

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

LIENS ENTRE LES LOIS TEMPORELLES DE FONCTIONS ALEATOIRES ADMETTANT
UNE REPARTITION ASYMPTOTIQUE DE LEURS VALEURS ET LES LOIS DE CELLES
QUI S'EN DEDUISENT A TRAVERS UNE PONDERATION TEMPORELLE

André BLANC-LAPIERRE

Laboratoire des Signaux et Systèmes (C.N.R.S./E.S.E.),
Plateau du Moulon 91190 GIF SUR YVETTE

RESUME

On sait qu'à partir d'une fonction *certaine* $h(t)$ admettant une répartition asymptotique de ses valeurs, on peut induire une fonction aléatoire stationnaire $\underline{h}(\lambda, \omega)$ [$\omega \in \Omega$] où λ est un paramètre de *translation* et où, dans Ω , la probabilité découle de la notion de "*temps relatif*" ou de "*fréquence*". Nous dirons alors que $h(t)$ possède la propriété A.

Si $X(t, \omega')$ [$\omega' \in \Omega'$] est une fonction *aléatoire* (de loi temporelle P'), il peut arriver que, presque sûrement, $X(t, \omega')$ possède la propriété A. S'il en est ainsi, nous dirons que la fonction aléatoire $X(t, \omega')$ possède la propriété B. Alors, à chaque ω' , correspondra, à travers $X(t, \omega')$, une fonction aléatoire stationnaire $X(\lambda, \omega/\omega')$ dont nous appellerons la loi temporelle $P(\omega')$. La propriété B n'implique pas la stationnarité de $X(t, \omega')$.

La présente communication traite des points suivants :

- Comment construire des fonctions aléatoires $X(t, \omega')$ possédant la propriété B ?
- Quels liens y a-t-il entre P' et $P(\omega')$ (P' stationnaire ou non) ?
- Est-il possible que $P(\omega')$ soit p.s. indépendant de ω' ? $P(\omega')$ peut-il être p.s. identique à P' ?

SUMMARY

It is known that, starting from a non *random* function $h(t)$ admitting asymptotic distribution of its values, it is possible to construct one stationary random function $\underline{h}(\lambda, \omega)$ [$\omega \in \Omega$] where λ is a *translation* parameter and where, in Ω , the probability results from the notion of "*relative time*" or from the notion of "*frequency*". In this case, we shall say that $h(t)$ has the property A.

Let us now consider a *random* function $X(t, \omega')$ [$\omega' \in \Omega'$] and let us call P' its law (in the sense of all the finite dimensional distributions). It may be that the random function $X(t, \omega')$, almost surely, has the property A. In this case, we shall say that $X(t, \omega')$ has the property B. Then, to each ω' , there will correspond, through $X(t, \omega')$, one stationary random function $X(\lambda, \omega/\omega')$, the law of which we can call $P(\omega')$. Property B does not imply stationarity for $X(t, \omega')$.

In this paper, we study the following questions :

- How to construct random functions $X(t, \omega')$ verifying property B ?
- What relations are there between P' and $P(\omega')$ (P' being stationary or not stationary) ?
- Is it possible that $P(\omega')$ be almost surely independent of ω' ? Can $P(\omega')$ be, almost surely, identical to P' ?



LIENS ENTRE LES LOIS TEMPORELLES DE FONCTIONS ALEATOIRES ADMETTANT
UNE REPARTITION ASYMPTOTIQUE DE LEURS VALEURS ET LES LOIS DE CELLES
QUI S'EN DEDUISENT A TRAVERS UNE PONDERATION TEMPORELLE

Cette communication étend, notamment vers les fonctions aléatoires, divers résultats déjà publiés par l'auteur sur les fonctions admettant une répartition asymptotique de leurs valeurs.

1. FONCTIONS CERTAINES ADMETTANT UNE REPARTITION ASYMPTOTIQUE DE LEURS VALEURS ET ETRES ALEATOIRES ASSO-CIES PAR PONDERATION TEMPORELLE

1.1. RAPPEL DE RESULTATS

La notion de fonctions certaines admettant une répartition asymptotique de leurs valeurs a déjà été précisée [1]. Je puis me borner à un simple rappel.

On considère un espace vectoriel \mathcal{H} de fonctions $H(t)$, mesurables, à valeurs complexes [$h(t) \in \mathbb{C} = \text{plan complexe}$], telles que :

- a) si $h(t) \in \mathcal{H}$, il en est de même de $h(t+\tau)$ ($\forall \tau$) ;
- b) toute combinaison linéaire, soit $G(t)$, d'un nombre fini d'éléments de \mathcal{H} , a une répartition asymptotique au sens suivant : pour toute fonction L continue et bornée sur \mathbb{C} , la moyenne temporelle suivante existe :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T L[G(t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T L[G(t)] dt = \overline{L[G(t)]} \quad (1)$$

Sous ces hypothèses, on établit les résultats suivants :

1) A tout $h(t) \in \mathcal{H}$ correspond une variable aléatoire $\underline{h}(\omega)$ ($\omega \in \Omega = \mathbb{C}^{\mathcal{H}}$), dont la loi est incluse dans la loi P limite, pour $T \rightarrow \infty$, de la loi P_T , image de (dt/T) (temps relatif) dans l'application $t(0 \leq t \leq T) \rightarrow \Pi_{\mathcal{H}} h(t)$ de $[0, T]$ dans $\mathbb{C}^{\mathcal{H}}$.

