

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

APPLICATION DES TESTS NON PARAMETRIQUES A LA DETECTION SONAR *

E. STEFFEN - A. LAMBOURG

SINTRA ALCATEL 1, Avenue A. Briand 94117 ARCUEIL CEDEX

RESUME

En statistique, on distingue les tests paramétriques qui supposent connue la loi de probabilité, à un ou deux "paramètres" près (par exemple : la moyenne, l'écart-type, etc.) et les tests non paramétriques qui supposent simplement que la loi de probabilité appartient à une classe de lois.

La détection sonar est un problème statistique. Les traitements couramment utilisés pour cette détection sont souvent basés sur l'hypothèse d'une loi gaussienne (ex. : filtrage adapté - normalisation - détection ---).

En détection radar, les tests de rang, qui sont des tests non paramétriques, sont utilisés depuis longtemps, et présentent deux avantages :

- robustesse en cas de variation de la loi de probabilité du bruit (présence de "clutter"),
- constance de la probabilité de fausse alarme, et deux inconvénients :
- performances moins bonnes que celles des tests paramétriques en cas de loi gaussienne,
- coût plus élevé en charge de calcul.

On présente dans ce qui suit d'une part un rappel de la définition et des principales caractéristiques des tests non paramétriques, d'autre part les performances de deux tests de rang comparées à celle de la détection intégration classique sur signaux synthétiques, noyés dans du bruit ambiant (\sim gaussien).

Des simulations sur signaux réels (réverbération) effectuées dans un deuxième temps permettront de mesurer la validité de l'application.

SUMMARY

Statistically, parametric and non parametric tests are distinguished. For the first ones the probability-density-function is supposed to be defined by one or two more or less parameters (for example : mean, standard-deviation, etc.) and for the second ones the probability-density-function is only supposed to belong to a class of functions.

SONAR detection is a statistical problem. Processings generally used for detection are usually based on gaussian statistics (for example : matched-filtering, normalisation, detection...).

In radar detection, "raw tests", which are non parametric tests, have been used for a long time, they present two advantages :

- robustness when the probability-density-function of noise is varying (clutter),
- invariability of false-alarm-probability, and two drawbacks :
- worse results than parametric tests in case of gaussian hypothesis,
- higher computational cost.

On the following, definition and principal characteristics of non parametric tests are firstly recalled, then results obtained by "raw tests" are compared to those obtained by the classical detection-integration through simulations of synthetic signals imbedded in gaussian ambient noise.

Secondly, simulations with real signals (reverberation) will occur to judge the application validity.

* Cette étude a été menée avec l'aide de la DRET à partir des résultats du CETHEDEC.



INTRODUCTION

La détection d'un signal dans du bruit se ramène à un problème de test statistique d'hypothèse.

En général, on se limite à des classes de bruit de lois de probabilité gaussienne. Cette situation, où les lois considérées sont définies par un nombre fini de paramètres, est dite "paramétrique" (filtrage adapté, détection, normalisation ...). En sonar actif un double problème se pose :

- * L'estimation des paramètres du bruit ambiant (\sim gaussien),
- * la détection en présence de bruit réverbéré.

Afin de mieux s'adapter aux situations réelles, l'utilisation de tests dits "non paramétriques" peut être envisagée.

AVERTISSEMENT

Dans le contexte statistique de l'article le terme d'"échantillon" fait référence à une séquence de signal échantillonné.

1. THEORIE DES TESTS APPLIQUEE A LA DETECTION D'UN SIGNAL UTILE DANS DU BRUIT

1.1. Test d'hypothèse

En détection le problème est de décider de l'appartenance d'un échantillon dit litigieux $\{x_i\}$, résumant les n observations x_1, x_2, \dots, x_n , à l'une ou à l'autre des deux populations :

- [B] : bruit parasite seul
- [S+B] : signal + bruit

On définit donc deux hypothèses H_0 et H_1 telles que :

- $H_0 : \{x_i\} \in [B]$
- $H_1 : \{x_i\} \in [S+B]$

Le test statistique est un mécanisme qui permet de trancher entre les deux hypothèses H_0 et H_1 au vu des résultats.

