UN PROBLEME DE DETECTION DE PANNE AVEC SEUIL POUR LA PROBABILITE DE FAUSSE ALARME

Monique PONTIER
Université d'Orléans
45046 ORLEANS CEDEX

Jacques SZPIRGLAS
CNET/PAA/ATR/MTI - 38-40,
rue du Général Leclerc
92131 ISSY LES MOULINEAUX

RESUME

RESUME

On résout un problème de détection de panne avec seuil pour la probabilité de fausse alarme. Plus précisément, on considère une chaîne de production de matériels, assurée par une machine dont la durée de bon fonctionnement est exponentielle de paramètre λ. Le bon, ou mauvais, état de fonctionnement n'est observé que par le flot de Poisson des matériels défectueux, de paramètre λ_0 en cas de bonne marche et λ_1 sinon ($\lambda_1 > \lambda_0$). On veut arrêter la production au temps D ne dépendant que des observations tel que la probabilité de "fausse alarme" soit inférieure à un réel a donné, et qui minimise la durée moyenne d'attente après la panne. On montre qu'il suffit d'arrêter la chaîne au premier instant où l'estimée de l'état de la machine, étant donné le flot des matériels défectueux, dépasse un certain seuil. Cette estimée est solution d'une équation différentielle facilement résoluble. On généralise ainsi au cas discontinu, étudié par GAL'CHUK et ROSOVSKII (1), le "disorder problem" avec contrainte résolu par SHYRYAEV (4) pour un modèle brownien.

La méthode de résolution consiste à transformer le problème en un problème d'arrêt optimal avec contrainte, exprimé en fonction de la probabilité conditionnelle de panne, sachant le flot des observations. On utilise alors les résultats de PONTIER et SZPIRGLAS (3) qui s'appuient sur les méthodes de point-selle en analyse convexe de ROCKAFELLAR (4), par exemple.

SUMMARY

SUMMARY

A failure-detection problem with threshhold for the false alarm probability is solved. More precisely, a machine is assumed to be with an exponential reliability law associated to parameter λ. Its working state is observed only by the Poisson flow of the defectuous items produced, with parameter λ_0 in the well-working case, and λ_1 if not ($\lambda_1 > \lambda_0$). The problem is to stop the production at a time D, only depending on the observations, such that the false-alarm probability is less than a given real number a, and such that the mean working time after failure is minimized. It is shown that it is sufficient to stop the system at the first moment when the estimated state of the machine, given the past flow of defectuous items, crosses a given threshhold. This estimate is a solution of an easily solvable differential equation. The disorder problem with constraint, solved by SHYRYAEV (6) for the Brownian model, is then generalised to the discontinuous case studied by GAL'CHUK and ROSOVSKII (1).

The method consists in transforming the problem into an optimal stopping problem with constraint, expressed by means of the "machine-state" conditional law given the observation-flow. Saddle point methods of convex analysis by ROCKAFELLAR (4) and results by PONTIER and SZPIRGLAS (3) are used.

I. CONSTRUCTION DU MODELE ET ENONCE DU RESULTAT.

Il convient en préalable de préciser les processus intervenant, et pour ce faire, on utilise la modélisation de SEGALL, DAVIS et KAILATH (5).

L'état du système, de bon ou mauvais fonctionnement, qu'il s'agit de détecter est représenté par un processus de Markov X, de loi initiale π , à valeurs dans $\{0,1\}$, le passage de 0 à 1 intervenant en un temps de panne T, dont la loi est donnée par :

$$P\{T=0\}= \pi \quad \text{et} \quad P\{T\leqslant t \;/\; T>0\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

L'observation Y est un processus de Poisson dont le paramètre augmente de λ_0 à λ_1 au temps T. On se donne alors : une variable aléatoire α valant 0 ou 1 avec la probabilité π ou $1 - \pi$; p_t, p_t^0, p_t^1 trois processus de Poisson de paramètres respectifs λ, λ_0, λ_1 ; α, p, p^0 et p^1 sont mutuellement indépendants ;on note par Q_π leur loi tensorielle et E_π l'espérance associée. On définit une filtration $\underline{\underline{B}}$ par :

$$\underline{\underline{B}}_t = \sigma\{\alpha,\ p_s,\ p_s^0,\ p_s^1,\ s\leqslant t\}.$$

