

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



205

NICE du 16 au 20 MAI 1983

ESTIMATION SOUS-OPTIMALE RAPIDE POUR LA DECONVOLUTION EN TEMPS-REEL

Guy DEMOMENT, Roger REYNAUD, Alain SEGALEN

LABORATOIRE DES SIGNAUX ET SYSTEMES - C.N.R.S.-E.S.E., Plateau du Moulon, 91190 GIF-SUR-YVETTE

RESUME

Une extension stochastique du problème de la déconvolution est faite afin de résoudre une difficulté d'orthogonalisation rencontrée quand on accélère la convergence de la méthode de Kaczmarz pour effectuer une déconvolution en temps réel. La formulation choisie s'applique aux problèmes mono ou bi-dimensionnels et un algorithme rapide est utilisé pour calculer une solution optimale. Les résultats obtenus permettent d'éclairer les hypothèses implicites d'une méthode algébrique précédemment développée et de reformuler un algorithme sous-optimal pour une plus large classe de problèmes. Des résultats obtenus en simulation sont présentés et une comparaison est faite avec quelques méthodes de déconvolution.

SUMMARY

Most deconvolution problems can be expressed in the system of linear equations $\underline{y} = H\underline{x} + \underline{b}$ where \underline{y} is a vector of observations, \underline{x} a vector of unknown signal parameters, H a known matrix and \underline{b} a vector of random errors. It is shown how a Kalman filter approach can solve an orthogonalisation problem that occurs when accelerating the convergence of the Kaczmarz algorithm for real-time deconvolution. A fast algorithm is used and a new suboptimal estimator is developed in the case of noise and input stationary statistics. Simulation results in reflection seismology are presented and a comparison is made with other well-known deconvolution methods.



I. INTRODUCTION

Le problème de la restauration d'un signal dégradé par un système linéaire a des applications nombreuses dans des domaines variés tels que la spectrométrie, la géophysique, la calorimétrie, la radio-astronomie, la mesure des très hautes tensions, etc.. Ce problème de restauration ou de déconvolution est un problème inverse et, comme la plupart des problèmes de ce type en physique, il s'agit d'un problème mal posé. Les premiers développements de la théorie de la déconvolution ont donc porté sur une refonte du concept de solution : quasi-solutions, solutions approchées, régularisation. Le second volet de la théorie concerne la stabilité de la solution puisque l'on ne peut pas se satisfaire des habituelles conditions d'existence et d'unicité. Les difficultés de ce problème sont essentiellement dues au caractère compact de l'opérateur de convolution et au fait que l'on travaille avec des données réelles, et donc inévitablement entachées d'erreur. Les travaux effectués dans ce domaine ont montré le rôle essentiel que jouait l'information a priori dans l'obtention d'une solution acceptable. Si l'on remarque de plus que, dans la pratique, les données à traiter sont nécessairement discrètes et en nombre fini, on comprend qu'une façon naturelle d'englober ces différents aspects, information a priori, bruit de mesure, données discrètes, consiste à effectuer une extension stochastique du problème en utilisant une approche bayésienne. Cette idée qui n'est pas nouvelle [1,2] permet de transformer le problème initial en un problème bien-posé, mais il reste encore à résoudre les difficultés liées aux aspects numériques de la déconvolution. En effet, les dimensions du problème sont souvent telles qu'un traitement récursif des données s'impose. L'outil de base en est le filtre de Kalman et des solutions intéressantes ont été proposées dans le cas de signaux monodimensionnels [3,4,5]. Un effort considérable a été fait ces dernières années pour étendre ces techniques de filtrage récursif monodimensionnel à deux dimensions. Le principal obstacle est l'absence d'ordonnement naturel de l'image qui rend la notion habituelle de causalité inapplicable et qui conduit à introduire des modèles semi-causaux et des hypothèses de séparabilité de covariance. De plus, les travaux publiés concernent pour la plupart la restauration d'une image simplement bruitée ou bougée et bruitée, et il existe peu de résultats sur le problème général de la déconvolution récursive d'images [6,14].