1.2. Notions générales sur les tests statistiques

La situation la plus simple est celle où les lois de densité de probabilité de l'échantillon observé sont connues dans chacune des deux hypothèses. Ce sont respectivement $P_{H_0}(\{x_i\})$,

$$P_{H_1}(\{x_i\}).$$

On appelle alors taille du test la borne supérieure de la probabilité de fausse alarme (ou erreur de première espèce : probabilité de choisir H_1 lorsque H_0 est vraie). De même on appelle puissance du test la probabilité de détection (choix de l'hypothèse H_1 lorsque celle-ci est vraie).

Le théorème de NEYMAN-PEARSON donne à taille donnée le test de puissance maximale par la construction du rapport de vraisemblance V .

$$V = \frac{P_{H_1}(\{x_i\})}{P_{H_0}(\{x_i\})}$$

La comparaison de V à un seuil S permet de décider de la présence ($V > S$) ou de l'absence de signal ($V < S$).

Le cas où les densités de probabilité sont parfaitement connues est le cas des tests dits "paramétriques" (P). Le plus souvent ils sont basés sur la considération de lois gaussiennes. Dans la pratique les paramètres décrivant ces lois sont inconnus. Dès lors, le choix entre les hypothèses H_0 et H_1 se double de l'estimation de ces paramètres.

D'autre part, se pose le problème de la robustesse du test par rapport au modèle de loi choisi et de sa construction, lorsque l'on ignore tout de la loi (cas très fréquent en pratique). On fait alors appel à la classe des tests dits "libres" qui sont valables quelle que soit la loi de variable aléatoire étudiée. Les tests "non paramétriques" (NP) font partie de cette catégorie.

Leur utilisation suppose les conditions suivantes réalisées :

- la classe des lois de bruit pour laquelle le test est libre couvre les lois de bruit qu'on risque de rencontrer réellement,
- la probabilité de détection obtenue dans le cas d'une loi de bruit entièrement connue ne devra pas être trop mauvaise par rapport au test paramétrique optimal.

L'efficacité asymptotique relative (ARE) d'un test permettra de mesurer la qualité des performances obtenues et de comparer différents algorithmes. L'ARE est un nombre obtenu par comparaison avec le test paramétrique uniformément le plus puissant ou test de STUDENT.

1.3. Tests de rang

Les tests NP les plus couramment utilisés sont : les tests de rang TR.

Ils reposent sur les rangs affectés aux échantillons, c'est-à-dire sur des valeurs entières positives. Ils sont applicables dans les conditions suivantes :

- les populations d'échantillons doivent être formées de variables indépendantes. Cette condition peut être remplacée par l'hypothèse élargie que les lois de distribution sont invariantes pour le groupe des permutations,
- la statistique du rang doit être invariante vis à vis du groupe des transformations bijectives croissantes (cf. cas des TR pondérés).

Les tests de rang sont utilisés dans différentes situations.

- * Test de détection ou de présence : "test 2E" (2 échantillons).

Il s'agit d'un test d'identité de statistiques. Dans la formulation la plus générale aucune précision n'est donnée sur les fonctions de répartition des échantillons et seule la distorsion entre les deux lois est mesurée.

- * Test d'appartenance à différence connue : "Test Dif".

Dans ce cas la loi du signal émis est connue. On s'efforce alors de retrouver dans le signal reçu le type de modulation envoyé. Cet aspect peut s'interpréter comme un filtrage adapté.

- * Test d'indépendance de deux échantillons : "Test Ind".

Il s'agit là d'un problème de "Cross-corrélation" consistant à tester l'indépendance d'un échantillon litigieux par rapport à un échantillon témoin.

On ne traitera ici que le cas des "tests 2E".



Pour ceux-ci la formulation des hypothèses H_0 et H_1 devient différente. On a alors les hypothèses H'_0 et H'_1 .

H'_0 : l'échantillon litigieux est homogène à l'échantillon témoin,

H'_1 : l'échantillon litigieux n'est pas homogène à l'échantillon témoin.

2. MISE EN OEUVRE DES TESTS DE RANG

La procédure de test consiste à former une fonction W et à la comparer à un seuil. Cette fonction est appelée statistique de test.

$\{y_1, \dots, y_m\}$ représente l'échantillon témoin (bruit seul)

$\{x_1, \dots, x_n\}$ représente l'échantillon litigieux

R_i est le rang de l'observation x_i dans l'ensemble des deux échantillons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x_i\}_{i=1,n} \text{ et } \{y_j\}_{j=1,m} \\ \text{lorsqu'on range les observations par ordre croissant.} \end{array} \right.$$

lorsqu'on range les observations par ordre croissant.

