NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

Lissage des fonctions de WIGNER-VILLE.

M.R FEIX* G. MOURGUES*.
P. BERTRAND□ J.P. DOREMUS□ B. IZRAR□ NGUYEN V.T□

* PMMS/CNRS Université d'Orléans
45045 Orléans cedex

□ Physique Théorique - Université de Nancy
54506 Vandoeuvre cedex

RESUME

Pour un signal donné, suivant un travail initié par Wigner, Ville a introduit une distribution d'énergie dans le plan temps fréquence. Deux difficultés se présentent. La première est la non positivité de la fonction, la deuxième est la difficulté de récupérer pour les signaux unimodulaires de la forme exp i $\phi(t)$, la définition usuelle de la fréquence instantanée $\omega(t) = d\phi / dt$.

Nous montrons que :
On peut introduire pour la fonction de Wigner, un noyau de lissage autour d'un point t,ω donnant une valeur positive. Deux ensembles de noyaux sont introduits et l'élément le plus intéressant est celui correspondant à la double gaussienne en t et ω avec les supports σ_t et σ_ω tels que $\sigma_t \sigma_\omega = 1/2$.

La récupération de la fréquence instantanée est un problème équivalent au problème de localisation et du passage à la limite classique lors d'une application d'un pulse de potentiel en mécanique quantique.

La limite classique est obtenue pour des signaux de très haute fréquence (comparé à l'inverse du temps caractéristique du signal). Mais plus précisément, les propriétés de localisation dans l'espace temps fréquence sont obtenus dans la double limite ω tendant d'abord vers l'infini et deuxièmement σ_t (durée caractéristique du lissage) tendant vers zéro. Mathématiquement, si ω tend vers l'infini comme ε^{-1} σ_t doit tendre vers zéro comme ε^{α} avec $1/2<\alpha<1$.

SUMMARY

From a given signal, following a work by Wigner, Ville introduced an energy distribution in the time frequency domain. Two difficulties are met : first the non positivity of this function, secondly, the difficulty for unimodular signal of the form exp i$\phi(t)$ to recover the usual definition of the instantaneous frequency $\omega(t) = d\phi / dt$.

We show that :
A kernel can be introduced which smooth the Wigner function around a point t,ω and give a positive value. Two sets of kernels are built and the most interesting element is the double gaussian in t and ω of supports σ_t and σ_ω such that $\sigma_t \sigma_\omega = 1/2$.

The recovery of the instantaneous frequency is strictly equivalent to the problem of localisation in quantium mechanics and more precisely to the obtention of the classical limit for a sudden pulse of potential. The classical limit is obtained for those signals with very high frequency (compared to the inverse of the characteristic time of the signal). But more precisely the properties of localisation in the time frequency space are obtained in the double limit ω going first to infinity and, secondly, σ_t the characteristic time of smoothing going to zero.

From a more mathematical point of view, it can be said that if ω goes to infinity like ε^{-1}, σ_t must go to zero like ε^{α} with $1/2<\alpha<1$.

I INTRODUCTION

Il y a entre les tentatives de définition d'une (pseudo) fonction de distribution dans l'espace des phases (xp) de la mécanique quantique (MQ) et le même essai dans l'espace temps fréquence en théorie du signal (TS) des analogies mathématiques qui ont été maintes fois soulignées.
Il s'agit dans les deux cas de passer d'une fonction d'une variable (fonction d'onde $\psi(x)$, signal $Z(t)$) à une fonction à deux variables x,p ou t,ω.
Tout en continuant d'exploiter ces analogies mathématiques, et même en en soulignant de nouvelles, il est toutefois nécessaire de réaliser que cette analogie mathématique recouvre deux réalités physiques fort différentes.
Sans nous appesantir sur ce point, montrons dans un tableau ce que nous entendons par là.

	réalité perçue	outil de description	nécéssité d'une pondération et d'un lissage
T.S.	$Z(t)$	un couple $<t>,<\omega>$?	naturelle
M.Q.	la particule	$\psi(x)$	se heurte à l'idée classique d'une particule ponctuelle.