Dans cet article nous utilisons un modèle d'état applicable aussi bien aux problèmes monodimensionnels que bidimensionnels dans lequel le vecteur d'état s'identifie à l'objet entier à restaurer et où seule l'équation d'observation traduit la dynamique de l'acquisition de l'image. La difficulté avec cette approche est l'énorme volume de calcul et de mémoire qu'elle nécessite dans sa formulation classique [7]. C'est pourquoi, dans un deuxième temps nous présentons un algorithme de Kalman rapide qui permet un gain substantiel sur ces deux points. Il s'agit simplement d'une extension de la méthode de Morf et coll. [8] au cas d'un modèle non-constant particulier. Un autre intérêt apparaît alors : il est possible d'utiliser cet algorithme rapide dans le problème voisin de la reconstruction d'images en tomographie sans la contrainte d'une observation vectorielle liée aux modèles invariants dans le temps [9].

Nous appliquons ensuite cette méthode au cas de la déconvolution monodimensionnelle, ce qui permet d'éclairer les hypothèses statistiques implicites d'une méthode déterministe précédemment développée [10] et de reformuler un estimateur sous-optimal

rapide dont le calcul du vecteur-gain ne nécessite plus la résolution d'une équation matricielle de Riccati [11]. Une comparaison est ensuite faite avec d'autres méthodes [3,4,5], illustrée par des résultats obtenus en simulation.

II. EXTENSION STATISTIQUE DU PROBLEME

Les données étant discrètes et en nombre fini, le problème de la déconvolution se ramène à la résolution d'un système linéaire d'équations

$$\underline{y} = H\underline{x} + \underline{b} \quad (1)$$

où \underline{y} est un vecteur d'observations dont les coordonnées sont les m mesures effectuées, \underline{x} est un vecteur de n paramètres définissant le signal à restaurer, H est une matrice connue et \underline{b} est un vecteur représentant les erreurs de mesure supposées additives [10]. Il s'agit là d'un modèle très général applicable aux problèmes de déconvolution de signaux temporels, de restauration d'images, de reconstruction d'images.

Les suites $\{x(k)\}$ et $\{b(k)\}$ sont supposées être des réalisations de deux processus aléatoires et l'information a priori nécessaire pour obtenir une solution acceptable à ce problème porte sur leurs lois de probabilité. Elle est donnée par

$$E\{\underline{x}\} = \underline{x}_0 \quad E\{(\underline{x} - \underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)^t\} = R_{XX} = P_0 \quad (2)$$

$$E\{\underline{b}\} = 0 \quad E\{\underline{b} \underline{b}^t\} = R_{bb} \quad (3)$$

$$E\{\underline{b} \underline{x}^t\} = 0 \quad (4)$$

Le problème de la déconvolution devient un problème classique d'estimation dans lequel cette information a priori est utilisée pour construire un estimateur optimal. Cette information a priori étant limitée aux deux premiers moments du signal à restaurer et du bruit, l'estimateur retenu est l'estimateur linéaire à variance minimale qui est l'estimateur de Bayes dont la fonction de coût est la variance de l'erreur d'estimation. Son expression est

$$\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{x}}_0 + P_0 H^t [HP_0 H^t + R_{bb}]^{-1} [\underline{y} - H\underline{x}_0] \quad (5)$$

$$= [H^t R_{bb}^{-1} + P_0^{-1}]^{-1} [H^t R_{bb}^{-1} \underline{y} + P_0^{-1} \underline{x}_0] \quad (6)$$

Dans la pratique, les dimensions m et n sont élevées et du même ordre de grandeur, si bien que l'inversion de la matrice de covariance des mesures $R_{YY} = (HP_0 H^t + R_{bb})$ ou de la matrice d'information $(H^t R_{bb}^{-1} H + P_0^{-1})$ nécessitée par l'une ou l'autre des expressions de cet estimateur n'a rien de trivial et devient très rapidement impraticable lorsque n croît.

