

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



79

NICE du 16 au 20 MAI 1983

EVALUATION THEORIQUE DE PERFORMANCES DE SYSTEMES CORRELOFILTRE-ADAPTATEUR

Gérard FAUCON Pierre-Yves ARQUÈS

Laboratoire de Traitement du Signal - UNIVERSITE DE RENNES I - CAMPUS DE BEAULIEU - 35042 RENNES CEDEX

RESUME

On a présenté récemment une structure combinée "corrélofiltre-adaptateur" pour l'estimation continue d'un signal bruité lorsqu'on dispose d'une voie de référence ; l'étude en était faite par simulation.

On évalue ici théoriquement les performances de cette structure combinée. Celles-ci sont comparées aux performances théoriques obtenues par un corrélofiltre seul et un filtrage adaptatif seul, de dimensions équivalentes et de temps d'apprentissage équivalents.

SUMMARY

A combined structure "correlofilter-adapter" for the continuous estimation of a noisy signal with a reference noise, was recently presented ; it was studied by simulation.

The theoretic performances of this combined structure are here derived. They are compared to the theoretic performances of an isolated correlofilter and an isolated adaptive filter, with equivalent dimensions and equivalent learning durations.



1 - SYSTEME CORRELOFILTRE-ADAPTATEUR

On a récemment proposé [1] un système discret "corrélifiltre-adaptateur" pour l'estimation continue d'un signal inconnu $S(t_k)$, perturbé par un bruit additif $B(t_k)$ lorsque l'on dispose, sur une entrée principale, d'une observation bruitée $V(t_k) = S(t_k) + B(t_k)$ et, sur une entrée annexe, d'une référence bruit seul $N(t_k)$ corrélée à $B(t_k)$. En fait les deux bruits B et N sont supposés déduits d'un même bruit par deux filtres linéaires et homogènes et sont indépendants du signal S . Les processus S , B , N , sont discrets, aléatoires, stationnaires au second ordre, centrés. On se place dans le cas où le bruit référence $N(t_k)$ est blanc (ou a été préalablement blanchi), de puissance unité ($E\{N_i N_{i-k}\} = \delta_{ok}$). Les instants t_k de définition de l'ensemble discret (entrées, sortie, système) sont dus à un échantillonnage θ_e -périodique du temps : $X_k = X(t_k)$.

Le système considéré combine deux structures classiques : il est constitué par un filtre adaptatif de Widrow de dimension q , dont la référence bruit est constituée par une estimée $\hat{B}'(t_k)$ de $B(t_k)$ fournie par un corrélifiltre de dimension r . Ce dernier est, dans les conditions présentes, constitué par un estimateur, à chaque instant t_k , de l'intercorrrelation Γ_{VN} des processus V et N , et d'un filtre ayant, à chaque instant t_k , pour réponse percussionnelle de dimension r , l'estimation $\hat{\Gamma}_{VN}$ effectuée à l'instant précédent.

Le système faisant passer des 2 entrées N et V à la sortie \hat{S} est donc construit autour de 3 sous-ensembles (fig. 1) que l'on dénommera respectivement dans la suite :

- "pré-estimateur" : il fournit en $t_k, \forall k, \forall j \in \{-r', \dots, r-1\}$, $\hat{\Gamma}_{VN}(j\theta_e; t_k)$;
- "pré-filtre" : sa réponse percussionnelle en t_k est, $\forall k, \forall j \in \{-r', \dots, r-1\}$, $h_j(t_k) = \hat{\Gamma}_{VN}(j\theta_e; t_k)$;
- "post-filtre" : sa réponse percussionnelle en t_k est, $\forall k, \forall j \in \{1, \dots, q\}$, $g_j(t_k)$.

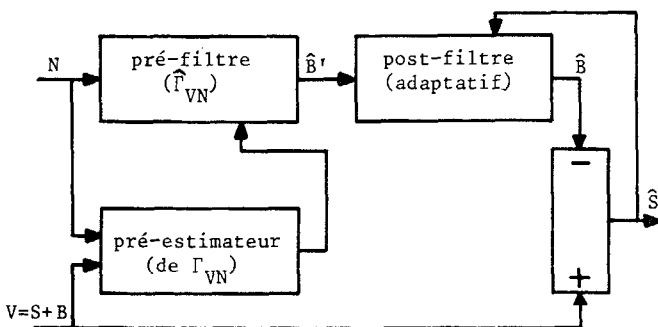


Figure 1

Les deux premiers sous-ensembles précédents constituent la base de la partie "corrélifiltre" du système ; le troisième sous-ensemble est l'âme de la partie "filtre adaptatif" du système.