Alors, si T_1 est le premier temps de saut du processus p, on pose :

$$T = \alpha T_1 \;;\; X_t = 1 - \alpha + \alpha p_{t\wedge T_1}.$$

Ceci rend bien compte de la situation: X_t vaut soit 1 avec la probabilité π pour tout t, soit reste nul jusqu'au temps T. On peut, avec ce formalisme, décrire le flot poissonnien des matériels défectueux par le processus Y :

$$Y_t = \int_0^t (1-X_s)\,dp_s^0 + \int_0^t X_s\, dp_s^1$$

Soit enfin $\underline{\underline{G}}_t$ la filtration des observations :

$$\underline{\underline{G}}_t = \sigma(Y_s \;;\; s\leqslant t)$$

Les résultats de (5) permettent alors, si π est l'estimé de X au vu des observations défini par :

$$\pi_t = E_\pi\{X_t \;/\; \underline{\underline{G}}_t\} = E_\pi\{T\leqslant t \;/\; \underline{\underline{G}}_t\},$$

de dire que ce processus π est un processus de Markov cadlag, dont les temps de saut sont ceux du processus d'observation Y ; de plus, il est solution de l'équation différentielle :

$$\text{(1.1)}\qquad d\pi_t = \frac{(\lambda_1-\lambda_0)\pi_{t-}(1-\pi_{t-})}{\lambda_0 + (\lambda_1-\lambda_0)\pi_{t-}}dY_t + (\lambda-(\lambda_1-\lambda_0)\pi_{t-})(1-\pi_{t-})dt,$$

$$\pi_0 = \pi.$$

Enfin, le processus ponctuel Y admet, relativement à la filtration $\underline{\underline{G}}_t$, l'intensité :

$$\int_0^t (\lambda_0(1-\pi_{s-}) + \lambda_1\pi_{s-})ds$$

Ce modèle étant posé, le problème est d'estimer l'instant T de la panne par un temps d'arrêt ne dépendant que des observations, minimisant la durée de mauvais fonctionnement après la panne, soit le "coût" :

$$E_\pi(D-T)^+$$

avec une probabilité de fausse alarme majorée par un seuil, soit la "contrainte" :

$$Q_\pi(D<T) \leqslant a.$$

Suivant (1) et (4), on peut reformuler ce problème uniquement en fonction du processus π:

$$E_\pi(D-T)^+ = E_\pi \int_0^D \pi_s ds \;;\; Q_\pi(D<T) = 1 - E_\pi(\pi_D).$$

On ne trouve pas de solution en toute généralité dans l'ensemble des temps d'arrêt, mais dans celui des "temps d'arrêt aléatoires", définis de la manière suivante :

Définition. Un temps d'arrêt aléatoire est un triplet (T_1, T_2, b) avec T_1 et T_2 temps d'arrêt, b réel de $[0,1]$, dont la stratégie associée est de "s'arrêter" en T_1 avec la probabilité b, en T_2 avec la probabilité 1-b.

Le résultat de ce travail, qui généralise (6) à un modèle "poissonnien", est résumé dans le théorème suivant :

Théorème 1. *Pour tout réel a inférieur ou égal à* $1-\pi$ *, il existe un temps d'arrêt aléatoire-optimal* T_a^o *pour le problème de détection de panne avec seuil a,* $T_a^o = (T_1, T_2, b)$*, tel que :*

$$b\, E_\pi(\pi_{T_1}) + (1-b)\, E_\pi(\pi_{T_2}) = 1 - a\ .$$

Cette stratégie d'arrêt est optimale au sens où, d'une part elle vérifie la contrainte-du fait de l'égalité ci-dessus, d'autre part :

$$b\, E_\pi\Big(\int_0^{T_1} \pi_s\, ds\Big) + (1-b)E_\pi\Big(\int_0^{T_2}\pi_s\, ds\Big) =$$

$$= \inf\Big\{E_\pi \int_0^D \pi_s\, ds \;;\; D\ \underline{\underline{G}}\ t.a./\ E_\pi(\pi_D)\geqslant 1-a\Big\}$$

Remarque. Le cas où le seuil a majore $1-\pi$ est celui où π, probabilité a priori de mauvais fonctionnement, est trop élevée pour que cela vaille la peine de démarrer... Le temps d'arrêt optimal est alors nul.