Le tableau s'explique de lui-même. Il se caractérise par l'inversion de la réalité perçue et de l'outil de description et peut se traduire par le fait qu'en M.Q., toute la difficulté est de comprendre ce qu'est la fonction d'onde associée à une particule cependant qu'en T.S., il s'agit de savoir si on peut associer un couple $<t>,<\omega>$ à un signal $Z(t)$. Cette différence dans les rôles respectifs de $\psi(x)$ et $Z(t)$ se traduit dans le fait qu'en T.S., il semblera naturel d'admettre que $<t>,<\omega>$ peuvent être flous et procéder d'une certaine opération de moyenne alors que nous aimerions conserver, au moins en principe, la possibilité de définir sans équivoque la position et le moment.

Terminons cette introduction sur deux remarques. La première est sur les correspondances M.Q. → T.S.

$$\text{M.Q.}\left\{\begin{array}{ccc} x & \to & t \\ p & \to & \omega \\ \psi(x) & \to & Z(t) \\ \hbar & \to & 1 \end{array}\right\}\text{T.S.}$$

On n'a pas à sa disposition en T.S. un paramètre que l'on peut faire tendre formellement vers zero pour retrouver la limite classique. Nous verrons toutefois qu'il est possible d'introduire l'équivalent de la limite classique en T.S. et qu'en fait cette limite jouera un grand rôle.
La deuxième remarque est qu'il n'y a évidemment pas d'équation d'évolution en T.S. analogue à l'équation de Schrœdinger.
Toutefois, on va montrer que les connaissances acquises sur les solutions de cette équation vont nous permettre d'interprèter la fonction de distribution pour les signaux unimodulaires comme ceux introduits en |1|.

II FONCTION DE WIGNER-VILLE.

On souhaiterait une forme biquadratique en Z, positive si possible, et redonnant les distributions marginales (intégrées respectivement sur la fréquence et le temps).
En M.Q. plusieurs formes de quasi fonction de distribution ont été proposées, liées au principe de correspondance. Toutefois, le rôle privilégié de la fonction initialement introduite par Wigner-Ville, a été récemment reconnu |2|. En T.S., une démarche un peu différente a été introduite en particulier par Escudié et alii |3|, avec comme définition généralisée de $f(t,\omega)$:

$$(1)\quad f(t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\iiint D(T,\Omega)\, Z(t'+\tfrac{T}{2})\, Z^*(t'-\tfrac{T}{2})\, e^{-i\omega T}\, e^{-i\Omega(t-t')}\, d\Omega\, dt'\, dT$$

Le cas de Wigner-Ville correspond à $D = 1/2\pi$, l'intégrale triple devenant alors une intégrale simple.

Nous allons garder en T.S. ce statut privilégié pour la fonction de Wigner-Ville, notée dorénavant f_W et par contre nous procéderons à un lissage sur un petit élément de volume de l'espace des phases t,ω en introduisant un noyau K tel que :

$$\tilde{f}(t,\omega) = \iint K(t-t',\omega-\omega')\ f_w(t',\omega')\ dt'd\omega'$$

avec $\iint K(t,\omega)\ dtd\omega = 1$

L'intérêt du concept de lissage vient du fait que nous savons que la mécanique quantique redonne les résultats classiques si l'on veut bien ignorer les détails de la fonction à l'intérieur d'une cellule de dimension $\hbar$. En particulier on remarque que la négativité de f_w se compense lorsqu'on intègre sur des petits domaines de l'espace x,p, justement de l'ordre de $\hbar$. Par contre, il est vain d'essayer de se débarrasser de la propriété de négativité en intégrant seulement sur p ou x en M.Q. (respectivement t et ω en T.S.).