La fonction caractéristique $\varphi_{\underline{h}}(u)$ (pour h réel -si h est complexe, on se ramène au cas réel en introduisant sa composante réelle et sa composante imaginaire pure) et, s'il existe, le moment d'ordre K , soit $E\{\underline{h}^K(\omega)\}$, de $\underline{h}(\omega)$ sont respectivement donnés par les moyennes temporelles suivantes :

$$\varphi_{\underline{h}}(u) = e^{\int_0^T i u h(t) dt} \quad (\alpha) \quad \text{et} \quad E\{\underline{h}^K(\omega)\} = \overline{[h_{(\varepsilon)}(t)]^K} \quad (\beta)$$

où, dans (2 β), ε vaut ± 1 , la notation $a_{(\varepsilon)}$ (a : nombre complexe) étant définie par le fait que $a_{(+1)} = a$ et $a_{(-1)} = a^*$ (ε ne joue évidemment aucun rôle pour X réel).

2) A l'ensemble constitué par une fonction $h(t) \in \mathcal{H}$ et par toute ses translatées $h(t+\lambda)$, correspond, de la même manière, une fonction aléatoire stationnaire $\underline{h}(\lambda, \omega)$. Sa loi temporelle (pour h réel) et, s'ils existent, ses moments sont respectivement définis par les moyennes temporelles suivantes :

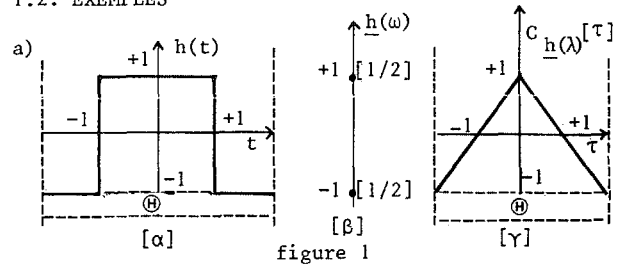
$$\varphi_{\underline{h}(\lambda, \omega)}(u_1, \dots, u_K; \lambda_1, \dots, \lambda_K) = E_{(\Omega)} \left\{ e^{i[u_1 h(\lambda_1) + \dots + u_K h(\lambda_K)]} \right\}$$

$$= \left\{ e^{i[u_1 h(t+\lambda_1) + \dots + u_K h(t+\lambda_K)]} \right\} \quad (3)$$

$$\text{et} \quad E\left\{ \underline{h}_{(\varepsilon_1)}^{K_1}(\lambda_1) \dots \underline{h}_{(\varepsilon_p)}^{K_p}(\lambda_p) \right\} = \overline{h_{(\varepsilon_1)}^{K_1}(t+\lambda_1) \dots h_{(\varepsilon_p)}^{K_p}(t+\lambda_p)} \quad (4)$$

De façon générale, il y a correspondance parfaite entre moyennes temporelles dans \mathcal{H} et espérances mathématiques dans Ω .

1.2. EXEMPLES



A la fonction certaine $h(t)$ périodique, de période $\Theta = 4$ (α), correspond la variable aléatoire $\underline{h}(\omega) = \pm 1$ (équiprobabilité, cf. (β)) et, si on fait intervenir ses translatées $h(t+\lambda)$, la fonction aléatoire stationnaire $\underline{h}(\lambda, \omega)$ de fonction de corrélation $C_{\underline{h}(\lambda)}[\tau]$ conforme à (γ) (période Θ). Pour $|\tau| = 1 + \frac{2}{p}$ (p entier ≥ 0), à la non corrélation s'ajoute l'indépendance.

b) Aux fonctions certaines $h[2^k(t+1)]$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), où $h(t)$ est définie comme en α) (cf. figure 2), correspondent, si on fait intervenir leurs translatées, les fonctions aléatoires $\underline{h}(\lambda, k, \omega)$ pour lesquelles on établit, sans peine, les propriétés suivantes :

i) Pour λ_1 et λ_2 fixés quelconques, les variables aléatoires $\underline{h}(\lambda_1, k_1, \omega)$ et $\underline{h}(\lambda_2, k_2, \omega)$ sont, pour $k_1 \neq k_2$, orthogonales et indépendantes.

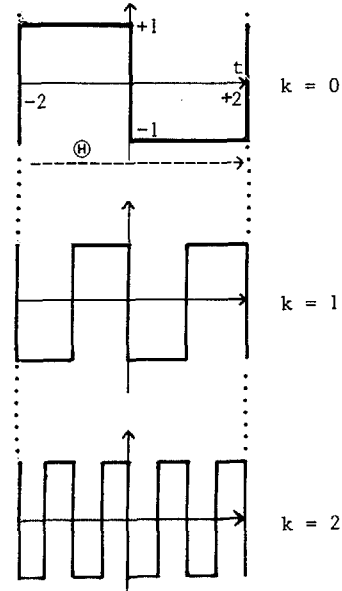


figure 2

LIENS ENTRE LES LOIS TEMPORELLES DE FONCTIONS ALEATOIRES ADMETTANT
UNE REPARTITION ASYMPTOTIQUE DE LEURS VALEURS ET LES LOIS DE CELLES
QUI S'EN DEDUISENT A TRAVERS UNE PONDERATION TEMPORELLE

ii) Cependant, les fonctions aléatoires $\underline{h}(\lambda, k_1, \omega)$ et $\underline{h}(\lambda, k_2, \omega)$ ne sont pas indépendantes. En effet, en supposant $k_1 < k_2$, l'évènement : "pour $\lambda = \lambda_0$, $\underline{h}(\lambda, k_1)$ passe, lorsque λ croit, de +1 à -1, s'il est réalisé pour k_1 , l'est, aussi, sûrement pour k_2 . Cette liaison entre fonctions aléatoires, découle aussi (cf. [2] p 369) des propriétés des ensembles de fréquences harmoniques respectivement présentes dans les développements de Fourier de $\underline{h}(\lambda, k_1)$ et $\underline{h}(\lambda, k_2)$.