Ainsi les tests de rang ne prennent en compte qu'une partie de l'information fournie par l'échantillon observé, ce qui explique qu'ils soient moins puissants que les tests paramétriques dans la situation gaussienne.

2.1. Test de WILCOXON

Ce test est intéressant pour sa simplicité. La statistique W est obtenue par "intégration" des valeurs de rang R_i

$$W_X = \sum_{i=1}^m R_i$$

Si les deux distributions d'échantillons sont issues de la même population (hypothèse H'_0) la moyenne et l'écart-type de W_X sont :

$$E\{W_X\} = \frac{n}{2} (n+m+1) \quad \text{Var}\{W_X\} = \frac{nm}{12} (n+m+1)$$

et pour n et m assez grands (> 8) W_X est asymptotiquement gaussien. Ceci permet de déterminer la région critique correspondant à l'ensemble des valeurs de W_X permettant de se placer dans l'hypothèse H_1 .

$$\left| W_X - \frac{n}{2} (n+m+1) \right| > \text{seuil} \cdot \sqrt{\frac{nm}{12} (n+m+1)}$$

L'ARE du test de WILCOXON contre le test de STUDENT vaut :

$$\frac{3}{\pi} \sim 0,95 \text{ pour des distributions gaussiennes}$$

0,864 au minimum pour des distributions non gaussiennes.

2.2. Test de rang pondéré exponentiellement

La pondération a pour but de moduler l'influence relative des observations de signal et de bruit et d'améliorer l'efficacité du test. Pour cela, FISHER-YATES a introduit une pondération gaussienne.

L'ARE obtenu est de 1 pour le cas gaussien et supérieur sinon. Bien que plus efficace que le test de WILCOXON il est plus difficile à mettre en oeuvre c'est pourquoi nous avons choisi un test de rang pondéré exponentiellement qui présente à peu près les mêmes performances que celui de FISHER-YATES, tout en étant plus aisé à programmer.

La statistique est définie par :

$$W_E = \sum_{i=1}^m \xi_i$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_i - 0.5}{N} = \int_0^{\xi_i} t e^{-t^2/2} dt \\ N = n+m \end{array} \right.$$

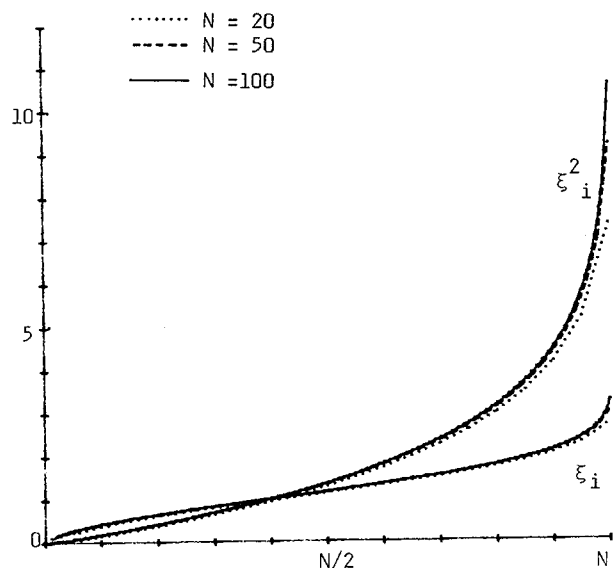
ce qui conduit à $\xi_i = C^{-1}\left(\frac{R_i - 0.5}{N}\right)$

$$\text{où } C^{-1}(z) = \sqrt{-2 \ln(1-z)}$$

C'est ce dernier algorithme qui a été mis en oeuvre par le CETHEDC (réf.1) et a donné des résultats très voisins de ceux de l'algorithme de FISHER-YATES.

La figure 1 montre l'influence de la pondération, les abscisses correspondant au rang, les ordonnées aux valeurs de ξ

FIGURE 1



Il existe d'autres tests de rang à 2 échantillons mais on s'est limité à ceux exposés ici.



2.3. Difficultés dans l'emploi des tests de rang

- * Tout d'abord la lenteur des procédures nécessaires (procédures de classement) peut être un obstacle pour le travail en temps réel. Mais ces tests peuvent s'appliquer sur des signaux non normalisés. Il faudrait donc faire un bilan de coût qui en tienne compte.
- * D'autre part le caractère libre des tests TR n'est assuré que si les observations de bruits sont indépendantes entre elles. Ceci n'est pas forcément vérifié en présence de réverbération.
- * De plus la non stationnarité du bruit pose un problème que l'on résoud cependant en prenant des échantillons de signaux localement stationnaires (ce qui limite la taille des séquences).

