

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

SUR LES CONDITIONS PHYSIQUES ASSURANT L'UNICITE DE LA REPRESENTATION
DE WIGNER-VILLE COMME REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE

Patrick FLANDRIN ⁺

Wolfgang MARTIN ⁺⁺

+ ICPI Labo. Traitement du Signal, 25 rue du Plat, 69288 LYON Cedex 02 FRANCE

++Université de BONN R.F.A.

RESUME

Des travaux récents ont souligné l'importance des représentations conjointes temps-fréquence comme représentations "très parlantes" d'un signal déterministe ou d'un signal aléatoire. On a ainsi pu montrer que la représentation de Wigner-Ville, tout en n'étant pas la seule admissible, remplit la majorité des conditions physiques souhaitables.

En raisonnant sur la représentation conjointe de la covariance d'un signal harmonisable nous établissons d'abord le lien entre les fonctions de pondérations utilisées dans le cas déterministe et les matrices de transformation des bases temporelles et fréquentielles du cas aléatoire. L'ensemble des matrices admissibles ne dépend alors que d'un paramètre libre, les pondérations associées s'identifiant à des exponentielles complexes. On note que cette classe de solutions peut être obtenue de manière équivalente par deux autres approches : l'une par un raisonnement de type Mécanique Quantique alors que l'autre repose sur des arguments de type Traitement du Signal (compatibilité avec les filtrages linéaires et les modulations).

On montre alors qu'imposer à une représentation appartenant à cette classe de fournir par un moment local d'ordre un la fréquence instantanée fixe la valeur du paramètre libre. Cette valeur conduit à la seule représentation de Wigner-Ville, assurant ainsi son unicité sous les contraintes physiques imposées.

SUMMARY

A series of recent papers have emphasized the usefulness of time-frequency joint representations for the description of time-varying deterministic signals as well as non-stationary random processes. In this way, the Wigner-Ville distribution was shown to be among the most valuable candidates, according to the great number of desired physical properties it satisfies.

Starting with the joint representation of a harmonizable process, we first derive the link between the weighting functions and the transformation matrices which are used respectively in the deterministic and random cases. The set of admissible matrices depends then on only one parameter and the associated weighting functions are identified as complex exponentials. It is pointed out that the same class of solutions may be equivalently obtained either from a quantum-mechanical point of view or from a signal processing point of view (compatibility with linear filtering and modulation).

If we finally impose to obtain the instantaneous frequency through the first order local moment of the representation, we show that the free parameter can take on only one value, corresponding to the Wigner-Ville distribution. This ensures the unicity of this distribution as an admissible time-frequency representation, according to the imposed physical properties.



SUR LES CONDITIONS PHYSIQUES ASSURANT L'UNICITE DE LA REPRESENTATION
DE WIGNER-VILLE COMME REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE

INTRODUCTION

L'analyse de signaux certains modulés en amplitude et en fréquence (tels ceux que l'on rencontre couramment en analyse de la parole, géophysique, radar, sonar,...) ou de processus aléatoires non-stationnaires nécessite de pouvoir leur associer une distribution énergétique conjointe dans le plan temps-fréquence. Une telle distribution ne peut cependant pas être définie de manière unique et un grand nombre de définitions ont été proposées dans le passé. Ainsi les analyses de type "spectre à court-terme" reposent sur l'idée la plus simple : elles considèrent une situation non-stationnaire comme une succession de situations quasi-stationnaires pour lesquelles une analyse spectrale usuelle est pertinente. D'autres analyses plus élaborées, comme celle de Ville [8] analogue à celle de Wigner en Mécanique Quantique ou celle de Rihaczek [9] ont été proposées sur la base de conditions physiques différentes. En fait, il a été montré [4] que l'ensemble des formulations proposées pouvait rentrer dans un cadre formel unique, chaque représentation étant caractérisée par une fonction de pondération, arbitraire dans une large classe. Une série de travaux récents [1][2][3] ont souligné l'importance de ces représentations pour présenter une information "parlante" sur les lois de modulation d'un signal certain dans le plan temps-fréquence. La représentation de Wigner-Ville a tout particulièrement reçu un regain d'intérêt et son extension à l'analyse des processus harmonisables a été proposée [5][6].