Il est possible de mettre cet estimateur en oeuvre de façon récursive, en utilisant les données scalaires $y(i)$ au fur et à mesure de leur acquisition. Il s'agit d'un cas particulier d'un filtre de Kalman et si $\hat{\underline{x}}_i$ désigne l'estimée à variance minimale après i mesures scalaires y_i telles que

$$y_i = h_i \underline{x} + b_i \quad (7)$$

où h_i désigne la i ème ligne de la matrice H , alors

$$\hat{\underline{x}}_{i+1} = \hat{\underline{x}}_i + K_i (r_i^e)^{-1} (y_i - h_i \hat{\underline{x}}_i) \quad (8)$$

$$\text{où } K_i = P_i h_i^t \quad r_i^e = h_i P_i h_i^t + \sigma_i^2 \quad (9)$$

$$P_{i+1} = P_i - K_i (r_i^e)^{-1} K_i^t \quad E\{b_i b_j\} = \sigma_i^2 \delta_{ij} \quad (10)$$

Comme les mesures sont scalaires, il n'est pas besoin d'inverser de matrices. Cependant la matrice de covariance P_i de dimensions $(n \times n)$ doit être corrigée à chaque fois, et ceci entraîne un volume de calculs et de mémoire considérable dès que les dimensions du problème sont grandes. Dans le cas monodimensionnel où le signal à restaurer est naturellement ordonné, on peut introduire une dynamique dans le vecteur d'état x de façon à en réduire la dimension à celle de la réponse impulsionnelle discrétisée du système linéaire dont il faut corriger la distorsion [3,5]. Si le système est de plus invariant, on peut utiliser des algorithmes rapides [5]. Le seul inconvénient est que le signal à restaurer doit être représenté comme un processus autorégressif d'ordre fini. Par contre, dans le cas des images, le même souci de réduire les dimensions du vecteur d'état conduit à organiser l'image en bandes et à introduire une causalité artificielle en utilisant des modèles semi-causaux [12,13]. L'optimalité de la solution est donc perdue dès le départ [15]. C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de mettre à profit les techniques introduites pour le développement d'algorithmes rapides [8] et de rechercher une solution moins coûteuse en volume de calculs et en taille mémoire que la solution classique du filtre de Kalman bidimensionnel scalaire, en exploitant les propriétés de l'équation d'observation (7), avant d'introduire éventuellement des solutions sous-optimales.

III. DEVELOPPEMENT D'UN ALGORITHME RAPIDE

Une réduction substantielle du volume des calculs et de la mémoire nécessaires pour la mise en oeuvre d'un filtre de Kalman peut être obtenue dans le cas d'un modèle d'état constant dans le temps [8,16,17]. Ceci est obtenu en remplaçant l'équation de type Riccati utilisée pour corriger la matrice de covariance, par une équation de type Chandrasekhar. Ce résultat peut être étendu à certains modèles non constants. Les équations de ces modèles s'écrivent

$$y_i = h_i x_i + b_i \quad (11)$$

$$x_{i+1} = D_i x_i + Y_i u_i \quad (12)$$

où le bruit d'état u_i est introduit pour tenir compte d'éventuelles erreurs de modélisation dans (11). Les hypothèses s'écrivent

$$E\{x_0\} = 0 \quad E\{x_0 x_0^t\} = \pi_0 \quad (13)$$

$$E\{u_i x_0\} = 0 \quad E\{b_i x_0\} = 0 \quad E\{u_i\} = E\{b_i\} = 0 \quad (14)$$

$$E\{u_i u_j\} = Q \delta_{ij} \quad E\{b_i b_j\} = R \delta_{ij} \quad E\{u_i b_j\} = C \delta_{ij} \quad (15)$$

$$\text{de plus } h_{i+1} = h_i D_i \quad \text{et } Y_{i+1} = D_i^t Y_i \quad (16)$$

où D_i est une matrice orthogonale ($D^{-1} = D^t$) introduite pour tenir compte du mode d'acquisition des données. Dans le cas mono-dimensionnel, il s'agit d'un simple opérateur de décalage et cette matrice est constante. Il en est de même dans le cas de la tomographie, sous réserve que le découpage de l'objet ait été fait en coordonnées polaires avec un incrément angulaire sous-multiple de l'angle de rotation de la source. Dans le cas d'une restauration d'image, cette matrice n'est plus constante, mais prend successivement deux ou trois expressions selon le mode de balayage choisi [18].