II. FORMULATION LAGRANGIENNE ET RESOLUTION.

A condition d'inverser sup et inf, les résultats de (3) s'appliquent au problème de détection de panne ; un temps d'arrêt D^o est dit optimal pour le problème avec seuil si

$$E_\pi\left(\int_0^{D^\circ} \pi_s\, ds\right) =$$
$$= \inf\{E_\pi\left(\int_0^D \pi_s\, ds\right)\ ;\ D \ \underline{\underline{G}}\ \text{t.a.}\ /\ E_\pi(\pi_D) \geqslant 1-a\}\ .$$

On considère alors la fonction de coût définie par :

$$\underline{\underline{L}}(p, \pi, D) = E_\pi\left(p(1-\pi_D) + \int_0^D \pi_s\, ds\right),$$

et on a le résultat suivant (3), simple traduction de l'existence d'un point-selle pour le lagrangien associé :

Théorème 2. *Une condition suffisante pour qu'un temps d'arrêt D° soit optimal pour le problème de détection de panne avec seuil est que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) $E_\pi\left(\int_0^{D^\circ} \pi_s\, ds\right) = \inf\limits_{D\ \underline{\underline{G}}\ t.a.} E_\pi \int_0^D \pi_s\, ds$

et $E_\pi(\pi_{D^\circ}) \geqslant 1-a.$

(ii) Il existe un réel p° strictement positif tel que :

$$\underline{\underline{L}}(p^\circ, \pi, D^\circ) = \inf_{D\ \underline{\underline{G}}\ t.a.} \underline{\underline{L}}(p^\circ, \pi, D)$$

et $E_\pi(\pi_{D^\circ}) = 1-a.$

Démonstration du théorème 1 :

La fonctionnelle J^p définie sur $[0,1]$ par :

$$J^p(\pi) = \inf_{D\ \underline{\underline{G}}\ \text{t.a.}} \underline{\underline{L}}(p, \pi, D)$$

s'appelle la réduite de Snell du processus Z^p :

$$Z^p(t) = \int_0^t \pi_s\, ds + p(1-\pi_t)$$

Cette réduite de Snell J^p joue un grand rôle dans la résolution du problème d'arrêt optimal en général (6). Plus précisément, si on définit le $\underline{\underline{G}}$ temps d'arrêt D_p par :

$$D_p = \inf\{t \geqslant 0\ /\ J^p(\pi_t) = p(1-\pi_t)\},$$

on a :

$$\underline{\underline{L}}(p, \pi, D_p) = \inf_{D\ \underline{\underline{G}}\ \text{t.a.}} \underline{\underline{L}}(p, \pi, D) = J^p(\pi)$$

C'est-à-dire que le t.a. D_p est optimal pour le problème d'arrêt sans contrainte associé au processus de coût Z^p.

D'après (1) ou (6), utilisant la concavité de l'application J^p, on sait qu'il existe une fonction A croissante, définie sur R^+ à valeurs dans $[0,1]$, telle que :

(2.1) $D_p = \inf\{t \geqslant 0\ /\ \pi_t \geqslant A(p)\}$

Les résultats de (3) montrent que l'application :

$$p \to D_p$$

est croissante et continue à gauche, tandis que l'application

$$p \to E(\pi_{D_p})$$

est croissante de π à 1. Dans le cas où π est majoré par 1-a, il existe donc un réel positif p° tel que :

$$E(\pi_{D_{p^\circ}}) \leqslant 1-a \leqslant E(\pi_{D_{p^\circ+}})$$

Si l'on n'a pas l'égalité on peut, par un tirage au sort convenable, s'arrêter en un temps d'arrêt aléatoire : c'est-à-dire que l'on s'arrête en D_{p° avec la probabilité b et en $D_{p^\circ+}$ avec la probabilité 1-b, ce nombre b étant choisi tel que :

$$bE_\pi(\pi_{D_{p^\circ}}) + (1-b)\, E_\pi(\pi_{D_{p^\circ+}}) = 1-a$$

Alors le couple (p°, D°) avec D° temps d'arrêt "aléatoire", défini par le triplet $(D_{p^\circ}, D_{p^\circ+}, b)$, vérifie la condition (ii) du théorème 2 et D° est une solution au problème de détection de panne avec seuil.