3. RESULTATS DE SIMULATION

Les premières simulations ont été réalisées sur signaux synthétiques.

Les échos sont la superposition de pics de largeur $2/B$ d'amplitude aléatoire (loi gaussienne), à des instants aléatoires dans une tranche de temps T correspondant à la séquence à tester.

- le bruit est approximativement gaussien, stationnaire, blanc dans la bande B ,
- les valeurs échantillonnées de bruit ou de signal + bruit sont indépendants. On a donc $n = BT$ valeurs dans une séquence à tester,
- les tests sont appliqués sur des valeurs détectées linéairement,
- le rapport signal sur bruit est ainsi défini :

$$\frac{S}{\bar{B}} = \frac{\text{Max}(S+B) - m_B}{\sigma_B}$$

où m_B moyenne du bruit (constante)

σ_B écart-type du bruit (constant)

$\text{Max}(S+B)$ = maximum d'amplitude des échantillons dans la séquence où le signal est additionné au bruit.

A partir des courbes COR obtenues on a mis en évidence le comportement des tests de rangs vis à vis des paramètres suivants :

n = nombre de points indépendants de la séquence à tester,

m = nombre de points indépendants de la séquence de référence,

P_D = probabilité de détection.

Pour cela, on a étudié l'évolution du rapport signal sur bruit en entrée dans différents cas et comparé les résultats à ceux obtenus par la détection-intégration (\sim test de STUDENT) appliquée dans les mêmes conditions.

3.1. Influence du nombre de points de la séquence de référence

A P_{FA} donnée et à n fixée les fig. 2 à 4 donnent le rapport S/B nécessaire en entrée en fonction de m pour une valeur P_D en sortie donnée.

On voit que pour avoir une P_D élevée, il faut avoir un nombre de points de référence supérieur au nombre de points à tester.

Le caractère limité de cette expérimentation (n et m petits) ne permet pas de conclure finement sur la valeur optimale de m .

On voit sur ces figures que le test TRP est meilleur que le test TR (rapport $(\frac{S}{B})_E$ plus faible

à P_{FA} et P_D donné).

3.2. Influence du nombre de points de la séquence à tester

Les figures 5 à 7 permettent de comparer les algorithmes choisis et de chiffrer, l'écart avec le test paramétrique de référence TI (intégration), lorsque n varie, avec $m = 2n$ (fig.5) ou $m = n$ (fig.6 et 7).

Les simulations étant faites dans l'hypothèse approximativement gaussienne, on vérifie bien que les tests non paramétriques sont moins puissants que la détection intégration.

Cependant, la perte en rapport S/B est faible (de l'ordre de 1 à 3 dB) dès que $n > 8$.

On constate que cet écart diminue lorsque la taille des échantillons augmente.

Ces résultats sont confirmés par ceux obtenus par le CETHEDC.

On peut remarquer que les résultats obtenus pour le test de rang pondéré sont meilleurs que pour le test de WILCOXON dès que $n > 8$. La pondération choisie semble donc bien améliorer l'efficacité du test.

4. PERSPECTIVES

Les premières simulations effectuées sur signaux synthétiques sont encourageantes. Elles donnent une première idée du comportement des tests non paramétriques dans des conditions pour lesquels ils ne sont pas les plus efficaces. De ce fait, une simulation sur signaux réels (réverbération) en cours de mise en oeuvre apportera certainement de nouvelles informations et permettra de juger de la validité de la méthode dans le cadre de l'application au SONAR.

BIBLIOGRAPHIE

- {1} Cahier du CETHEDC numéro spécial 1968
2ème trimestre
- {2} Cahier du CETHEDC numéro spécial 1972
4ème trimestre
- {3} Cahier du CETHEDC numéro spécial 1973
2ème trimestre
- {4} Elément de décision statistique J.ULMO-J.BERNIER
- {5} Théorie et méthodes de la statistique G.SAPORTA

* Dans le contexte du traitement du signal, le caractère libre d'un test permet une régularisation de la P_{FA} .