L'estimée à variance minimale est calculée récursivement par

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + K_i (R_i^e)^{-1} (y_i - h_i \hat{x}_i) \quad (17)$$

où

$$R_i^e = h_i P_i h_i^t + R \quad (18)$$

$$K_i = P_i h_i^t + Y_i C \quad (19)$$

$$P_{i+1} = P_i + Y_i Q Y_i^t - K_i (R_i^e)^{-1} K_i^t \quad (20)$$

P_i n'intervenant pas explicitement dans (17), on cherche, comme dans [8], à ne faire apparaître que des accroissements, ce qui évitera de calculer explicitement (20) à chaque observation. Posons

$$\delta K_i \triangleq K_i - D_{i-1}^t K_{i-1} \quad (21)$$

$$\delta R_i^e \triangleq R_i - R_{i-1} \quad (22)$$

$$\delta P_i \triangleq P_i - D_{i-1}^t P_{i-1} D_{i-1} \quad (23)$$

Les équations (18-20) du type Riccati peuvent être remplacées par des équations du type Chandrasekhar (voir l'annexe)

$$Y_i = [I - K_i (R_i^e)^{-1} h_i^t] Y_{i-1} \quad (24)$$

$$M_{i+1} = M_i + M_i Y_i^t h_i^t (R_i^e)^{-1} h_i Y_i M_i \quad (25)$$

$$R_{i+1}^e = R_i^e + h_{i+1} Y_i M_i Y_i^t h_{i+1}^t \quad (26)$$

$$K_{i+1} = D_{i-1}^t K_i + Y_i M_i Y_i^t h_{i+1} \quad (27)$$

L'initialisation de (26) et (27) se fait sans difficulté

$$K_0 = \pi_0 h_0^t \quad (28)$$

$$R_0^e = h_0^t \pi_0 h_0^t + R \quad (29)$$

mais celle de (24) et (25) nécessite, comme pour [8] quelques calculs préliminaires. Posons

$$\delta P_1 = \pi_0 + Y_0 Q Y_0^t - K_0 (R_0^e)^{-1} K_0^t - D_0^t \pi_0 D_0 \quad (30)$$

La dimension de la matrice carrée M_i est le rang α de δP_1 qui peut être très inférieur à la dimension n du vecteur d'état x . Avec la définition (30), les valeurs initiales Y_0 et M_0 de (24) et (25) sont obtenues en factorisant aussi δP_1 sous la forme

$$\delta P_1 = Y_0 M_0 Y_0^t \quad \text{avec } M_0 = \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} \quad M_+ > 0, M_- < 0 \quad (31)$$

Lorsque $\alpha \ll n$, le nombre de variables corrigées par (24-27) est bien plus faible que dans la version classique (18-20), le volume des calculs et la taille mémoire sont alors considérablement réduits, avec comme conséquence annexe mais importante une meilleure stabilité numérique.

IV. APPLICATION A LA DECONVOLUTION MONODIMENSIONNELLE

Dans le cas d'une déconvolution monodimensionnelle, l'équation (7) s'écrit, pour un système invariant

$$y_i = \sum_{j=0}^{l-1} h_j x_{i-j} + b_i \quad (32)$$

où les coefficients h_j sont les valeurs de la réponse impulsionnelle discrétisée. Le système dont on veut corriger la distorsion étant supposé invariant, nous avons

$$h_0 = [h_{l-1}, h_{l-2}, \dots, h_0, 0, \dots, 0] \quad (33)$$



et la matrice D_i est constante et de la forme

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = D \quad (34)$$

Les processus $\{x_i\}$ et $\{b_i\}$ étant supposés stationnaires et le modèle (33) parfaitement connu, nous pouvons écrire puisque π_0 est une matrice de Toeplitz

$$\delta P_1 = \pi_0 - \underline{K}_0 (R_0^e)^{-1} \underline{K}_0^t - D^t \pi_0 D \quad (35)$$

$$= - \underline{K}_0 (R_0^e)^{-1} \underline{K}_0^t$$

où $\underline{K}_0 = \pi_0 h_0^t$ et $R_0 = h_0 \pi_0 h_0^t + R$ (36)

