Verbitskaya - Theory of Probability and its applications - Académie des Sciences, Moscou, 9, 1964, p. 325 et 11, 1966, p. 632.

(6) A. Blanc-Lapierre et A. Tortrat - Comptes Rendus Académie des Sciences - Paris, 267, 1968, p. 740.

(7) A. Kolmogoroff - Ein vereinfachter Beweis des Birkoff Khintchineschen Ergodensatzes (Rec. Math. de Moscou 44, 1937, p. 367).

(8) A. Blanc-Lapierre, P. Casal et A. Tortrat - Méthodes mathématiques de la Mécanique Statistique. Masson, Paris, 1959, chap. III, pp. 55-93.

(10) P.H. Pham -(1968) Fonctions admettant une répartition asymptotique des valeurs C - R. Acad. Sci. Paris Sér. A 267, p. 803. - Deux théorèmes sur les mesures asymptotiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 1969, 268, p. 448. - Mesures asymptotiques, thèse, Université de Paris.(1972).

(11) M. KAC - Sur les fonctions indépendantes I, (1936) Studia Math. 6, pp. 45-58.- et H. STEINHAUS (1936) Sur les fonctions indépendantes II. Studia Math. 6, pp. 59-66. - H. Steinhaus (1938), La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique. Actualités Sci. Indust. 738, pp. 57-73.

(12) N. Wiener - (1930) Generalized harmonic analysis, Acta Math. 55, 117, p. 258.

(13) J.P. Bertrandias (1964), Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d''ordre p. Thèse, Université de Paris.

(14) A. Blanc-Lapierre et C. Lefevre (1972), Analyse harmonique généralisée et fonctions aléatoires stationnaires, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 274, pp. 257-261.

(15) A. Blanc-Lapierre et C. Lefevre (1972) - Sur quelques propriétés de moments d'ordres supérieurs intervenant dans l'étude de la stabilité de certains systèmes bouclés, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 274, pp. 1266-1270.

(16) A. Blanc-Lapierre - Fonctions certaines admettant des répartitions asymptotiques et fonctions aléatoires stationnaires, - Perspectives in Probability and Statistics, Edited by J. GANI, Applied Probability Trust, London, 1975.