1.3. REMARQUE IMPORTANTE

La correspondance $h \rightarrow \underline{h}$, définie ci-dessus, peut être utilement illustrée par la remarque suivante qui éclaire le passage des répartitions de valeurs dans \mathcal{H} à la loi P_T dont il est question en 1.1. (au § 1). Introduisons une variable aléatoire $\theta(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) équipartie sur $(0, T)$. Il est évident que :

la variable aléatoire :

$$h_T(\omega) = h\{\theta(\omega)\} \tag{5}$$

et la fonction aléatoire de λ :

$$h_T(\lambda, \omega) = h\{\lambda + \theta(\omega)\} \tag{6}$$

ont des lois conformes à P_T . Cette remarque peut être utile pour traiter diverses questions. Mais il faut bien noter que ceci ne signifie pas que la variable aléatoire \underline{h} soit la limite de h_T , ou que la fonction aléatoire $\underline{h}(\lambda)$ soit celle de $h_T(\lambda)$, au sens d'une convergence entre grandeurs aléatoires. Le passage de P_T à P n'est qu'une convergence en loi.

1.4. LA PROPRIETE A

Naturellement, l'espace \mathcal{H} peut être construit sur l'ensemble des fonctions constitué par une seule fonction $h(t)$, scalaire ou vectorielle, et toutes ses translatées. Il comprendra alors, aussi, les transformées de ces fonctions dans les filtres linéaires. Puisque nous parlons d'espace \mathcal{H} , toutes les fonctions mises en jeu admettent une répartition asymptotique et toutes les propriétés de transposition entre moyennes temporelles dans \mathcal{H} et espérances mathématiques dans Ω décrites ci-dessus sont valables. S'il en est bien ainsi, nous dirons que la fonction $h(t)$ possède la propriété A.

2. EXTENSION AUX FONCTIONS ALEATOIRES ADMETTANT UNE REPARTITION ASYMPTOTIQUE DE LEURS VALEURS

2.1. INTRODUCTION DE LA PROPRIETE B. ERGODISME

Soit, maintenant, une fonction aléatoire $X(t, \omega')$ ($\omega' \in \Omega'$) scalaire (éventuellement vectorielle) que nous ne supposons pas stationnaire. Soit P' la loi tempo-

relle correspondante. Portons notre attention sur un sous-ensemble $\Delta\Omega'$ de Ω' de probabilité positive, ou même, sur un ω' particulier. Nous n'avons aucune raison de penser que, pour tous les $\omega' \in \Delta\Omega'$, ou pour le ω' particulier considéré, $X(t, \omega')$ possède la propriété A. Cependant, comme nous le verrons, il peut arriver que $X(t, \omega')$ possède la propriété A avec une probabilité 1. Nous dirons, alors, que $X(t, \omega')$ possède la propriété B. S'il en est ainsi, à presque tout ω' de Ω' , on pourra, par la méthode développée en 1., associer des fonctions aléatoires stationnaires $\underline{X}(\lambda, \omega/\omega')$ définies pour les ω d'un certain espace de probabilité, a priori fonction de ω' , soit $\Omega_{(\omega')}$, sur lequel la probabilité dépendra, elle aussi, de ω' , soit $P(\omega')$ (cf. figure 3).

$$\Omega' \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \omega'_1 \cdot X(t, \omega'_1) \rightarrow \underline{X}(\lambda, \omega/\omega'_1) \quad \{\omega \in \Omega_{(\omega'_1)}, P(\omega'_1)\} \\ \rightarrow \omega'_2 \cdot X(t, \omega'_2) \rightarrow \underline{X}(\lambda, \omega/\omega'_2) \quad \{\omega \in \Omega_{(\omega'_2)}, P(\omega'_2)\} \\ \rightarrow \omega'_3 \cdot X(t, \omega'_3) \rightarrow \underline{X}(\lambda, \omega/\omega'_3) \quad \{\omega \in \Omega_{(\omega'_3)}, P(\omega'_3)\} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{array} \right. [P']$$

figure 3

Si $X(t)$ possède la propriété B, deux questions supplémentaires se posent :

a) les lois temporelles induites $P(\omega')$ dépendent-elles effectivement de ω' , c'est-à-dire sont-elles aléatoires ? ou bien s'identifient-elles, presque sûrement, à une loi certaine \bar{P} ?

b) Dans ce dernier cas, c'est-à-dire si $P(\omega') = \bar{P}$, quel lien y a-t-il entre la loi temporelle initiale P' de $X(t, \omega')$ et la loi induite certaine \bar{P} ?

Les réponses aux questions posées sont très étroitement liées aux propriétés ergodiques de $X(t, \omega')$.