La structure étudiée se réduit, en cas particulier, à :

- un corrélifiltre pour $q=1, \mu=0$ et $g_1(t_k) = 1$ (post-filtrage imposé) ;
- un filtre adaptatif de Widrow pour $r=1, r'=0$ et $\hat{\Gamma}_{VN}(0, t_k) = 1$ (pré-estimation imposée).

2 - METHODE D'EVALUATION DES PERFORMANCES

La performance du corrélifiltre-adaptateur, pour des entrées données, pour un type de "pré-estimateur" donné et pour un algorithme d'adaptation donné, dépend a priori :

- de la dimension $r' + r$ du pré-filtre,
- de la durée d'apprentissage $n + r + r'$ du pré-estimateur,
- de la dimension q du post-filtre,
- du coefficient correcteur μ de la partie "filtre adaptatif",
- du nombre m d'itérations effectuées par la partie adaptative sur une plage stationnaire des entrées.

Cette performance peut être mesurée au moyen de l'erreur quadratique moyenne $E\{(\hat{S} - S)^2\}$ en sortie du système :

$$(1) \quad E\{(\hat{S} - S)^2\} = E\{(V - \hat{B} - S)^2\} = E\{(B - \hat{B})^2\}.$$

On peut effectuer une évaluation théorique approximative de cette erreur, pour une durée globale d'apprentissage $n + m + r + r' + q - 1$ donnée, en supposant que :

- le pré-filtre est préalablement estimé ("hors ligne") sur un nombre fini n de paires d'échantillons : ses coefficients sont alors fixés et il se comporte comme un filtre linéaire et homogène de sortie stationnaire ;

- la partie adaptative effectue un nombre fini m d'itérations en utilisant la sortie précédente.

C'est-à-dire que l'on approxime l'erreur en symbolisant le système et son fonctionnement par la décomposition formelle suivante :

- a) Calcul du pré-filtre $\hat{\Gamma}_{VN}$ à partir de 2 pré-réalisations de n échantillons de N et V ; sa réponse percussionnelle est ($r' \geq 0, r \geq 1$) :

$$(2) \quad \forall j \in \{-r', \dots, r-1\}, \quad h_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} V_i N_{i-j}.$$

On peut noter que l'utilisation de la formule

$$h_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} N_i V_{i+j}$$

modifiée, en raison des hypothèses sur N et V, les propriétés au second ordre des h_j et donc l'erreur liée au système global corrélofiltre-adaptateur, mais non celle liée au corrélofiltre seul. Les pré-réalisations de N et V utilisées pour le calcul des h_j sont supposées indépendantes des réalisations de N et V alimentant le système pour l'obtention de \hat{S} .

b) Calcul de la sortie du pré-filtre à partir de la réalisation de N alimentant l'entrée annexe du système :

$$(3) \quad \forall k \in \{k_0 + 1, \dots, k_0 + q + m - 1\}, \quad \hat{B}'_k = \sum_{j=-r}^{r-1} h_j N_{k-j}$$

c) Calcul de la sortie de la partie adaptative alimentée par les tranches de suites stationnaires

$$\{\hat{B}'_k, \forall k \in \{k_0 + 1, \dots, k_0 + q + m - 1\}\}$$

et

$$\{V_k, \forall k \in \{k_0 + q, \dots, k_0 + q + m - 1\}\}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \forall k \in \{k_0 + q, \dots, k_0 + q + m - 1\} & \hat{S}_k = V_k - \hat{B}_k \\ \forall j \in \{1, \dots, q\} & \hat{B}_k = \sum_{i=1}^q g_i(k) \hat{B}'_{k-i+1} \\ & g_j(k) = g_j(k-1) + 2\mu \hat{B}'_{k-i} \hat{S}_{k-1} \end{cases}$$

L'entrée annexe de la partie adaptative étant alimentée par une estimation \hat{B}' de B, le post-filtre est initialisé, pour $k = k_0 + q$, par le jeu de coefficients

$$(5) \quad g_1(k_0 + q) = 1, \quad \text{et } \forall j \in \{2, \dots, q\}, \quad g_j(k_0 + q) = 0.$$

La mesure de performance ainsi obtenue est approchée en raison, d'une part, de la décomposition formelle utilisée, d'autre part, de la non-prise en considération de la corrélation existant entre les tranches successives traitées par le post-filtre [2,3]. On peut considérer que cette approximation réduisant l'erreur réelle n'a guère d'influence sur la comparaison des corrélofiltre-adaptateur entre eux ; par contre il faut user de prudence en ce qui concerne la comparaison de ces systèmes avec les corrélofiltres seuls.