Remarque. Le problème est celui de l'évaluation de D_{p° et donc de $A(p^\circ)$. Remarquons, posant $c = A(p)$, que :

$$c \leqslant \pi_{D_p} \leqslant c + \frac{(\lambda_1-\lambda_0)c(1-c)}{\lambda_0+(\lambda_1-\lambda_0)c}\ ,$$

car le terme ajouté à c dans le membre de droite n'est autre que la valeur du saut, s'il a lieu, au seuil c.

Si l'on cherche p tel que $E_\pi(\pi_{D_p}) = 1-a$, on a nécessairement l'encadrement:

$$c \leqslant 1-a \leqslant c + \frac{(\lambda_1-\lambda_0)c(1-c)}{\lambda_0+(\lambda_1-\lambda_0)c}\ ,$$

ce qui revient à chercher le seuil $A(p^\circ)$ indicateur du t.a. aléatoire optimal D° dans l'intervalle :

$$\left[(1-a)\left(1 - \frac{a(\lambda_1-\lambda_0)}{\lambda_0(1-a)+\lambda_1 a}\right),\ 1-a\right]$$

de longueur $\dfrac{a(1-a)(\lambda_1-\lambda_0)}{\lambda_0(1-a)+\lambda_1 a}$, minime dès que $(\lambda_1-\lambda_0)$ l'est.

III. CAS "REGULIER".

Sous certaines hypothèses, on peut avoir un meilleur résultat, à savoir un "vrai" temps d'arrêt optimal. D'après (3), c'est le cas dès que l'application

$$p \to E_\pi(\pi_{D_p})$$

est continue.

Montrons d'abord la proposition suivante :

Proposition 3. *Si l'on pose, pour c entre 0 et 1 :*

$$T_c = \inf\{t \geq 0 \ / \ \pi_t \geq c\}$$

l'application $c \to E_\pi(\pi_{T_c})$ *est croissante et continue sur* $[0,1]$.

Démonstration. La croissance est simple conséquence de celle des applications $c \to T_c$ et

$$D \to E_\pi(\pi_D) = Q_\pi(D \geq T).$$

Par ailleurs, le processus π est cadlag et par définition de T_c, on a :

$$\pi_{T_c^-} \leq c \leq \pi_{T_c}$$

Observons ensuite que l'expression (1.1) de l'équation de la dynamique du processus π montre, puisque $\lambda_1 > \lambda_0$, que celui-ci est strictement croissant jusqu'à ce qu'il atteigne la valeur $\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda_0}$, notée c_0. Il peut stationner en ce point, sinon, lorsque cette valeur est dépassée, le processus est strictement décroissant, à moins qu'il n'admette un saut positif.

Ceci étant, en remarquant que l'ensemble

$$A = \{\pi_{T_c} > c\}$$

est contenu dans l'ensemble $\{\omega / \ \exists t \ , \ \Delta Y_t \neq 0\}$, on peut calculer l'expression $E_\pi(\pi_{T_c})$ selon que c est inférieur ou supérieur à c_0 :

pour $c < c_0$:

$$E_\pi(\pi_{T_c}) = c(1 - E\int_0^\infty (\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0)\pi_t)\mathbb{1}\{k(c) < \pi_t \leq c\}dt) +$$

$$+ E\int_0^\infty \lambda_1 \pi_t \ \mathbb{1}\{k(c) < \pi_t \leq c\}dt \ ;$$

pour $c > c_0$:

$$E_\pi(\pi_{T_c}) = E\int_0^\infty \lambda_1 \pi_t \mathbb{1}\{k(c) < \pi_t \leq c\}dt$$

où l'on pose $k(c) = \dfrac{\lambda_0 c}{\lambda_0 c + \lambda_1(1-c)}$.

En dehors des points c_0 et $k^{-1}(c_0)$, la stricte monotonie du processus π montre que l'application

$$c \to E_\pi(\pi_{T_c})$$

est continue.