Ce papier se propose alors de cerner sur quelles conditions physiques repose précisément le choix de cette représentation. Le lien entre les cas certain et aléatoire sera envisagé et trois ensembles de conditions physiques également souhaitables seront discutées, pour assurer l'unicité de la distribution de Wigner-Ville comme représentation admissible.

- REPRESENTATIONS TEMPS-FREQUENCE -

1 - Signaux certains

Si l'on considère un signal certain de représentation temporelle $X(t) \in L^2(\mathbb{R})$, on sait [3] qu'il est possible d'en fournir une représentation P_X , conjointe en temps t et en fréquence ν (ou pulsation $\omega = 2\pi\nu$), par une forme sesquili-néaire du type :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, \omega; \mu, \nu) X^*(\mu) X(\nu) d\mu d\nu \quad (1)$$

Il suffit alors d'imposer à (1) d'être compatible avec toute translation temporelle et fréquentielle (ce qui est indispensable physiquement) pour particulariser φ [3] et retrouver la structure admissible la plus générale [4][1] :

$$P_X(t, \omega; \xi) = \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(\mu-t)} f(\xi, \tau) X(\mu + \frac{\tau}{2}) X^*(\mu - \frac{\tau}{2}) e^{-i\omega\tau} d\xi d\mu d\tau \quad (2-a)$$

$$P_X(t, \omega; \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(\xi-\omega)} f(\xi, \tau) x(\xi - \frac{\tau}{2}) x^*(\xi + \frac{\tau}{2}) e^{-i\omega\tau} d\xi d\tau \quad (2-b)$$

avec : $x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt$ et où $f(\xi, \tau)$ se comporte comme une fonction de pondération arbitraire.

2 - Processus harmonisables

Considérons maintenant que $X(t)$ est un processus aléatoire non-stationnaire que l'on supposera centré. On peut alors montrer [5] que la classe naturelle des processus non stationnaires sur lesquels il est possible de définir une distribution énergétique fréquentielle dépendant du temps est la classe des processus harmonisables : C'est à de tels processus que nous nous intéresserons donc.

Par définition [7], un processus X est dit harmonisable (ou à covariance harmonisable) si sa covariance :

$$K_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1) X^*(t_2)\}$$

peut s'écrire :

$$K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda t_1 - \mu t_2)} d^2_{\Phi_X}(\lambda, \mu) \quad (3)$$

Un tel processus admet une représentation harmonique :

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dY(\lambda)$$

dans laquelle le processus Y n'est pas nécessairement à accroissements orthogonaux.

SUR LES CONDITIONS PHYSIQUES ASSURANT L'UNICITE DE LA REPRESENTATION
DE WIGNER-VILLE COMME REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE

L'harmonisabilité apparaît ainsi comme une généralisation naturelle de la stationnarité de second ordre et la classe des processus harmonisables englobe une large variété de processus non stationnaires.

La relation (3) définit, par une transformation de Fourier-Stieljes bidimensionnelle, une relation entre deux descriptions au second ordre de X et l'on suppose :

$$\int \varphi_x / d^2 \mathbb{F}_x(\lambda, \mu) = \varphi_x(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$$

L'une de ces descriptions (K_x) est de type temps-temps alors que l'autre (φ_x) peut s'interpréter de manière univoque comme étant de type fréquence-fréquence [5].

Une représentation temps-fréquence :

$C_x(t, \omega)$ apparaît donc comme intermédiaire entre $K_x(t_1, t_2)$ et $\varphi_x(\lambda, \mu)$, et il est naturel de chercher à la relier à chacune de celles-ci par une transformation de Fourier monodimensionnelle de telle sorte que la linéarité des relations :

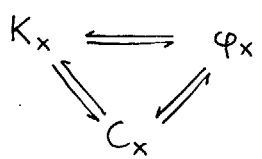
$$K_x(t_1, t_2) \leftrightarrow C_x(t, \omega) \leftrightarrow \varphi_x(\lambda, \mu)$$

soit conservée.