On notera que nous n'avons fait aucune hypothèse de stationnarité sur $X(t, \omega')$. Si $X(t, \omega')$ n'est pas stationnaire et si \bar{P} existe, on a, bien sûr, $P' \neq \bar{P}$ puisque \bar{P} est stationnaire par construction.

Dans le paragraphe suivant, nous allons donner des conditions suffisantes pour l'existence de \bar{P} .

2.2. CONDITIONS SUFFISANTES SUR $X(t, \omega')$ POUR QUE \bar{P} EXISTE

En supposant $X(t, \omega')$ réel, la connaissance de la loi temporelle $P_{(\omega')}$ est identique à celle de l'ensemble des fonctions caractéristiques induites :

$$\varphi \quad (u_1, \dots, u_K ; \lambda_1, \dots, \lambda_K ; \omega') \tag{7}$$

$$\underline{X}(\lambda, \omega/\omega')$$

$$= E_{\Omega(\omega)} \{ \exp\{i[u_1 \underline{X}(\lambda_1, \omega/\omega') + \dots + u_K \underline{X}(\lambda_K, \omega/\omega')]\} \} \tag{8}$$



LIENS ENTRE LES LOIS TEMPORELLES DE FONCTIONS ALEATOIRES ADMETTANT
UNE REPARTITION ASYMPTOTIQUE DE LEURS VALEURS ET LES LOIS DE CELLES
QUI S'EN DEDUISENT A TRAVERS UNE PONDERATION TEMPORELLE

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{0 \text{-----} T}{\{\exp\{i[u_1 X(t+\lambda_1, \omega') + \dots + u_K X(t+\lambda_K, \omega')]\}} \quad (9)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{0 \text{-----} T}{\Phi\{u_1, \dots, u_K; \lambda_1, \dots, \lambda_K; t; \omega'\}} \quad (9 \text{ bis})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{0 \text{-----} T}{\Phi\{\dots; t; \omega'\}} \quad (10)$$

où $\Phi\{\dots; t; \omega'\}$ est une notation condensée qui représente la même fonction Φ qu'en (9 bis) en mettant l'accent sur le fait que c'est en tant que fonction aléatoire de t qu'elle intervient dans la moyenne temporelle introduite ici.

On peut formuler des conditions *suffisantes*, portant sur les moments des deux premiers ordres de $\Phi\{\dots; t; \omega'\}$, assurant p.s. l'existence de la moyenne temporelle $\overline{\Phi\{\dots; t; \omega'\}}$ et son caractère certain [4]. Nous donnons ci-dessous de telles conditions. Elles pourraient être rendues moins restrictives mais le sont assez peu pour le but poursuivi ici.

SI $\Phi\{\dots; t; \omega'\}$ possède les deux propriétés suivantes :

i) l'espérance mathématique $E\{\Phi\{\dots; t; \omega'\}\}$ admet une moyenne temporelle :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{0 \text{-----} T}{E\{\Phi\{\dots; t; \omega'\}\}} = \mathcal{L}_\Phi \quad (11)$$

ii) la covariance de la fonction centrée

$$\Phi'\{\dots; t; \omega'\} = \Phi\{\dots; t; \omega'\} - E\{\Phi\{\dots; t; \omega'\}\} \quad (12)$$

soit

$$\Gamma_{\Phi'}(t_1, t_2) = E\{\Phi'\{\dots; t_1; \omega'\} \Phi'^*\{\dots; t_2; \omega'\}\} \quad (13)$$

est telle qu'il existe deux constantes certaines, positives, a et δ , telles que l'on ait, pour les grandes valeurs de T :

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \Gamma_{\Phi'}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \leq \frac{a}{T\delta} \quad (14)$$

ALORS, on peut affirmer que, pour $T \rightarrow \infty$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi\{\dots; t; \omega'\} dt \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathcal{L}_\Phi \quad (15)$$

Le résultat (15) peut s'interpréter en disant que, sous les hypothèses faites, la fonction caractéristique induite $\varphi_{X(\lambda, \omega/\omega')}(u_1, \dots, u_K; \lambda_1, \dots, \lambda_K; \omega')$ est presque sûrement égale à la moyenne temporelle \mathcal{L}_Φ de la fonction caractéristique

$E\{\exp\{i[u_1 X(t+\lambda_1) + \dots + u_K X(t+\lambda_K)]\}$ de la loi P' .

Si $X(t, \omega')$ vérifie, $\forall K, u_1, \dots, u_K, \lambda_1, \dots, \lambda_K$, les conditions nécessaires énoncées ci-dessus, alors

elle possède la propriété B et, de plus, la loi induite $P(\omega')$ est presque sûrement identique à la loi certaine \bar{P} définie par les \mathcal{L}_Φ . Naturellement, selon que X est, ou n'est pas, stationnaire, on a, ou on n'a pas, $\bar{P} = P'$.