On appelle dans la suite :

• P la $(q,1)$ -matrice d'intercorrélation entre la $(q,1)$ -matrice d'éléments $\hat{B}'_k, \hat{B}'_{k-1}, \dots, \hat{B}'_{k-q+1}$ et la variable aléatoire V_k :

$$(6) \quad \hat{P} = E\{V_k [\hat{B}'_k, \dots, \hat{B}'_{k-q+1}]\}$$

• Γ la (q,q) -matrice de corrélation de la $(q,1)$ -matrice d'éléments $\hat{B}'_k, \hat{B}'_{k-1}, \dots, \hat{B}'_{k-q+1}$:

$$(7) \quad \Gamma = E \left\{ \begin{bmatrix} \hat{B}'_k \\ \vdots \\ \hat{B}'_{k-q+1} \end{bmatrix} [\hat{B}'_k, \dots, \hat{B}'_{k-q+1}] \right\}$$

• $\Gamma_s(j) = E\{S_k S_{k-j}\}$ la fonction de corrélation discrète du processus discret $S(t_k)$.

• μ le coefficient correcteur de la partie adaptative (de Widrow).

• σ^2 la puissance moyenne du bruit sur l'entrée principale :

$$(8) \quad \sigma^2 = E\{B_k^2\}$$

3 - EVALUATION DE L'ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE EN SORTIE

Les conditions précédentes permettent de considérer l'erreur quadratique moyenne du corrélofiltre-adaptateur comme étant celle engendrée par un filtre adaptatif de Widrow lorsque l'on tient compte des caractéristiques de l'alimentation particulière de son entrée annexe.

On sait [2,3] que l'erreur quadratique moyenne, en sortie d'un filtre adaptatif de Widrow, alimenté par deux processus stationnaires V et \hat{B}' sur ses entrées principale et annexe, peut être approximée, en fonction du nombre m d'itérations effectuées, par une expression de la forme :

$$(9) \quad \epsilon_w(m) = \epsilon_w(+\infty) + [\epsilon_w(0) - \epsilon_w(+\infty)] e^{-\frac{m}{\tau}}$$

Cette relation engendre la "courbe d'apprentissage" du système, limitée pour $m=0$ par l'erreur initiale $\epsilon_w(0)$ et pour $m=+\infty$ par l'erreur finale $\epsilon_w(+\infty)$. C'est une courbe exponentielle déterminée par les 3 paramètres suivants :

- l'erreur finale $\epsilon_w(+\infty)$: elle peut être approximée par [3]

$$(10) \quad \epsilon_w(+\infty) = \epsilon [1 + \mu \text{tr} \Gamma]$$

Dans cette expression ϵ est l'erreur quadratique moyenne minimale théorique engendrée par un filtre de Wiener, discret d'ordre q, alimenté par le processus \hat{B}' et optimal pour l'estimation de B :

$$(11) \quad \epsilon = E\{B_k^2\} - \hat{P} \hat{\Gamma}^{-1} P$$

- la constante de temps τ de la courbe d'apprentissage : elle est donnée [3] par :

$$(12) \quad \tau = \frac{q}{4\mu \text{tr} \Gamma}$$



- l'erreur initiale $\varepsilon_w(0)$: c'est, compte tenu de l'initialisation du post-filtre en t_q , l'erreur quadratique moyenne $E\{(B-\hat{B}')^2\}$ en sortie du préfiltre :

$$(13) \quad \varepsilon_w(0) = E\{(S_k - \hat{S}_k)^2\} = E\{(B_k - \hat{B}'_k)^2\} \\ = E\{B_k^2\} + E\{\hat{B}'_k^2\} - 2E\{B_k \hat{B}'_k\}.$$

En définitive, l'erreur en sortie du corrélofiltre (intermédiaire ou utilisé seul), représentée par $\varepsilon_w(0)$, est notée :

$$(14) \quad \mathcal{E}'(r+r', n) = \sigma^2 + E\{\hat{B}'_k^2\} - 2E\{B_k \hat{B}'_k\}.$$