PROCESSUS HARMONISABLES : REPRESENTATIONS ADMISSIBLES ET LIEN AVEC LE CAS CERTAIN.

1 - Commutativité - Matrices de transformation

Les relations qui viennent d'être imposées entre K_x , φ_x et C_x ne permettent de donner un sens à cette dernière que si le diagramme de transformation de Fourier :



est commutatif, ce qui implique :

$$K_x(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} C_x(t, \omega) d\omega \quad (4-a)$$

$$\text{et : } C_x(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} \varphi_x(a\omega + b\xi, c\omega + d\xi) d\xi \quad (4-b)$$

pour toutes transformations linéaires des coordonnées :

$$\begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} =: \underline{M}_t \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad (5a)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \xi \end{pmatrix} =: \underline{M}_f \begin{pmatrix} \omega \\ \xi \end{pmatrix} \quad (5b)$$

De plus, l'invariance des aires élémentaires définies par les vecteurs normés des bases temps-temps et fréquence-fréquence (et nécessaire physiquement pour assurer l'invariance énergétique sous les transformations) impose la condition supplémentaire :

$$|\det \underline{M}_t| = |\det \underline{M}_f| = 1 \quad (6)$$

Portant (4-b) dans (4-a), on obtient :

$$K_x(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega\tau + \xi t)} \varphi_x(a\omega + b\xi, c\omega + d\xi) d\omega d\xi$$

ce qui, pour être compatible avec (3) impose :

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \xi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ -t_2 \end{pmatrix}$$

où t désigne la transposition. On en déduit que les matrices de transformation \underline{M}_t et \underline{M}_f doivent vérifier :

$$\underline{M}_f^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{M}_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \underline{I}$$

où \underline{I} est la matrice identité. Elles sont alors liées l'une à l'autre par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ -\delta & -\beta \end{pmatrix} \quad (7)$$

et les transformations fréquentielles pourront se déduire des transformations temporelles.

2 - Lien avec les pondérations du cas certain

En écrivant la covariance $K_x(t_1, t_2)$ à l'aide de (5-a)

$$K_x(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i[(\alpha+\beta)\omega\tau + \alpha-\beta\xi t - (\gamma+\delta)\omega t + \delta-\gamma\xi t]} \varphi_x(\omega-\frac{\xi}{2}, \omega+\frac{\xi}{2}) d\omega d\xi \quad (8)$$

on peut la comparer avec la représentation conjointe d'un signal certain qui vérifie d'après (2-b) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} \varphi_x(t, \omega; \xi) d\omega = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} f(\xi, \tau) \chi(\omega-\frac{\xi}{2}) \chi^*(\omega+\frac{\xi}{2}) e^{-i\xi t} d\omega d\xi \quad (9)$$

Ainsi, en faisant jouer à $\varphi_x(\omega-\frac{\xi}{2}, \omega+\frac{\xi}{2})$ un rôle semblable, dans le cas aléatoire, à celui de $\chi(\omega-\frac{\xi}{2}) \cdot \chi^*(\omega+\frac{\xi}{2})$ dans le cas certain, il est possible de comparer les expressions (8) et (9).