2.3. EXEMPLES

i) $X(t) = \exp\{2\pi i \nu(\omega') t\}$, où $\nu(\omega')$ est une variable aléatoire, possède la propriété B, mais la loi induite $P(\omega')$ reste aléatoire. En effet, on a, en particulier : $E\{X(\lambda_1, \omega') X^*(\lambda_2, \omega')\} = \exp\{2\pi i \nu(\omega') [\lambda_1 - \lambda_2]\}$.

ii) $X(t)$ est de mémoire limitée (cf. [2], p. 317) et vérifie (11). Nous admettons donc qu'il existe une valeur positive finie m possédant la propriété suivante : si I_1 et I_2 sont deux domaines quelconques de l'axe des t , finis ou non, tels que, $\forall t_1 \in I_1$ et $t_2 \in I_2$, on ait $0 < m < (t_2 - t_1)$, il y a, pour $X(t)$, indépendance entre I_1 et I_2 . S'il en est ainsi, à tout ensemble fixé mais quelconque : $K, \lambda_1, \dots, \lambda_K$, on peut associer un nombre positif M tel que, pour $|t_2 - t_1| > M$, $\Phi'\{\dots; t_1; \omega'\}$ et $\Phi'\{\dots; t_2; \omega'\}$ soient indépendantes. La covariance $\Gamma_{\Phi'}(t_1, t_2)$ est donc nulle pour $|t_1 - t_2| > M$. Comme $|\Gamma_{\Phi'}| \leq 2$, (14) est vérifiée.

De telles fonctions $X(t)$ peuvent résulter du filtrage d'une fonction à accroissements indépendants dans un filtre à réponse percussionnelle limitée dans le temps.

iii) $X(t)$ est la filtrée d'une fonction à accroissements indépendants dans un filtre causal à réponse percussionnelle exponentiellement amortie. On aura alors, avec $b > 0$:

$$X(t, \omega') = \int_{-\infty}^t \exp\{-(t-\theta)/b\} dy(\theta, \omega') \quad (16)$$

où $y(\theta, \omega')$ est une fonction aléatoire de θ , définie sur Ω' , réelle, centrée et à accroissements indépendants avec une densité $\rho(\theta)$ non nécessairement stationnaire mais bornée :

$$E\{|dy(\theta)|^2\} = \rho(\theta) d\theta \quad 0 < \rho(\theta) < \rho_0 \quad (17)$$

On montre, en effet, que, sous ces hypothèses, $|\Gamma_{\Phi'}(t_1, t_2)|$ peut être majoré par une expression du type $A \exp\{-\frac{|t_1 - t_2|}{b}\}$ (cf. annexe 1). La condition ii) (équation (14)) est donc vérifiée et i) (équation (11)) le sera si $\rho(t)$ est suffisamment régulière et stable.

2.4. REMARQUE SUR LE CAS OU $X(t, \omega')$ EST STRICTEMENT STATIONNAIRE

$E\{\Phi\{\dots; t; \omega'\}\}$ existe puisque $|\Phi| = 1$. Le théorème ergodique de Birkhoff (cf. [3] p. 470) s'applique

LIENS ENTRE LES LOIS TEMPORELLES DE FONCTIONS ALEATOIRES ADMETTANT
UNE REPARTITION ASYMPTOTIQUE DE LEURS VALEURS ET LES LOIS DE CELLES
QUI S'EN DEDUISENT A TRAVERS UNE PONDERATION TEMPORELLE

donc : sur presque tout ω' , il existe une loi limite $P(\omega')$. Mais cette loi peut fort bien être aléatoire et, alors, \bar{P} n'existe pas. Ceci se produira notamment si P' traduit le mélange des lois de $X_1(t, \omega')$ et $X_2(t, \omega')$ conduisant à des lois limites respectives différentes \bar{P}_1 et \bar{P}_2 , soit :

$$X(t, \omega') = \begin{cases} X_1(t, \omega'), \text{ admettant un loi induite} \\ \bar{P}_1 : \text{Prob } 1/2 \\ \text{ou} \\ X_2(t, \omega'), \text{ admettant une loi induite} \\ \bar{P}_2 : \text{Prob } 1/2 \end{cases} \quad (18)$$

Si $X = X_1$, on aura des $P(\omega') = \bar{P}_1$ et, si $X = X_2$, des $P(\omega') = \bar{P}_2$. Il n'y aura donc pas de loi \bar{P} pour le mélange X défini par (18).

2.5. PROPRIETES HARMONIQUES DE $X(t, \omega')$ ET PASSAGE DE SA LOI TEMPORELLE P' A LA LOI INDUITE \bar{P} (SI \bar{P} EXISTE)

Nous supposons que $X(t, \omega')$ ($\omega' \in \Omega'$), possède la propriété B ainsi que ses filtrées (+) ; posons :

$$X(t, \omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \nu t} dx(\nu, \omega') \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |E\{dx(\nu_1, \omega') dx^*(\nu_2, \omega')\}| < A < +\infty \quad (19)$$

Si nous utilisons la variable aléatoire $\theta(\omega)$ introduite en 1.3., en spécifiant bien, ici, que le choix de $\omega \in \Omega$ est indépendant de celui de $\omega' \in \Omega'$ et si nous introduisons la fonction aléatoire $Y(\lambda, [\omega, \omega'])$ ($[\omega, \omega'] \in \Omega \times \Omega'$) définie par $Y(\lambda, [\omega, \omega']) = X[\lambda + \theta(\omega), \omega']$ (20) il est évident que, sur l'épreuve $\omega' \in \Omega'$, la loi temporelle de $Y(\lambda, \omega/\omega')$ (où ω décrit Ω et où ω' , fixé, conditionne Y) n'est autre que la loi que nous avons appelée P_T au paragraphe 1.1. (alinéa 1) consacré aux fonctions certaines, et que, ici, nous devons noter $P_T(\omega')$.