L'erreur quadratique moyenne en sortie du corrélofiltre-adaptateur, donnée par $\varepsilon_w(m)$, s'exprime alors sous la forme :

$$(15) \quad \mathcal{E}(r+r', n, q, m, \mu) = [\sigma^2 - \tilde{P} \Gamma^{-1} P] [1 + \mu \text{tr} \Gamma] [1 - e^{-\frac{4\mu \text{tr} \Gamma}{q} m}] \\ + e^{-\frac{4\mu \text{tr} \Gamma}{q} m} \mathcal{E}'(r+r', n)$$

4 - CALCUL DES PARAMETRES DE SORTIE DU CORRELOFILTRE

L'évaluation des erreurs \mathcal{E}' et \mathcal{E} (et des éléments de Γ et P) nécessite le calcul, en sortie du corrélofiltre (intermédiaire ou seul), des quantités, $\forall j \in \{0, \dots, q-1\}$, $E\{\hat{B}'_k \hat{B}'_{k-j}\}$ et $E\{V_k \hat{B}'_{k-j}\}$. On suppose pour cela les bruits N et B gaussiens.

a) Par utilisation de (3), de la blancheur de N , et de la propriété d'indépendance entre pré-réalisations et réalisations de N et V , on constate que :

$$(16) \quad E\{\hat{B}'_k \hat{B}'_{k-j}\} = \sum_{\ell=-r'+j}^{r-1} E\{h_\ell h_{\ell-j}\}, \quad 0 \leq j \leq r+r'-1 \\ = 0, \quad \forall j > r+r'-1.$$

Par utilisation de (2), du caractère gaussien de N et B , de ce que S , B , N sont centrés, et de ce que S est indépendant de B et N , on a :

$$(17) \quad E\{h_\ell h_{\ell-j}\} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i'=0}^{n-1} [E\{S_i S_{i'}\} E\{N_{i-\ell} N_{i'-\ell+j}\} \\ + E\{B_i N_{i-\ell}\} E\{B_{i'} N_{i'-\ell+j}\} + E\{B_i B_{i'}\} E\{N_{i-\ell} N_{i'-\ell+j}\} \\ + E\{B_i N_{i'-\ell+j}\} E\{N_{i-\ell} B_{i'}\}]$$

En appelant $f_j, \forall j \in \mathbb{Z}$, la réponse percussionnelle (inconnue, estimée par l'ensemble des h_j) du filtre transformant $N(t_k)$ en $B(t_k)$:

$$(18) \quad B_i = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_p N_{i-p}$$

on obtient finalement :

$$(19) \quad E\{h_\ell h_{\ell-j}\} = \frac{n-j}{n^2} [\Gamma_s(j) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_p f_{p-j}] \alpha_{j,n} \\ + f_\ell f_{\ell-j} + \frac{1}{n^2} \sum_{p=-n+1}^{n-1} (n-|p|) f_{p+\ell-j} f_{-p+\ell}$$

avec $\alpha_{j,n} = 1$ pour $j \leq n-1$ et $\alpha_{j,n} = 0$ pour $j \geq n$.

b) Par utilisation de (3) et (18) et de la blancheur de N , on constate que :

$$E\{V_k \hat{B}'_{k-j}\} = E\{B_k \hat{B}'_{k-j}\} = \sum_{i=-r'}^{r-1} f_{i+j} f_i$$

et que

$$E\{h_\ell\} = f_\ell \\ \sigma^2 = E\{B_k^2\} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_i^2.$$

c) Il en résulte la valeur de \mathcal{E} et, en particulier :

$$\mathcal{E}'(r+r', n) = \sum_{i=-\infty}^{-r'-1} f_i^2 + \sum_{\ell=r}^{+\infty} f_\ell^2 + \frac{r+r'}{n} [\Gamma_s(0) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_p^2] \\ + \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=-r'}^{r-1} \sum_{p=-n+1}^{n-1} (n-|p|) f_{p+\ell} f_{-p+\ell}.$$

5 - RESULTATS NUMERIQUES POUR UNE SITUATION DONNEE

Les performances des systèmes considérés dépendent de nombreux paramètres ($r+r'$, n , q , m , μ) et de la situation d'entrée ($\{\Gamma_s(j)\}$ et $\{f_j\}$, en général inconnus dans les problèmes réels).

Elles sont ici évaluées numériquement pour une situation d'entrée donnée. Les résultats et conclusions obtenus sont donc conditionnels à cette situation. De plus le filtre transformant N en B est supposé causal : $f_p = 0, \forall p < 0$; $r' = 0$; il est défini par α et β donnés.