La covariance vérifiera la relation (4-a) recherchée si :

$$\alpha + \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = \alpha - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\gamma - \delta}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma + \delta = 2(\gamma - 1)$$

Ceci définit pour représentation admissibles les expressions du type :

$$C_x(t, \omega; \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau(\xi-\omega)} f(\xi, \tau) \varphi_x(\xi-\frac{\tau}{2}, \xi+\frac{\tau}{2}) e^{-i\xi t} d\xi d\tau \quad (10)$$

avec pour fonction de pondération :

$$f(\xi, \tau) = e^{i(\alpha-\frac{1}{2})\xi\tau} \cdot e^{-i2(\gamma-1)\omega t}$$

La condition supplémentaire $|\det \underline{M}_t| = 1$ impose

$\gamma = \pm 1$ dont on ne gardera que la solution :



$\gamma = 1$ pour deux raisons : la première est d'assurer que la variable ω soit à l'intérieur de l'intervalle $[\lambda, \mu]$ défini par (3) ; la deuxième est que f soit ainsi indépendante de t et ω .
On retient donc les valeurs :

$$\alpha, \beta = 1 - \alpha, \gamma = 1, \delta = -1 \quad (11)$$

et la classe des représentations admissibles, sous les contraintes imposées, est définie par (10) avec :

$$f(\xi, \tau) = e^{i\Delta\xi\tau} =: f_{\Delta}(\xi, \tau); \Delta := \alpha - \frac{1}{2} \quad (12)$$

Cette fonction de pondération décrit de manière équivalente l'ensemble des matrices admissibles :

$$M_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \Delta & \frac{1}{2} - \Delta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; M_f = \begin{pmatrix} 1 & \Delta + \frac{1}{2} \\ 1 & \Delta - \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \det M_t = \det M_f = -1$$

3 - Représentations admissibles et propriétés

Portant (12) dans (10) (ou de manière équivalente (7) dans (4-b) avec les valeurs (11) venant d'être calculées) on obtient la formulation recherchée :

$$C_x(t, \omega; f_{\Delta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\omega - (\Delta + \frac{1}{2})\xi, \omega - (\Delta - \frac{1}{2})\xi) e^{-i\xi t} d\xi \quad (13)$$

Si l'on pose $\Delta = 0$, on retrouve la distribution de Wigner-Ville [8], correspondant bien, dans le cas certain, à la pondération :

$$f(\xi, \tau) = 1 = f_0(\xi, \tau) \quad ([4])$$

$$C_x(t, \omega; f_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\omega - \frac{\xi}{2}, \omega + \frac{\xi}{2}) e^{-i\xi t} d\xi$$

De même le choix $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ conduit à la représentation de Rihaczek [9] et sa conjuguée complexe :

$$C_x(t, \omega; f_{\pm \frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\omega - \xi, \omega) e^{-i\xi t} d\xi$$

Notons cependant que la plupart des autres représentations, comme celle de Page [10], ou encore les méthodes de type sonagramme ou spectre à court terme, n'entrent pas dans la classe (12) [4] et ne constituent donc pas des représentations conjointes admissibles au sens défini ci-dessus.

La distribution (13) trouvée possède des propriétés marginales souhaitables puisque :

$$i) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(t, \omega; f_{\Delta}) d\omega = \text{Var} \{ X(t) \} \quad (14)$$

En effet, d'après (4-a), (5-a) et (11) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} C_x(t, \omega; f_{\Delta}) d\omega = K_x(t + (1-\alpha)\tau, t - \alpha\tau)$$

ce qui, en posant $\tau = 0$, fournit (14).

ii) de même, on déduit directement de (13) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_x(t, \omega; f_{\Delta}) dt = \varphi_x(\omega, \omega) \quad (15)$$

Ces résultats sont en tous points semblables à ceux du cas certain pour lequel on sait que [1] [3] :

$$f(\xi, 0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_x(t, \omega; f) d\omega = |X(t)|^2 \quad (16-a)$$

$$f(0, \tau) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_x(t, \omega; f) dt = |\alpha(\omega)|^2 \quad (16-b)$$

Or on vérifie sur (12) que : $f_{\Delta}(\xi, 0) = f_{\Delta}(0, \tau) = 1$.

Ces propriétés montrent déjà un avantage certain des distributions (13) sur d'autres représentations comme les spectrogrammes ou sonagrammes, pour lesquelles les conditions (16) ne sont pas vérifiées [4] interdisant ainsi à (14) et à (15) d'être satisfaites.