(+) Si on travaille sur la représentation harmonique, on pourra, pour assurer la validité de B à X et à ses filtrées, supposer, par exemple, que $X \in \Phi(\infty)$ (cf. [3] p. 366) et que, autour des multiplicités stationnaires de X considérées, des conditions étendant la condition (9.8.8.) donnée en [3], p. 396, sont valables.

De (19) et (20), on tire :

$$Y(\lambda, [\omega, \omega']) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \nu \lambda} dy(\nu, [\omega, \omega']) \quad (21)$$

avec $dy(\nu, [\omega, \omega']) = \exp\{2\pi i \nu \theta(\omega)\} dx(\nu, \omega')$ (22)

Utilisons (22) pour calculer, dans la loi $P_T(\omega')$, l'espérance mathématique

$$E_{(\omega)} \left\{ \int_{\mathcal{D}} \{ dy_{(\epsilon_1)}(\nu_1) \dots dy_{(\epsilon_K)}(\nu_K) / \omega' \} \right\} = \int_{\mathcal{D}} E_{(\omega)} \{ dy_{(\epsilon_1)}(\nu_1) \dots dy_{(\epsilon_K)}(\nu_K) / \omega' \} \quad (23)$$

où \mathcal{D} est un domaine de (ν_1, \dots, ν_K) . L'équipartition de $\theta(\omega)$ sur $[0, T]$ conduit immédiatement, pour cette espérance, à l'expression :

$$\int_{\mathcal{D}} dx_{(\epsilon_1)}(\nu_1, \omega') \dots dx_{(\epsilon_K)}(\nu_K, \omega') \exp\{ \pi i [\epsilon_1 \nu_1 + \dots + \epsilon_K \nu_K] T \} \cdot \frac{\sin \pi [\epsilon_1 \nu_1 + \dots + \epsilon_K \nu_K] T}{[\epsilon_1 \nu_1 + \dots + \epsilon_K \nu_K] T} \quad (24)$$

Si l'on fait tendre T vers $+\infty$, pour passer de $P_T(\omega')$ à $P(\omega')$, le facteur $\frac{\sin []}{[]}$ de (24) tend vers : 0 si $\epsilon_1 \nu_1 + \dots + \epsilon_K \nu_K \neq 0$ (25) et vers

$$1 \quad \text{si } \epsilon_1 \nu_1 + \dots + \epsilon_K \nu_K = 0 \quad [\mathcal{M}] \quad (26)$$

Il en découle que, pour $T \rightarrow \infty$, (24) tend vers zéro si \mathcal{D} n'a aucun point commun avec la multiplicité \mathcal{M} définie par (26), et tend, dans le cas contraire, vers :

$$\int_{\mathcal{D} \cap \mathcal{M}} dx_{(\epsilon_1)}(\nu_1) \dots dx_{(\epsilon_K)}(\nu_K) \quad (27)$$

c'est-à-dire vers la somme des éléments $dx_{(\epsilon_1)}(\nu_1) \dots dx_{(\epsilon_K)}(\nu_K)$ intérieurs à \mathcal{D} et exactement situés sur \mathcal{M} .

Sous une forme condensée, on peut écrire :

$$E_{(\omega)} \left\{ \frac{dx_{(\epsilon_1)}(\nu_1, \omega') \dots dx_{(\epsilon_K)}(\nu_K, \omega')}{(\epsilon_1) \dots (\epsilon_K)} \right\} = \begin{cases} \text{si } (\nu_1, \dots, \nu_K) \in \mathcal{M} \\ 0 \quad \text{si } (\nu_1, \dots, \nu_K) \notin \mathcal{M} \end{cases} \quad (28)$$

Les éléments $E_{(\omega)} \left\{ \frac{dy_{(\epsilon_1)}(\nu_1) \dots dy_{(\epsilon_K)}(\nu_K)}{(\epsilon_1) \dots (\epsilon_K)} / \omega' \right\}$ ne peuvent différer de zéro que sur les multiplicités stationnaires (cf. [3] p. 424). Ceci est directement lié au caractère stationnaire des lois $P(\omega')$. On notera que l'utilisation de (28) implique quelques précautions, car, en général, c'est seulement l'intégrale des éléments considérés dans des domaines \mathcal{D} de (ν_1, \dots, ν_K) qui est significative.



LIENS ENTRE LES LOIS TEMPORELLES DE FONCTIONS ALEATOIRES ADMETTANT
UNE REPARTITION ASYMPTOTIQUE DE LEURS VALEURS ET LES LOIS DE CELLES
QUI S'EN DEDUISENT A TRAVERS UNE PONDERATION TEMPORELLE

A quelle condition, la loi limite sera-t-elle de type \bar{P} c'est-à-dire certaine (indépendante de ω') ?