APPLICATION DES TESTS NON PARAMETRIQUES A LA DETECTION SONAR

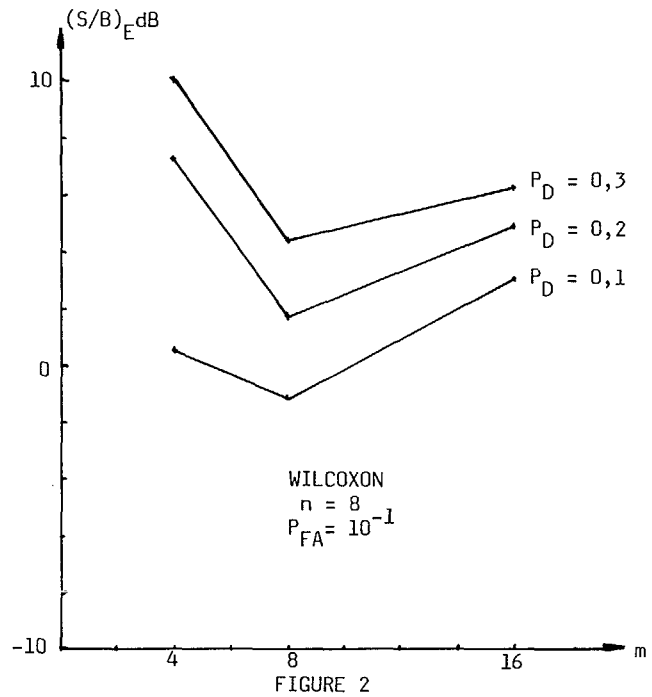


FIGURE 2

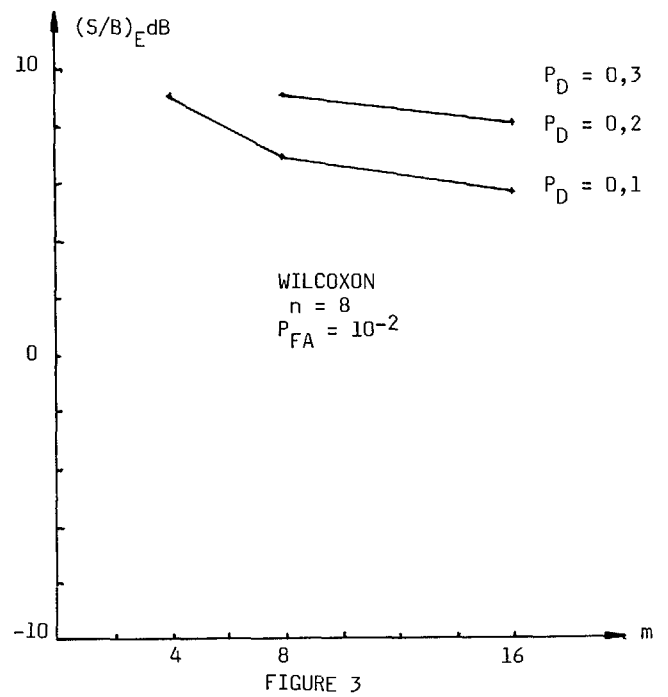


FIGURE 3

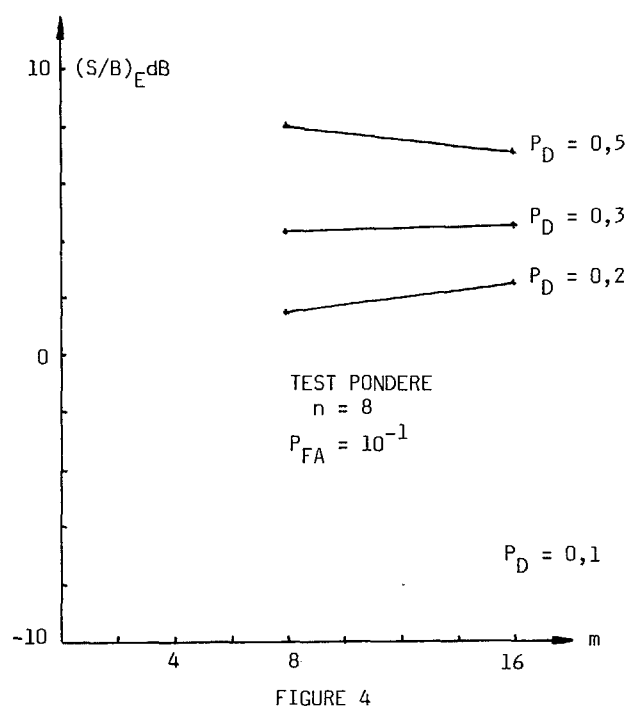


FIGURE 4