Il est bien évident qu'il y a une relation entre $D(T,\Omega)$ et $K(t,\omega)$, et que dans les 2 cas, on aboutit à une intégrale triple. En fait on montre aisément que K est la double transformée de Fourier de D.

$$K(t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\iint D(T,\Omega)\ \exp - i(\Omega t + \omega T)\ dTd\Omega$$

LISSAGE DE WIGNER-VILLE.

On peut démontrer le théorème suivant : Si l'on choisit pour $K(t,\omega)$ la fonction de Wigner-Ville correspondante à une fonction $\rho(t)$ quelconque, normée

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\ \ \rho^*(t)dt = 1$$

alors f_w est positive quels que soient t,ω et $Z(t)$, et plus précisément

$$(2)\quad \tilde{f}_w(t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\left|\int Z(\tau)\ \rho^*(t-\tau)\ \exp - i\omega\tau d\tau\right|^2$$

pour plus de détails on se reportera à |3|.

On remarquera que le noyau étant lui-même une fonction de WV, il sera positif, si et seulement si f est une gaussienne |4| avec

$$\rho(t) = (2\pi)^{-1/4}\,\sigma_t^{-1/2} \exp - t^2/4\sigma_t^2$$

ce qui correspond pour le noyau K à une double gaussienne.

$$(2)_{\text{bis}}\quad K(t,\omega) = \frac{1}{2\pi\sigma_t\sigma_\omega}\exp - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\sigma_t^2} + \frac{\omega^2}{\sigma_\omega^2}\right)$$

avec $\sigma_t\sigma_\omega = 1/2$

A partir de ce ρ gaussien on peut engendrer une deuxième famille de noyaux de lissage donnant $\tilde{f}_w > 0$ et retrouver ainsi les résultats donnés par Cartwright |4|.
Pour celà, on part du noyau doublement gaussien (2) et on procède à un second lissage à l'aide d'un noyau lui-aussi doublement gaussien (donc positif) caractérisé par Σ_t et Σ_ω (sans aucune condition, cette fois-ci sur ces variances).
D'une part ce deuxième lissage d'une fonction déjà positive ne peut que redonner une fonction positive, d'autre part, ce double lissage est équivalent à un lissage unique par un noyau doublement gaussien de variances respectives $\sigma'^2_t = \sigma_t^2 + \Sigma_t^2$ et

$\sigma_\omega'^2 = \sigma_\omega^2 + \Sigma_\omega^2$ et donc $\sigma_t'\,\sigma_\omega' \geq 1/2$

Il faut remarquer qu'un tel noyau de lissage ne correspond plus à aucune transformée de Wigner-Ville. En conséquence dans le théorème précédent, la condition que $K(t,\omega)$ soit une fonction de Wigner-Ville pour donner $\tilde{f}_w$ positif, est suffisante, mais non nécessaire.

III SIGNAUX SOPHISTIQUES.

Une des difficultés de la distribution de Wigner-Ville est d'avoir la fâcheuse tendance d'introduire des densités à des époques où les signaux peuvent être nuls. (Cela vient de l'intégration du terme $Z(t + \frac{T}{2})\ Z^*(t - \frac{T}{2})$).
Pour mieux comprendre comment il sera possible de se débarrasser de ces "signaux fantômes", il est intéressant de considérer un signal répété dans le temps (ce sont les signaux sophistiqués des radaristes). Plus précisément, considérons donc le signal $z(t)$, auquel correspond la fonction $f(t,\omega)$, puis le signal

$$Z(t) = \sum_{k=-N}^{+N} z(t - kT)$$

auquel correspondra la fonction $F(t,\omega)$.

Nous cherchons la relation entre F et f. Il vient, après quelques calculs,

$$(3)\quad F(t,\omega) = \sum_{m=-2N}^{+2N} \frac{\sin\,(2N+1-|m|)\,\omega T}{\sin\,\omega T}\, f(t-\frac{m}{2}\,T,\omega)$$

et l'on s'aperçoit que les termes correspondant à m impair font apparaitre une densité d'énergie aux points $\frac{T}{2}, \frac{3T}{2}, \ldots$, même si z(t) ayant une durée caractéristique très inférieure à la période de répétition T, le signal Z(t) est nul au voisinage de ces points.