La réponse à cette question est analogue à celle donnée à un problème de propriétés ergodiques relatives aux spectres de puissance résolu en [3] (p. 394). Appelons $\mathcal{M}_{[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K]}$ la multiplicité définie en (26), \underline{v} le point courant sur cette multiplicité, Δ un domaine quelconque de $\mathcal{M}_{[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K]}$. De plus, pour condenser les notations, posons :

$$dx_{(\varepsilon_1)}(\underline{v}_1, \omega') \dots dx_{(\varepsilon_K)}(\underline{v}_K, \omega') = \underline{dx}(\underline{v}) \quad (29)$$

La condition pour que l'intégrale aléatoire du type

$$\int_{\Delta} \{dx_{(\varepsilon_1)}(\underline{v}_1) \dots dx_{(\varepsilon_K)}(\underline{v}_K) / \omega'\} \quad (30)$$

introduite en (27) soit p.s. indépendante de ω' est que, avec la notation condensée (29), on ait :

$$E \left\{ \left| \int_{\Delta} \underline{dx}(\underline{v}) - \int_{\Delta} E\{\underline{dx}(\underline{v})\} \right|^2 \right\} = 0 \quad (31)$$

soit

$$\int_{\Delta} \int_{\Delta'} E\{\underline{dx}(\underline{v}) \underline{dx}^*(\underline{v}')\} = \int_{\Delta} E\{\underline{dx}(\underline{v})\} \cdot \int_{\Delta'} E\{\underline{dx}^*(\underline{v}')\} \quad (32)$$

Pour étendre la condition (32) aux $G_{1(\varepsilon_1)}(\underline{v}_1) dy_{(\varepsilon_1)}(\underline{v}_1) \dots G_{K(\varepsilon_K)}(\underline{v}_K) dy_{(\varepsilon_K)}(\underline{v}_K)$, qui vont remplacer les $dy_{(\varepsilon_1)}(\underline{v}_1) \dots dy_{(\varepsilon_K)}(\underline{v}_K)$ lorsqu'on fera intervenir des filtres arbitraires de Y , il faudra la remplacer par la condition suivante, valable pour des domaines arbitraires Δ et Δ' de $\mathcal{M}_{[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K]}$:

$$\int_{\Delta} \int_{\Delta'} E\{\underline{dx}(\underline{v}) \underline{dx}^*(\underline{v}')\} = \int_{\Delta} E\{\underline{dx}(\underline{v})\} \cdot \int_{\Delta'} E\{\underline{dx}^*(\underline{v}')\} \quad (33)$$

Naturellement, l'existence de \bar{P} implique la validité de (33), $\forall K$, \forall les ε_K et $\forall (\Delta, \Delta')$.

2.6. QUELQUES CONCLUSIONS

Voici quelques conclusions simples qui découlent de ce qui précède, en admettant que \bar{P} existe.

1. Si $X(t, \omega')$ est stationnaire, on a : $\bar{P} = P'$. La répartition des $E\{dx_{(\varepsilon_1)}(\underline{v}_1) \dots dx_{(\varepsilon_K)}(\underline{v}_K)\}$ de la loi temporelle P' se transpose donc, sans modification, à \bar{P} . Dans l'une et l'autre loi, ces éléments ne peuvent être non nuls que sur les multiplicités stationnaires.

2. Si $X(t, \omega')$ est stationnaire et gaussien, il en est de même de \bar{P} .

3. Si $X(t, \omega')$ est gaussien et non stationnaire, il n'y a aucune raison pour que \bar{P} soit gaussien.

4. Si $X(t, \omega')$ est stationnaire et non gaussienne, alors \bar{P} est stationnaire et non gaussienne. On notera, en particulier, la différence entre ce résultat et les propriétés d'intégrateurs parfaits convenablement normés et à horizon de plus en plus grand -ou, de façon quasi équivalente, celles de filtres à sélectivité de plus en plus grande autour d'une fréquence centrale : de tels intégrateurs permettent de passer, sous certaines conditions, d'une fonction aléatoire stationnaire non gaussienne à une fonction aléatoire stationnaire et gaussienne [5].

ANNEXE 1

La covariance $\Gamma_{\Phi}(t_1, t_2)$ des Φ' associés à la fonction

$$\text{aléatoire } X(t, \omega') = \int_{-\infty}^t \exp\{-[(t-\theta)/b]\} dy(\theta, \omega')$$

[cf. équation (16) du texte] admet une majoration du type

$$|\Gamma_{\Phi}(t_1, t_2)| < A \exp\left\{-\left|\frac{t_1 - t_2}{b}\right|\right\}$$

On a :

$$\Gamma_{\Phi}(t_1, t_2) = E \left\{ \frac{e^{i[u_1 X(t_1 + \lambda_1) + \dots]}}{(\alpha)} \frac{e^{i[u_1 X(t_2 + \lambda_1) + \dots]}}{(\beta)} \right. \\ \left. - E \left\{ e^{i[u_1 X(t_1 + \lambda_1) + \dots]} \right\} E \left\{ e^{i[u_1 X(t_2 + \lambda_1) + \dots]} \right\} \right\} \quad (1)$$

Supposons $t_1 < t_2$. Soit t_1' le plus grand des $t_1 + \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots, K$). Les $X(t_1 + \lambda_k)$ ne dépendent que des $dy(\theta)$ pour lesquels $\theta < t_1'$ (θ passés par rapport à t_1'). Au contraire, les $X(t_2 + \lambda_k)$ dépendent, pour $|t_2 - t_1|$ assez grand, des $dy(\theta)$ passés ($\theta < t_1'$) et des $dy(\theta)$ futurs ($\theta > t_1'$). Nous noterons cela en écrivant

$$X(t_1 + \lambda_k) = X_p(t_1 + \lambda_k) \quad (\alpha)$$

et

$$X(t_2 + \lambda_k) = X_p(t_2 + \lambda_k) + X_f(t_2 + \lambda_k) \quad (\beta)$$

Tout X_p est indépendant de tout X_f .