Les courbes tracées figures 2 à 7 donnent l'évolution de l'erreur quadratique moyenne en sortie du corrélofiltre-adaptateur lorsqu'on fait varier les paramètres r , q , n et m . (Δ : performances des systèmes seuls).

Pour une dimension globale p du système donnée (c'est $p = r + q$ pour une structure combinée, $p = r$ pour un corrélofiltre seul, $p = q$ pour un filtrage adaptatif seul), une durée globale d'apprentissage ℓ donnée, et un coefficient correcteur μ donné, on constate sur les courbes précédentes que :

- il existe en général diverses structures combinées ayant une performance supérieure à celle du corrélofiltre seul et à celle du filtrage adaptatif seul. On note que l'erreur intermédiaire en sortie du pré-filtre du système combiné est alors en général plus forte qu'en

sortie du corrélofiltre seul.

- il existe pour chaque durée d'apprentissage de la partie corrélofiltre (c'est-à-dire pour chaque valeur de $n < \ell$) une structure combinée optimale. On note que la performance d'un corrélofiltre seul, pour une durée d'apprentissage donnée, en fonction de sa dimension, passe par un maximum. Ceci traduit le fait que l'efficacité d'un corrélofiltre semble dépendre de la bonne adaptation de sa dimension à sa durée d'apprentissage (imposée).

Les courbes de la figure 8 représentent la dimension r du corrélofiltre seul optimal en fonction de la durée d'apprentissage (en fait en fonction de n) pour plusieurs situations d'entrée données (caractérisées par la corrélation du bruit B sur l'entrée principale : $B_{k+1} = \alpha B_k + \beta N_k$, où α et β sont des constantes réelles positives, $\alpha < 1$).

Les courbes de la figure 9 représentent la dimension r de la partie corrélofiltre de la structure combinée optimale en fonction de la durée d'apprentissage de cette partie corrélofiltre (en fait en fonction de n) pour p , ℓ et μ donnés et plusieurs situations d'entrée données.

Les courbes de la figure 10 représentent la performance de 3 catégories de systèmes optimaux en un certain sens, en fonction de la dimension du corrélofiltre (seul ou intermédiaire) :

- corrélofiltres seuls optimaux (de dimension r entraînant une erreur minimale, pour une durée d'apprentissage donnée) (systèmes notés (a)).

- systèmes combinés, constitués par les corrélofiltres optimaux précédents suivis de filtrages adaptatifs tels que les systèmes combinés sont à paramètres p, ℓ et μ donnés (systèmes notés (b)).

- systèmes combinés, à paramètres p, ℓ et μ donnés, optimaux (de dimension r du corrélofiltre intermédiaire, entraînant une erreur minimale en sortie du système combiné, pour une durée d'apprentissage du corrélofiltre-définie par un $n < \ell$ -donnée). On peut noter que le $r(n)$ est en général légèrement différent du $r(n)$ des deux catégories précédentes. (Systèmes notés (c)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.Y. ARQUÈS, G. FAUCON : Proposal and experimental evaluation of a combined structure "correlofilter-adapter" for the continuous estimation of a noisy signal with a reference noise. Proceedings of 1982 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), Paris, Mai 1982.

[2] B. WIDROW et al. : Adaptive noise cancelling : principles and applications. Proceedings of the IEEE, Vol. 63, n° 12, Déc. 1975.

[3] B. WIDROW, J.M. MCCOOL, M.G. LARIMORE, C.R. JOHNSON: Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter. Proceedings of the IEEE, Vol. 64, n°8, Aug. 1976.