Ainsi, imposer à la représentation conjointe C_x que l'on se proposait de construire, de satisfaire à la commutativité du diagramme $K_x \begin{matrix} \nearrow \varphi_x \\ \searrow C_x \end{matrix} a$ conduit à n'admettre que les matrices définies par (11) et (7). Celles-ci ne dépendent que d'un paramètre libre et sont équivalentes, vis-à-vis de la formulation générale, à une fonction de pondération de type exponentielle complexe.

Avant de restreindre encore cette classe privilégiée, nous allons d'abord envisager comment elle peut être obtenue par d'autres arguments que ceux précédemment employés.

AUTRES JUSTIFICATIONS DE LA CLASSE ADMISSIBLE

1 - Approche de Janssen [11]

Si l'on considère une représentation issue de la formulation générale (2) et qu'on lui impose de satisfaire aux conditions :

$$(C1-a) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_x(t, \omega; f) d\omega = |X(t)|^2$$

$$(C1-b) \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_x(t, \omega; f) dt = |\alpha(\omega)|^2$$

$$(C2-a) X(t) = 0, |t| > T \Rightarrow \rho_x(t, \omega; f) = 0, |t| > T, \forall \omega$$

$$(C2-b) \alpha(\omega) = 0, |\omega| > \Omega \Rightarrow \rho_x(t, \omega; f) = 0, |\omega| > \Omega, \forall t$$

$$(C3) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{x_1}(t, \omega; f) \rho_{x_2}^*(t, \omega; f) dt d\omega = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(t) X_2^*(t) dt \right|^2$$

SUR LES CONDITIONS PHYSIQUES ASSURANT L'UNICITE DE LA REPRESENTATION
DE WIGNER-VILLE COMME REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE

Janssen montre [11] que la fonction de pondération doit nécessairement être de la forme :

$$f(\xi, \tau) = e^{i\alpha \xi \tau} \quad ; \quad |\alpha| \leq \frac{1}{2}$$

Il retrouve ainsi, en la particularisant, la classe définie précédemment.

On peut, dans une première interprétation, considérer que les conditions sur lesquelles repose maintenant cette classe sont dues à des arguments de type mécanique quantique. En effet, si l'on remplace le signal X par une fonction d'onde ψ et si l'on fait jouer à la position et à l'impulsion le rôle tenu ici par le temps et la pulsation, il est possible de chercher à fournir une description équivalente à celle de la mécanique quantique en utilisant une description du type (2). Cette représentation s'interprète alors comme une pseudo-densité de probabilité, conjointe en position et impulsion dans l'espace de phase, et, dans le cadre de ce formalisme, il est naturel d'imposer la "formule de Moyal" (C3). De même, les conditions (C1) reviennent à imposer que les densités de probabilité en position ou en impulsion puissent s'obtenir comme distributions marginales de la représentation cherchée. La condition (C2) exprime enfin une condition de localisation.

Nous pensons cependant que ces mêmes contraintes peuvent également se justifier en termes de théorie du signal. En effet :

- i) (C1) impose à la représentation cherchée de fournir la puissance instantanée et la densité spectrale par distributions marginales ;
- ii) (C2) impose que la propriété de durée limitée (et de bande limitée) d'un signal se traduise de manière équivalente sur sa représentation conjointe
- iii) (C3) reprend, en la généralisant, l'idée d'utiliser des corrélations de spectrogrammes [12] dans des problèmes de détection, d'estimation ou de classification.

Ainsi, un nouvel ensemble de conditions, justifiable tant en mécanique quantique qu'en théorie du signal, rejoint la classe trouvée en (12). Nous allons voir maintenant qu'un troisième ensemble de conditions, reposant sur des arguments plus spécifiquement de type traitement du signal, fournit encore cette même solution.