Terminons alors le calcul en faisant tendre N vers l'infini. On obtient avec $\Omega = 2\pi/T$

$$F(t,\omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^{mj}\,\frac{\Omega}{2}f(t-m\,\frac{T}{2}),\omega)\,\delta(\omega-j\,\frac{\Omega}{2})$$

On remarquera l'apparition d'un échantillonage dans l'espace des fréquences avec un pas $\Omega/2$ alors que la fonction ayant T comme période, on pouvait à priori s'attendre à n'avoir dans le spectre que les fréquences $j\Omega$. Par conséquent, ce sont à la fois les termes j et m impairs qui posent un problème. En fait, ces deux termes se renforcent ou s'opposent par l'intermédiaire du facteur $(-1)^{mj}$. Si par exemple, on suppose $f(t,\omega) > 0$, et à support temporel petit devant T, les "images" m impair mettent en jeu des fréquences dont l'intensité est alternativement positive et négative, alors que les "images" m pair sont toutes formées de raies d'intensité positive.

Pour fixer les idées, supposons que z soit de durée $\sigma_t << T$. Dans ce cas $f(t,\omega)$ a un support en fréquence beaucoup plus grand que Ω et la sommation aux fréquences $j\Omega/2$ pour m pair se traduit par une simple discrétisation du spectre. Par contre, pour m impair, les termes successifs se détruisent d'autant mieux que f est une fonction lentement variable à l'échelle Ω, c'est-à-dire que $\sigma_t << T$. La figure montre cette propriété avec les faisceaux à poids alternativement positif et négatif pour m impair et à poids positif pour m pair.

Ce cas $\sigma_t << T$ correspond à la limite classique en mécanique quantique et met en jeu des signaux dont la bande de fréquence est beaucoup plus grande que l'inverse de la période de répétition.

C'EST DONC EN FAISANT TENDRE FORMELLEMENT ω VERS L'INFINI QUE NOUS RECUPÈRERONS DES RÉSULTATS DONT LA SIMPLICITÉ RAPELLERA LA MÉCANIQUE CLASSIQUE ET SES BONNES PROPRIÉTÉS DE LOCALISATION.

IV SIGNAUX UNIMODULAIRES.

Les signaux de la forme $Z(t) = \exp(i\phi(t))$ où ϕ est une phase réelle, jouent un rôle spécial en théorie du signal et des tentatives existent pour faire correspondre à un tel signal une fonction de Wigner-Ville, généralisée $\delta\,[\omega-\omega_\circ(t)]$ où $\omega_\circ(t) = \frac{d\phi}{dt}$ est la fréquence instantanée. De nouveau, c'est la mécanique quantique qui va indiquer sous quelles conditions particulières on peut obtenir un tel résultat et comment ce dernier doit être modifié dans le cas général.

Considérons en M.Q. la fonction d'onde $\psi(x) = 1$, la distribution de Wigner correspondante est $f(x,p) = \delta(p)$. Appliquons à une telle fonction d'onde le potentiel $V(x,t) = A(x)\ \delta(t)$. Ce calcul, connu en mécanique quantique sous le nom d'approximation soudaine donne pour $\psi_+(x)$

$$(4)\quad \psi_+(x) = \psi_-(x)\ \exp(-\frac{iA(x)}{\hbar}) = \exp(-\frac{iA(x)}{\hbar})$$

Dans (4) ψ_+ et ψ_- sont les fonctions d'ondes respectivement après et avant l'impulsion dont la durée est évidemment nulle.