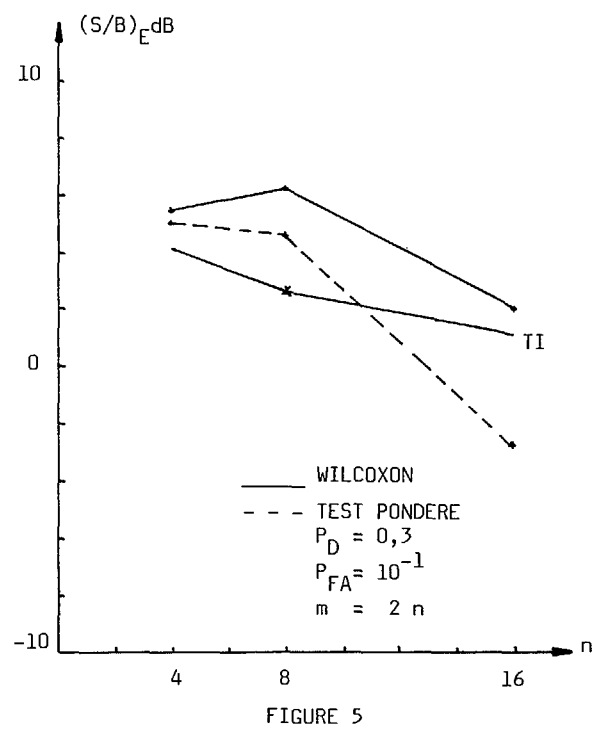


FIGURE 5



APPLICATION DES TESTS NON PARAMETRIQUES A LA DETECTION SONAR

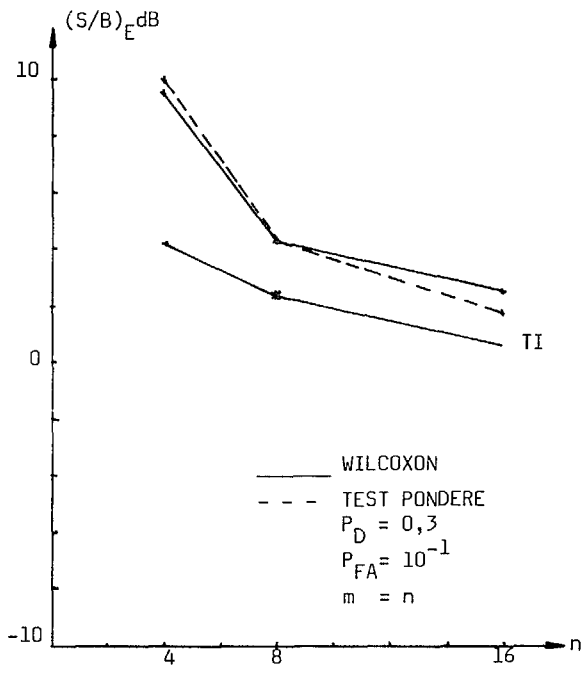


FIGURE 6

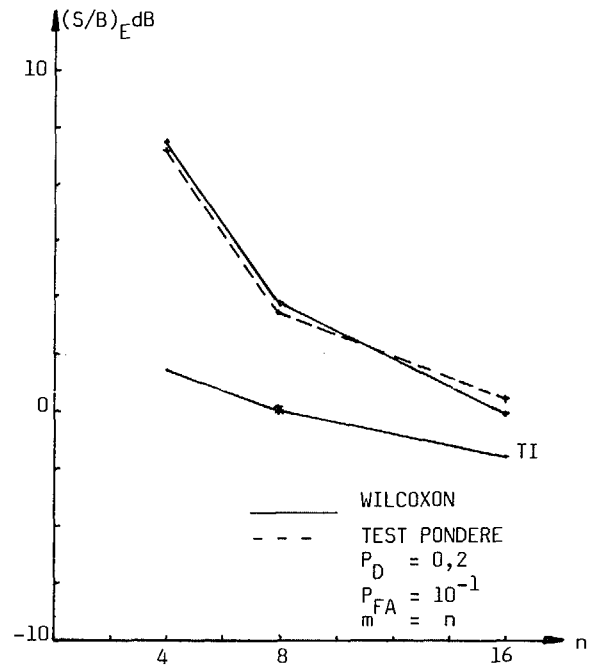


FIGURE 7