2 - Approche de type traitement du signal

Considérons les conditions

$$(C4) \quad X(t) = (X_1 * X_2)(t) \Rightarrow \rho_X(t, \omega; f) = (\rho_{X_1}(t, \omega; f) *_{\omega} \rho_{X_2}(t, \omega; f))_{\omega=t}$$

$$(C5) \quad X(t) = X_1(t) \cdot X_2(t) \Rightarrow \rho_X(t, \omega; f) = (\rho_{X_1}(t, \xi; f) *_{\xi} \rho_{X_2}(t, \xi; f))_{\xi=\omega}$$

(C4) traduit la stabilité par filtrage linéaire et (C5) la stabilité par modulation de produit. Ces conditions sont donc naturelles dans la mesure où une représentation conjointe est souvent amenée à présenter une information sur les transformations subies par un signal. Citons, sans pouvoir insister, l'exemple de la sismique pétrolière [13] pour (C4) et, pour (C5) la possibilité de pouvoir travailler sur des tranches pondérées de signal (e.g. généralisation des méthodes du type "analyse spectrale évolutive par fenêtre glissante" aux analyses pseudo-Wigner [1]).

On montre alors que [3] :

$$(C4) \Rightarrow f(\xi, \tau) \cdot f(\xi, \tau') = f(\xi, \tau + \tau'), \quad \forall (\xi, \tau, \tau') \quad (18-a)$$

$$(C5) \Rightarrow f(\xi, \tau) \cdot f(\xi', \tau) = f(\xi + \xi', \tau), \quad \forall (\xi, \xi', \tau) \quad (18-b)$$

et imposer simultanément (18-a) et (18-b) conduit sous hypothèse de continuité à :

$$f(\xi, \tau) = e^{\alpha \xi \tau}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (19)$$

On voit sur (18) ou (19) que : $f(\xi, 0) = f(0, \tau) = 1$ et la vérification de (C4) et (C5) impose a fortiori celle de (C1).

Pour retrouver la forme (16), deux méthodes sont alors possibles :

i) on impose (C3) $\Rightarrow |f| = 1$ [11] et :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} / \alpha = i\alpha \Rightarrow f(\xi, \tau) = e^{i\alpha \xi \tau}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ou : ii) on interprète f comme une fonction de pondération maximale à l'origine et :

$$0 < |f| \leq 1 \Rightarrow f(\xi, \tau) = e^{i\alpha \xi \tau}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Cette classe, identique à (12), se particularise enfin à (16) si l'on impose de surcroît (C2) [11]

Ainsi, nous avons de nouveau obtenu la classe précédemment trouvée, reposant cette fois essentiellement sur des arguments naturels en traitement du signal : la compatibilité avec les filtrages linéaires et les modulations.

FREQUENCE INSTANTANEE ET UNICITE
DE LA DISTRIBUTION DE WIGNER-VILLE

L'ensemble des résultats précédents montre que, pour un ensemble assez large de contraintes, les seules représentations admissibles sont de la forme :

$$\rho_X(t, \omega; f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega - (s + \frac{1}{2})\xi) x^*(\omega - (s - \frac{1}{2})\xi) e^{-i\xi t} d\xi, \quad |\alpha| \leq \frac{1}{2}$$

pour un signal certain et :

$$C_X(t, \omega; f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_X(\omega - (s + \frac{1}{2})\xi, \omega - (s - \frac{1}{2})\xi) e^{-i\xi t} d\xi, \quad |\alpha| \leq \frac{1}{2}$$

pour un processus harmonisable.

Ces représentations permettent, en particulier, d'accéder par (16-a) et (14) à la puissance instantanée d'un signal certain ou à la variance d'un processus



harmonisable, ce qui est un premier pas dans la démodulation de tels signaux. Nous allons maintenant voir que le pas suivant, l'obtention de la fréquence instantanée, va suffir à réduire l'arbitraire des représentations admissibles en fixant la valeur du paramètre libre Δ .