En condensant sous les notations (α) et (β) les exponentielles ainsi désignées dans (1) et en factorisant β sous la forme $\beta = \beta_p \beta_f$ où β_p et β_f sont les exponentielles de type β respectivement construites avec les $X_p(t_2 + \lambda_k)$ et les $X_f(t_2 + \lambda_k)$, on peut mettre (1) sous la forme :

LIENS ENTRE LES LOIS TEMPORELLES DE FONCTIONS ALEATOIRES ADMETTANT
UNE REPARTITION ASYMPTOTIQUE DE LEURS VALEURS ET LES LOIS DE CELLES
QUI S'EN DEDUISENT A TRAVERS UNE PONDERATION TEMPORELLE

$$\Gamma_{\Phi}(t_1, t_2) = E\{\alpha_p \beta_p \beta_f\} - E\{\alpha_p\} E\{\beta_p\} E\{\beta_f\} \quad (3)$$

$$= \underbrace{E\{\alpha_p \beta_f\} - E\{\alpha_p\} E\{\beta_f\}}_{(1)} + \underbrace{E\{\alpha_p \beta_f [\beta_p^{-1}]\}}_{(2)}$$

$$+ \underbrace{E\{\alpha_p\} E\{\beta_f\} [1 - E\{\beta_p\}]}_{(3)} \quad (4)$$

Le terme (1) est nul puisque α_p est indépendant de β_f . Par ailleurs, de $|\alpha_p| = |\beta_f| = 1$, on déduit que les termes (2) et (3) sont, l'un et l'autre, majorés en module par : $E\{|\beta_p^{-1}|\}$. De plus, β_p peut se mettre sous la forme

$$\beta_p = e^{i\varepsilon} \text{ avec } \varepsilon = X(t'_1) \left\{ \sum u_k B_k(\lambda) \right\} e^{-\frac{t_2 - t_1}{b}} \quad (5)$$

où les $B_k(\lambda)$ (fonctions des λ) sont bornées en module [$|\cdot| \leq B$]. On termine en notant que l'on a

$$|\beta_p - 1| \leq |\varepsilon| \leq |X(t'_1)| \left\{ \sum |u_k| \right\} B e^{-\frac{t_2 - t_1}{b}} \quad (6)$$

et en majorant $E\{|X(t'_1)|\}$ par $\sqrt{E\{|X(t'_1)|^2\}}$ qui est borné par suite de l'existence de la borne supérieure ρ_0 de $\rho(\theta)$ [cf. équation (17) du texte].

Le résultat s'étend évidemment au cas $t_2 < t_1$. C'est toujours l'exponentielle $\exp\{-|(t_2 - t_1)/b|\}$ qui intervient.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] 1. BLANC-LAPIERRE A. et LEFEVRE C., Analyse harmonique généralisée et fonctions aléatoires stationnaires. C. R. Acad. Sci. Paris, série A, 274, 257-261, 1972.
2. BLANC-LAPIERRE A., Fonctions certaines admettant des répartitions asymptotiques et fonctions aléatoires stationnaires. Reprinted from "Perspectives in Probability and Statistics" edited by J. GANI, Academic Press, Londres, 1975.
3. BLANC-LAPIERRE A., Fréquence et Probabilité - Temps relatif et probabilité - Transposition à certaines fonctions non aléatoires de caractères spécifiques introduits pour l'étude des fonctions aléatoires. Huitième Colloque sur le Traitement du Signal et ses Applications, page 1, Nice, Juin 1981.
4. Les questions relatives aux fonctions certaines admettant une répartition asymptotique de leurs valeurs ont des liens étroits avec les travaux de J. BASS et ses collaborateurs. Voir notamment :
BASS J.,
- Les fonctions pseudo-aléatoires. Memorial des Sciences Mathématiques, fascicule CLIII, Gauthier-Villars, Paris, 1962.
- Fonctions stationnaires. Fonctions de corrélation. Application à la représentation spatio-temporelle de la turbulence. Ann. Inst. Henri Poincaré. Section B, vol. V, n°2, p. 135-193, Calcul des Probabilités et Statistique, 1969.
- Moyennes et mesures en mécanique quantique et en mécanique classique. Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A, vol. XXXIII, n°3, p. 301-307, Physique théorique, 1980.
BERTRANDIAS J.-P.,
- Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p. Thèse, Université de Paris, 1964.
PHAM P. H.,
- Fonctions admettant une répartition asymptotique des valeurs. C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 267, 803, 1968.
- Deux théorèmes sur les mesures asymptotiques. C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 268, 448, 1969.
- Mesures asymptotiques. Thèse, Université de Paris, 1972.
- [2] BLANC-LAPIERRE A. et PICINBONO B., Fonctions Aléatoires. Masson Editeur, Paris, 1981.
- [3] BLANC-LAPIERRE A. et FORTET R., Théorie des Fonctions Aléatoires. Masson et Cie Editeurs, Paris, 1953.
- [4] LOEVE M., Probability theory. D. Van Nostrand Compagny, 3e édition, p. 488, 1963. Voir aussi [2], p. 356, et BLANC-LAPIERRE A. et TORTRAT A., Sur la loi forte des grands nombres pour les fonctions aléatoires de second ordre. C. R. Acad. Sci. Paris, 267, p. 740-743, 1968.
- [5] PICINBONO B., Sur certains problèmes concernant la détection des signaux faibles. Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Alger, 1960.