En utilisant la croissance de cette application, on peut enfin conclure à sa continuité aux points $k^{-1}(c_0)$, puis c_0.

La continuité de $p \to E_\pi(\pi_{D_p})$ est donc assurée dès que la fonction A définie en (2.1) est continue. On a alors la proposition :

Proposition 4. *Soit* J^p *la réduite de Snell du processus* Z^p :

$$Z^p(t) = \int_0^t \pi_s \, ds + p(1 - \pi_t)$$

et la fonction A définie sur R^+ *à valeurs dans* $[0,1]$ *par :*

$$A(p) = \inf\{\pi \in [0,1] \ / \ J^p(\pi) = p(1-\pi)\}$$

Si cette fonction A est continue, il existe un temps d'arrêt optimal T_a° *pour le problème de détection de panne avec seuil a :*

$$T_a^\circ = 0 \quad \text{si } a \geq 1 - \pi$$

$$T_a^\circ = \inf\{t > 0 \ / \ \pi_t \geq c\} \quad \text{sinon,}$$

avec c dans l'intervalle $\left[(1-a)(1 - \dfrac{a(\lambda_1-\lambda_0)}{\lambda_0(1-a)+\lambda_1 a}), \ (1-a)\right]$

tel que :

$$Q_\pi\{T_a^\circ < T\} = a \ .$$

Démonstration. La proposition 3 et l'hypothèse de continuité sur A montre la continuité de l'application

$$p \to E_\pi(\pi_{D_p})$$

dont on a déjà dit qu'elle est croissante de π à 1. Donc, pour $1-a > \pi$, il existe p° tel que :

$$E_\pi(\pi_{D_{p^\circ}}) = 1 - a$$

et le couple (p°, D_{p°) vérifie la condition (ii) du théorème 2. Le temps d'arrêt

$$T_a^\circ = D_{p^\circ} = \inf\{t \geq 0 \ / \ \pi_t \geq A(p^\circ)\}$$

est donc optimal.

La démonstration du théorème 1 et la remarque qui la suit montre par ailleurs que le seuil $A(p^\circ)$ est bien dans l'intervalle

$$\left[(1-a)(1 - \frac{a(\lambda_1-\lambda_0)}{\lambda_0(1-a)+\lambda_1 a}), \ (1-a)\right] .$$

Remarque. Les auteurs de (1) montrent que si l'on a

$$\lambda + \frac{1}{p} \geq \lambda_1 \ \text{ou} \ \frac{1}{p} \geq \lambda_0$$

le seuil A(p) se calcule explicitement (grâce aux résultats de (2)) :

$$A(p) = \frac{\lambda p}{1+\lambda p}$$

On peut donc dire que la fonction A est au moins continue sur l'intervalle $[0,p_0]$, où $p_0 = \sup(\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_1 - \lambda})$.

On a ainsi la continuité de $p \to E_\pi(\pi_{D_p})$ au moins sur cet intervalle, et l'existence de p° - donc de T_a° - au moins pour tout a supérieur ou égal à $1-A(p_0)$, soit $\inf(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda}, \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1})$.

BIBLIOGRAPHIE

(1) L.I. GAL'CHUK, B.L. ROZOVSKII : "The disorder problem for a Poisson Process", *Th. Prob. Appl. vol. 16 (1971) 712-716.*

(2) B.I. GRIGELIONIS, A.N. SHIRYAEV : "On Stefan's problem and Optimal stopping rules for Markov processes", *Th. Prob. Appl. Vol. 11 (1966) 541-558.*

(3) M. PONTIER, J. SZPIRGLAS : "Arrêt optimal avec contrainte", *CRAS, série A, 17 janvier 1983.*

(4) R.T. ROCKAFELLAR : " Convex Analysis", *Princeton Univ. Press, 1970.*

(5) A. SEGALL, M.H. DAVIS, T. KAILATH :"Non linear filtering with counting observations", *I.E.E.E. Trans. Inf. Th. Vol. I.T.21 n° 2 (1975) 143-149.*

(6) A.N. SHIRYAEV : "Optimal stopping rules", *Appl. Math n° 8, Springer Verlag, 1977.*