De toute évidence, puisque $f_-(x,p) = \delta(p)$, dans la limite classique, la fonction de distribution après l'impulsion est

$$f_+(x,p) = f_-(x,p+\frac{dA}{dx}) = \delta(p+\frac{dA}{dx})$$

La fonction de distribution correspond bien à une impulsion de moment égale à $-dA/dx$, communiquée aux particules de vitesse initiale nulle. Nous voyons donc que le résultat souhaité est obtenu dans la limite "classique" (signaux de fréquence très élevée). Ce résultat peut être obtenu plus formellement en faisant tendre $\omega \to \infty$ et plus précisément en écrivant $\omega = \Omega/\varepsilon$ (ε étant un paramètre d'échelle qui finalement tendra vers zéro).

(5)
$$f(t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int Z(t+\frac{T}{2})\, Z^*(t-\frac{T}{2}) \exp - i\omega T\, dT$$
$$= \frac{\varepsilon}{2\pi}\int Z(t+\frac{\varepsilon T'}{2}) Z^*(t-\frac{\varepsilon T'}{2}) \exp - i\Omega T'\, dT'$$

La deuxième expression de (5) étant obtenue en prenant $T' = \frac{T}{\varepsilon}$, on introduit alors $Z(t+\frac{\varepsilon T'}{2}) = \exp i\Phi(t+\frac{\varepsilon T'}{2})$ et on procède au développement limité à l'ordre un de $\Phi(t \pm \frac{\varepsilon T'}{2}) = \phi(t) \pm \frac{\varepsilon T'}{2}\frac{d\phi}{dt}$

Il vient immédiatement :

(6)
$$f(t,\omega) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int \exp iT'(\varepsilon\frac{d\phi}{dt} - \Omega)dT'$$
$$= \varepsilon\delta(\Omega - \varepsilon\frac{d\phi}{dt}) = \delta(\omega - \frac{d\phi}{dt})$$

Malheureusement un tel calcul pose une question de convergence du développement de Φ et notre expérience de la limite classique en mécanique quantique nous fait préssentir un processus de convergence beaucoup plus complèxe.

Un cas particulièrement simple est indiqué par Escudié et alii |4| avec $\phi(t) = \alpha t^2$ où l'on voit que la relation $\phi(t+\varepsilon\frac{T'}{2}) - \phi(t-\varepsilon\frac{T'}{2}) = \varepsilon T'\frac{d\phi}{dt}$ devient une relation exacte quel que soit ε. Le cas correspondant en mécanique quantique est celui d'un potentiel en x^2, c'est-à-dire le cas de l'oscillateur harmonique, pour lequel il est bien connu que l'équation d'évolution de Wigner-Ville est purement classique |7|.

Dans le cas général, on peut obtenir des formules qui montrent que le phénomène de translation du spectre de fréquence obtenu dans la limite haute fréquence est remplacée dans le cas général par des relations équivalentes sur les 3 premiers moments, à savoir que si $f_w(t,\omega)$ est la transformée de $Z(t) = \exp i\,\phi(t)$,
$$\int f_w(t,\omega)\, d\omega = 1$$
$$\int \omega f_w(t,\omega)\, d\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

c'est-à-dire que la fréquence moyenne est bien $\frac{d\phi}{dt}$.
$$\int (\omega - \frac{d\phi}{dt})^2 f_w(t,\omega)\, d\omega = 0$$

C'est-à-dire que la dispersion moyenne est bien nulle comme pour le cas limite où $f = \delta(\omega - \frac{d\phi}{dt})$.

Malheureusement, ces relations ne vont pas au delà du moment centré d'ordre 2 et c'est justement en prenant des valeurs négatives que la fonction de distribution $f_w(t,\omega)$ s'arrange pour garder son écart centré nul.

Montrons finalement, comment est obtenu le résultat souhaité dans la limite $\omega \to \infty$ et ce à l'aide du lissage. Les formules (5) et (6) étaient obtenues en développant $\phi(t+\frac{\varepsilon T'}{2})$ au 1er ordre en ε .