1 - Signal certain

Par définition, la fréquence instantanée $\nu_i(t)$ d'un signal réel $X(t)$ est donnée par :

$$\omega_i(t) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Arg} Z(t) ; \omega_i(t) = 2\pi \nu_i(t) \quad (20)$$

où Z est le signal analytique associé à X [8].

On sait alors [1] [3] qu'une représentation du type (2) permet d'accéder à cette grandeur par un pseudo-moment local d'ordre un :

$$\omega_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega \rho_Z(t, \omega; f) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_Z(t, \omega; f) d\omega} \quad (21)$$

si la pondération vérifie :

$$f(\delta, 0) = 1 ; \frac{\partial f}{\partial \tau}(\delta, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \forall \delta \quad (22)$$

Dans le cas particulier :

$$f_\Delta(\delta, \tau) = e^{i\Delta\delta\tau}$$

la relation (22) ne pourra être satisfaite que si :

$$\Delta = 0 \Rightarrow f_\Delta(\delta, \tau) = f_0(\delta, \tau) = 1 \quad (23)$$

Ainsi, dans la classe des représentations définies précédemment, la condition portant sur l'obtention de la fréquence instantanée suffit à assurer que seule la valeur $\Delta = 0$ convient, i.e. que la seule représentation admissible est celle de Wigner-Ville.

Notons qu'alors :

$$f_\Delta(0, \tau) = 1 ; \frac{\partial f}{\partial \delta}(\delta, \tau) \Big|_{\delta=0} = 0, \quad \forall \tau \quad (24)$$

ce qui assure également que le retard de groupe [8] :

$$t_g(\omega) = -\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Arg} \hat{z}(\omega) \quad (25)$$

s'obtient comme pseudo-moment local d'ordre un de la représentation [1] [3] :

$$t_g(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t \rho_Z(t, \omega; f) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_Z(t, \omega; f) dt} \quad (26)$$

2 - Processus harmonisables

Si l'on considère maintenant un processus harmonisable X auquel on associe le processus analytique Z , il est également possible d'en définir la fréquence instantanée.

En supposant le processus Z dérivable en moyenne quadratique et de dérivée \dot{Z} , on conviendra d'appeler fréquence instantanée la quantité $\nu_i(t)$ telle que [6] :

$$\omega_i(t) = \text{Im} \left\{ \frac{\dot{Z}(t)Z^*(t)}{\text{Var}\{Z(t)\}} \right\} = 2\pi \nu_i(t) \quad (27)$$

On sait [6] que cette grandeur aléatoire admet pour espérance mathématique :

$$E\{\omega_i(t)\} = \text{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} K_Z(t, t') \Big|_{t'=t} \right\} \quad (28)$$

et par une démarche analogue à celle du cas certain, on peut alors imposer que (28) se retrouve à partir de C_Z par un pseudo-moment local d'ordre un :

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega C_Z(t, \omega; f) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} C_Z(t, \omega; f) d\omega} = \frac{\text{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} K_Z(t, t') \Big|_{t'=t} \right\}}{\text{Var}\{Z(t)\}} \quad (29)$$

Partant de (4-a) et (11), il est possible de mettre la représentation (13) sous la forme équivalente :

$$C_Z(t, \omega; f_\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_Z(t - (\delta - \frac{1}{2})\tau, t - (\delta + \frac{1}{2})\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (30)$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega C_Z(t, \omega; f_\Delta) d\omega &= i \frac{\partial}{\partial \tau} [K_Z(t - (\delta - \frac{1}{2})\tau, t - (\delta + \frac{1}{2})\tau)] \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{i}{2} [(1-2\Delta)K_{ZZ}(t, t) - (1+2\Delta)K_{ZZ}^*(t, t)] \\ &= \frac{1}{2i} [(1-2\Delta) \frac{\partial}{\partial t} K_Z(t, t') - (1+2\Delta) \frac{\partial}{\partial t'} K_Z^*(t, t')] \Big|_{t'=t} \end{aligned}$$

Par suite, la relation (29) sera vérifiée si $\Delta = 0$, ce qui conduit, tout comme dans le cas certain, à la seule représentation de Wigner-Ville.