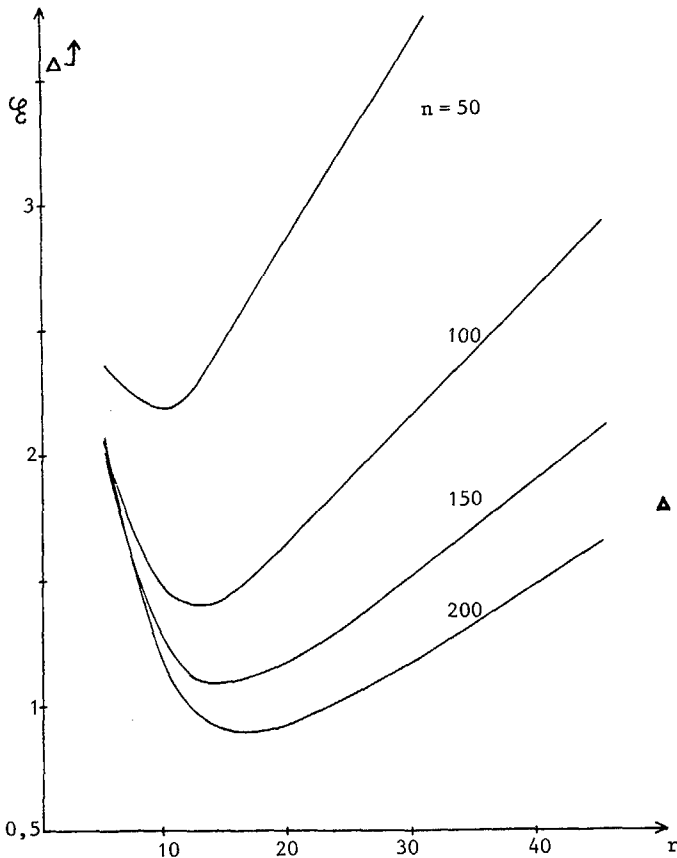


Figure 2 : $p = 50$; $\ell = 250$; $\mu = 10^{-4}$; $\alpha = 0,9$; $\beta = 1$

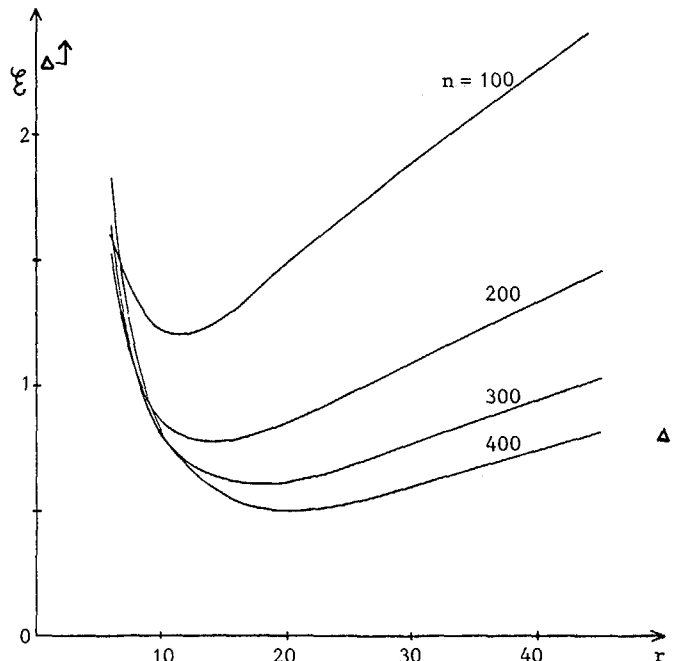


Figure 3 : $p = 50$; $\ell = 500$; $\mu = 10^{-4}$; $\alpha = 0,9$; $\beta = 1$



EVALUATION THEORIQUE DE PERFORMANCES DE SYSTEMES CORRELOFILTRE-ADAPTATEUR

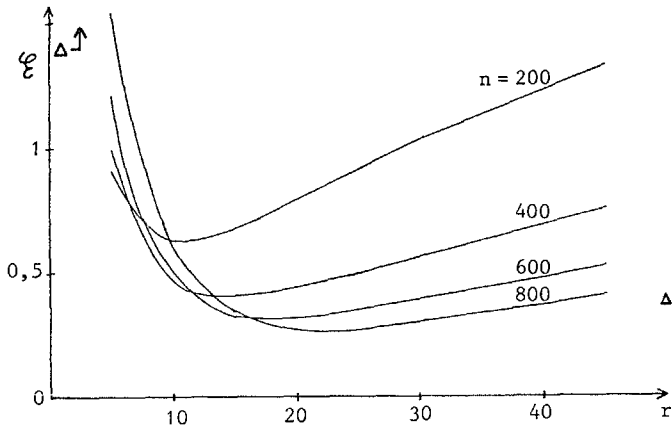