Malheureusement, l'intervalle d'intégration sur T' s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ et, quelque soit la petitesse de ε, le développement cesse d'être valable quelque part dans l'intervalle d'intégration. Il faudrait pour que le développement soit légitimé, qu'une fonction poids vienne rendre négligeables les contributions de la zone où le développement n'est plus valable. OR C'EST EXACTEMENT LE RÔLE DE LA FONCTION ρ CARACTÉRISTIQUE DU LISSAGE.

On part de (2) où l'on remplace τ par $t - \theta$.

Il vient :

(7) $$\tilde{f}_w(t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\left|\int \exp i\phi(t-\theta)\,\rho^*(\theta) \exp - i\omega t \exp i\omega\theta\, d\theta\right|^2$$

Comme précedemment dans (7), on va procéder au développement de $\phi(t-\theta) = \phi(t) - \theta\frac{d\phi}{dt} + \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2\phi}{dt^2}$, une opération valable certainement si θ est petit. C'est là qu'intervient la fonction $\rho(\theta)$, dont on supposera le support σ_t petit (σ_t est le temps tel que $\rho(\theta)$ est négligeable dès que $\theta > \sigma_t$) ceci nous impose donc la relation

(8) $$\sigma_t^2\frac{d^2\phi}{dt^2} << 1$$

Moyennant cette précaution, on introduit le développement dans (7).

Les termes tels que $\exp i\omega t$ et $\exp i\phi(t)$, sortent de l'intégration et puisque nous ne considérons que le carré du module, s'éliminent. Il vient :

$$\tilde{f}_w = \frac{1}{2\pi}\left|\int \exp i(\omega - \frac{d\phi}{dt})\theta\, \rho^*(\theta)\, d\theta\right|^2$$

Pour terminer le calcul, prenons par exemple

pour ρ une gaussienne de variance σ_t. On obtient pour $\tilde{f}_w$, une nouvelle gaussienne centrée autour de $\omega = d\phi/dt$ et de variance σ_t^{-1}. Cette dernière variance doit être telle que $\sigma_t^{-1} \ll d\phi/dt$, pour que l'on puisse l'assimiler à une distribution de Dirac.
En rassemblant (8) et cette dernière inéquation, il vient :

$$\frac{1}{(d^2\phi/dt^2)^{1/2}} \gg \sigma_t \gg \frac{1}{d\phi/dt}$$

Si nous supposons que $d\phi/dt$ est un infiniment grand en ε^{-1} (approximation haute fréquence), σ_t sera alors un infiniment petit en ε^{α} avec $1/2 < \alpha < 1$. Sous cette double condition, le lissage redonne une distribution de Dirac d'argument la fréquence instantanée.

VI CONCLUSION.

En approfondissant le passage de la mécanique quantique à la mécanique classique, la première nous a fourni tout au long de ce travail un cas limite qui, en théorie du signal, correspond à des phases très rapidement variables. Malheureusement, la convergence vers cette limite n'est pas triviale, et n'est obtenue qu'à la condition de lisser dans un volume élémentaire de l'espace temps fréquence. Plus nous demanderons de précision sur la fréquence instantanée, plus importante devra être la vitesse de variation de la phase, c'est-à-dire que formellement, nous nous plaçons dans le cas des hautes fréquences.
C'est uniquement dans ce cas que le lissage prend une signification physique intéressante, et dans les autres cas, ce dernier doit être avant tout considéré comme une opération mathématique permettant d'obtenir un f positif, mais dont l'interprétation physique reste assez arbitraire.

BIBLIOGRAPHIE.

|1| P. Flandrin et B.Escudié C.R.A.S. 295 475 1982

|2| J.G.Krüger and A.Poffyn Physica 85 A 84 1976

|3| B.Escudié et J.Grea C.R.A.S. 283 1049 1976

|4| P.Bertrand, J.P.Doremus, B.Izrar, Nguyen V.T. and M.R.Feix Physics Letters (en cours de publication)

|5| R.C.Hudson Rep. Math. Phys. 6 249 1974

|6| N.D.Cartwright Physica 83 A 210 1976

|7| J.E.Moyal Proc. Cambridge Phil. Soc. 45 99 1949.