CONCLUSION

La classe des processus harmonisables représente une large classe de processus non-stationnaires pour lesquels une représentation conjointe en temps et fréquence est envisageable. On a montré qu'une telle description au second ordre, intermédiaire entre la covariance et la distribution spectrale, ne pouvait être obtenue de façon cohérente que par un ensemble de transformations admissibles des bases temps-temps et fréquence-fréquence. On a alors vu que ces transformations, dépendant d'un seul paramètre, étaient formellement équivalentes à une fonction de pondération particulière de la formulation générale des représentations conjointes d'un signal certain. Une telle pondération, de type exponentielle complexe, peut être obtenue par au moins deux autres ensembles cohérents de conditions souhaitables, donnant ainsi aux représentations associés un rôle privilégié. Imposer l'obtention supplémentaire de la fréquence instantanée a enfin suffi à réduire les distributions admissibles à la seule représentation de Wigner-Ville.

SUR LES CONDITIONS PHYSIQUES ASSURANT L'UNICITE DE LA REPRESENTATION
DE WIGNER-VILLE COMME REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE

Cette représentation apparaît donc comme le seul outil d'analyse possible, sous les contraintes envisagées, de l'étude dans le plan temps-fréquence des processus harmonisables et des signaux certains modulés.

REFERENCES

- [1] T.A.C.M. GLAASEN, W.F.G. MECKLENBRÄUKER : "The Wigner distribution : a tool for time frequency signal analysis", Parts I,II,III, Philips J. Res . 35, 217-250, 276-300, 372-383, 1980
- [2] P. FLANDRIN., B. ESCUDIE : "Time and frequency representation of finite energy signals: a physical property as a result of an hilbertian condition", Signal Proc. 2, 2, 93-100, 1980
- [3] P. FLANDRIN : "Représentations des signaux dans le plan temps-fréquence", Thèse DI, ENSIEG-INPG, Grenoble, 1982.
- [4] B. ESCUDIE, J. GREA : "Sur une formulation générale de la représentation en temps et fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie", C.R.Ac. Sc. Paris, A, 283, 1049-1051, 1976
- [5] W. MARTIN : "Time-frequency analysis of non-stationary processes", Proc. IEEE-ISIT, Les Arcs, 1982
- [6] W. MARTIN : "Time-frequency analysis of random signals", Proc. IEEE-ICASSP, 1329-1332, Paris 1982
- [7] A. BLANC-LAPIERRE, B. PICINBONO : "Fonctions aléatoires", Masson, Paris, 1981
- [8] J. VILLE : "Théorie et applications de la notion de signal analytique" C. et T. , 2^oA , 1, 61.74, 1948
- [9] A.W. RIHACZEK : "Signal energy distribution in time and frequency", IEEE Trans. IT-14, 3, 369-374, 1968
- [10] C.H. PAGE : "Instantaneous power spectra", J. Appl. Phys. , 23, 1, 103-106, 1952
- [11] A.J.E.M. JANSSEN : "On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane", Philips J. Res., 37, 79-110, 1982.
- [12] R.A. ALTES : "Detection , estimation and classification with spectrograms" JASA, 59,1, 97-105, 1976
- [13] B. BOUACHACHE, B. ESCUDIE, J.M. KOMATI TSEH : "Sur la possibilité d'utiliser la représentation conjointe en temps et fréquence dans l'analyse des signaux modulés en fréquence émis en vibrosismique" 7^e Coll. Grets, 121/1-121/6, Nice, 1979

REMERCIEMENTS

Les auteurs se plaisent à remercier le Prof. B. Escudié (ICPI, Lyon) pour l'aide qu'il a pu leur apporter.
L'un d'eux (W.M.) tient à remercier la Deutsche Forschungsgemeinschaft pour son support financier (Ma 895/2).