Figure 4 : $p = 50$; $l = 1000$; $\mu = 10^{-4}$; $\alpha = 0,9$; $\beta = 1$

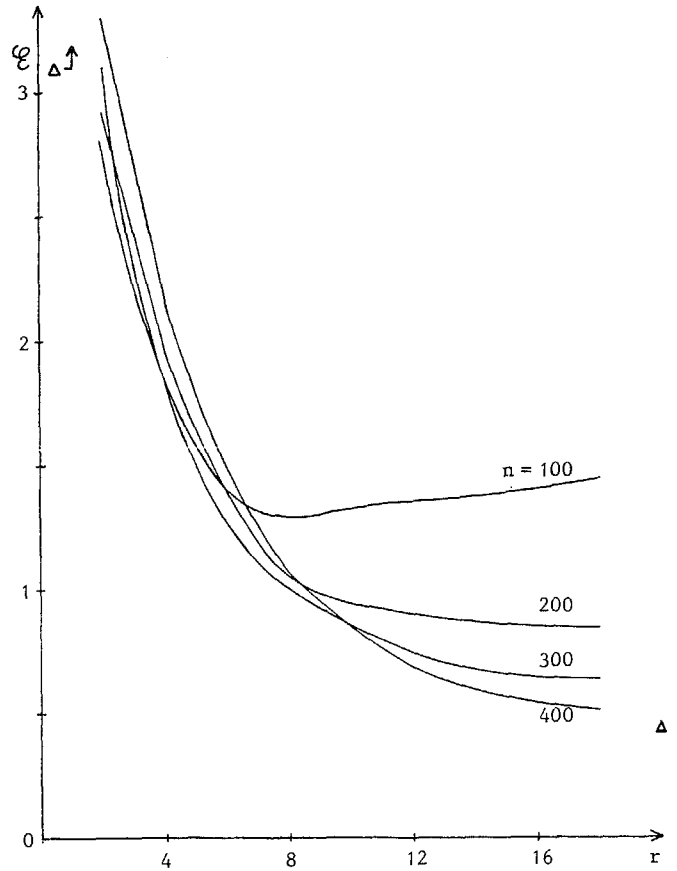


Figure 5 : $p = 20$; $l = 500$; $\mu = 10^{-4}$; $\alpha = 0,9$; $\beta = 1$

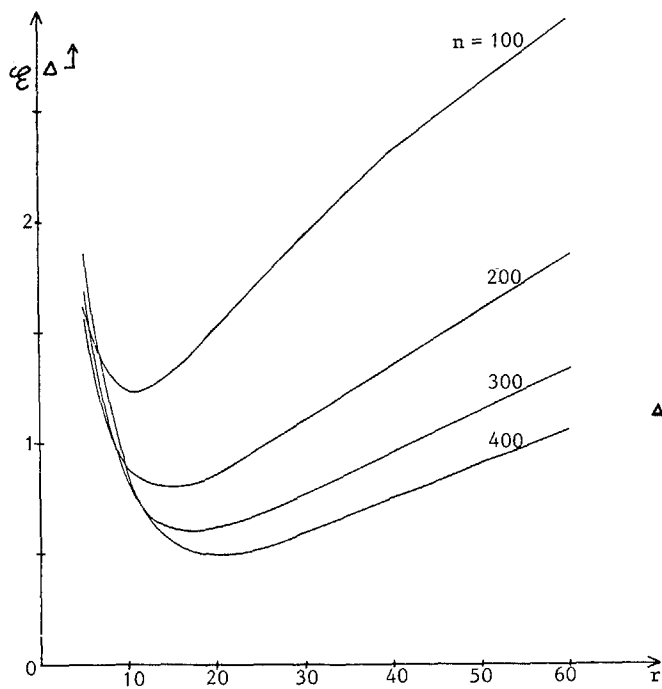


Figure 6 : $p = 70$; $l = 500$; $\mu = 10^{-4}$; $\alpha = 0,9$; $\beta = 1$

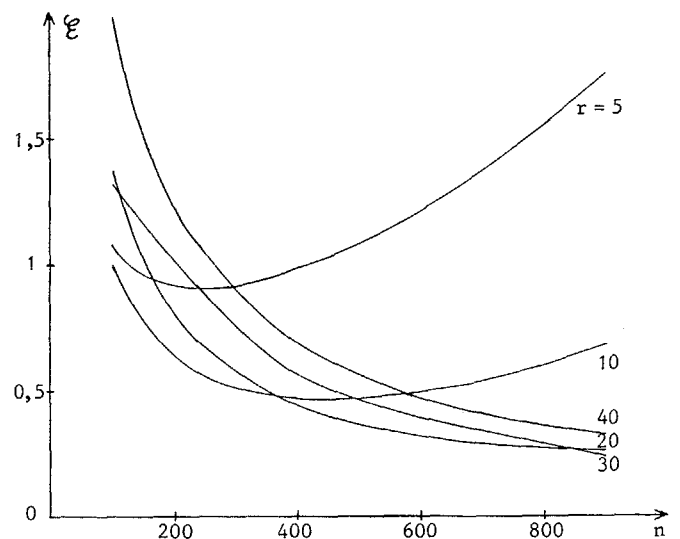


Figure 7 : $p = 50$; $l = 1000$; $\mu = 10^{-4}$; $\alpha = 0,9$; $\beta = 1$

EVALUATION THEORIQUE DE PERFORMANCES DE SYSTEMES CORRELOFILTRE-ADAPTATEUR

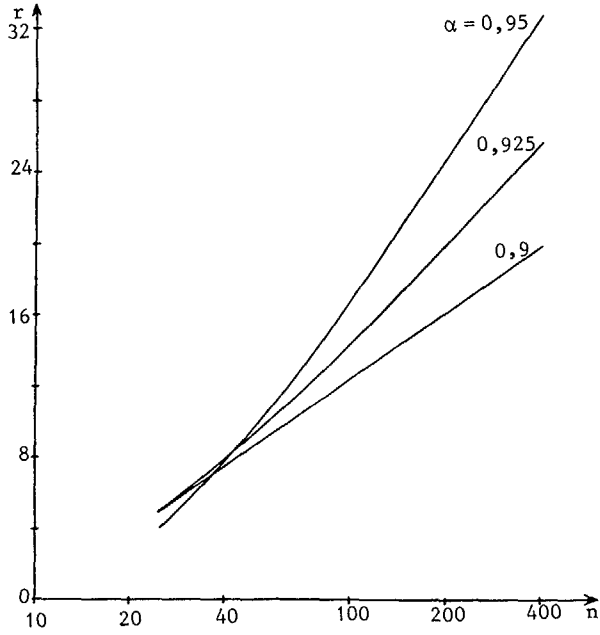


Figure 8 : $E[B^2] = Cte = 5,26$

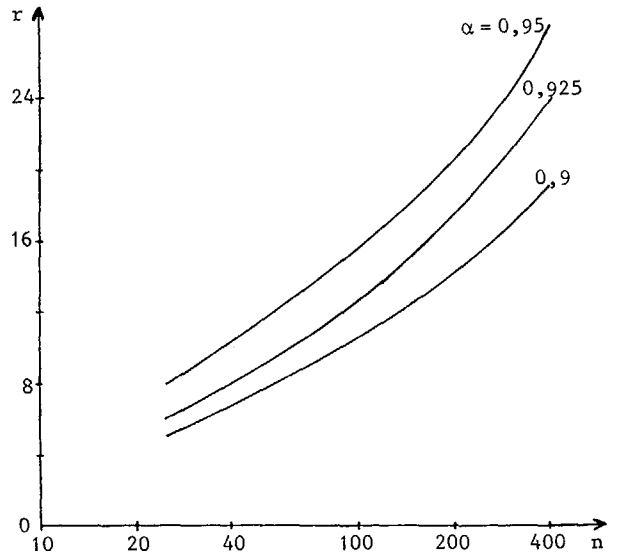


Figure 9 :
 $p = 50$; $\ell = 500$; $\mu = 10^{-4}$; $E[B^2] = Cte = 5,26$

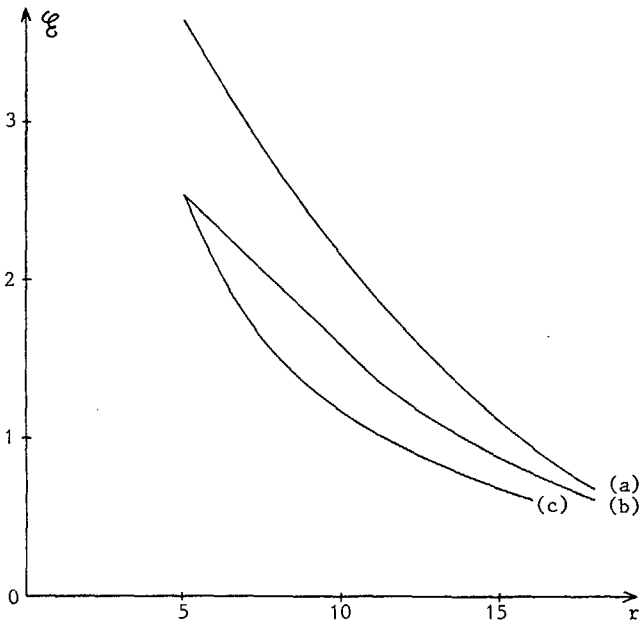


Figure 10 : $p = 50$; $\ell = 500$; $\mu = 10^{-4}$; $\alpha = 0,9$; $\beta = 1$