La matrice M_0 est donc un scalaire et nous avons

$$Y_0 = \underline{K}_0 \quad M_0 = -(R_0^e)^{-1} \quad (37)$$

L'algorithme s'écrit donc

$$\left. \begin{aligned} c &= \underline{h}_{i+1} \underline{y}_i \\ d &= c M_i \\ \underline{K}_{i+1} &= D^t \underline{K}_i + d \underline{y}_i \\ R_{i+1}^e &= R_i^e + cd \\ \underline{y}_{i+1} &= \underline{y}_i - c (R_{i+1}^e)^{-1} \underline{K}_{i+1} \\ M_{i+1} &= M_i + d^2 (R_{i+1}^e)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Il est possible, à partir de cet algorithme, d'effectuer une déconvolution en ligne ou en temps réel, et de fournir à l'instant i la meilleure estimée lissée de l'entrée à l'instant $i-p$. La méthode étant localement optimale, il suffit de faire

$$\hat{x}(i-p|i) = \underline{\beta} \cdot \hat{x}(i) \quad (39)$$

où $\underline{\beta}$ est un vecteur ligne dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la p ème qui vaut un. Dans ces conditions, si $q = \max\{p, \ell\}$, le nombre d'opérations arithmétiques élémentaires nécessitées par (39) est de $(4q+2+4)$ multiplications et $(4q+2+5)$ additions par instant d'échantillonnage. Dans la pratique, l'amélioration due au lissage est surtout sensible pour les faibles valeurs de p , et l'on a en général $q = \ell$.

V. RETOUR SUR UNE METHODE SOUS-OPTIMALE [10]

Lorsque les processus $\{x_i\}$ et $\{b_i\}$ sont stationnaires, le vecteur $\delta K_{g,i}$ de A-6 converge très vite vers le vecteur nul. Le calcul du vecteur-gain ne nécessitant pas de disposer des données $y_i, i=1,2,\dots$, une façon simple de réduire le volume des calculs, sans trop perdre par rapport à la solution optimale, consiste à remplacer (38) par

$$\underline{K}_{g,i+1} = D^t \underline{K}_{g,i} \quad (40)$$

avec $\underline{K}_{g,0} = [D]^N \underline{K}_{g,N}$ (41)

où $\underline{K}_{g,N}$ est calculé à l'avance et une fois pour toutes à l'aide de (38), N étant une valeur de i pour laquelle $\delta K_{g,i}$ est sensiblement nul. Cette solution est intéressante lorsque la méthode est mise en oeuvre en temps

réel puisqu'elle permet de réduire le nombre des opérations arithmétiques élémentaires d'un facteur 2,5.

C'est dans ce même but qu'une méthode algébrique de déconvolution en ligne avait été développée [10] dans laquelle le signal à restaurer était considéré comme un signal déterministe inconnu. Cette méthode consiste à accélérer la convergence de l'algorithme de Kaczmarz pour l'inversion généralisée de l'équation (1), en effectuant une quasi-orthogonalisation de lignes à l'aide d'une transformation linéaire de l'espace du signal. Cette méthode est particulièrement simple et fournit de bons résultats dans le cas de systèmes ayant un caractère passe-bas dominant. Cependant, cette approche déterministe du problème entraîne un empirisme dans le choix de la matrice de transformation qui s'accommode mal des systèmes passe-bande rencontrés par exemple en échographie ultrasonore [19]. Dans cette méthode, le signal est restauré selon une équation analogue à (8), mais où le vecteur gain est obtenu par

$$\underline{K}_i (r_i^e)^{-1} = M_i h_i^t (h_i M_i h_i^t)^{-1} \quad (42)$$

où $M_i = D^t M_{i-1} D$ et $M_0 =$ matrice diagonale (43)

L'erreur moyenne quadratique emq peut être calculée pour un vecteur gain quelconque à partir de l'expression suivante de l'évolution de la matrice de covariance P

$$P_{i+1} = (I - \underline{K}_i h_i) P_i (I - \underline{K}_i h_i)^t + \underline{K}_i R_i^e \underline{K}_i^t \quad (44)$$

Dans la méthode de Kaczmarz, $M_0 = I$, d'où

$$emq_{i+1} = E \left\{ (\underline{x} - \hat{\underline{x}}_{i+1})^t (\underline{x} - \hat{\underline{x}}_{i+1}) \right\} = \text{trace}[P_{i+1}] \quad (44)$$

$$= emq_i - (h_i h_i^t)^{-1} (h_i P_i h_i^t - \sigma_i^2) \quad (45)$$

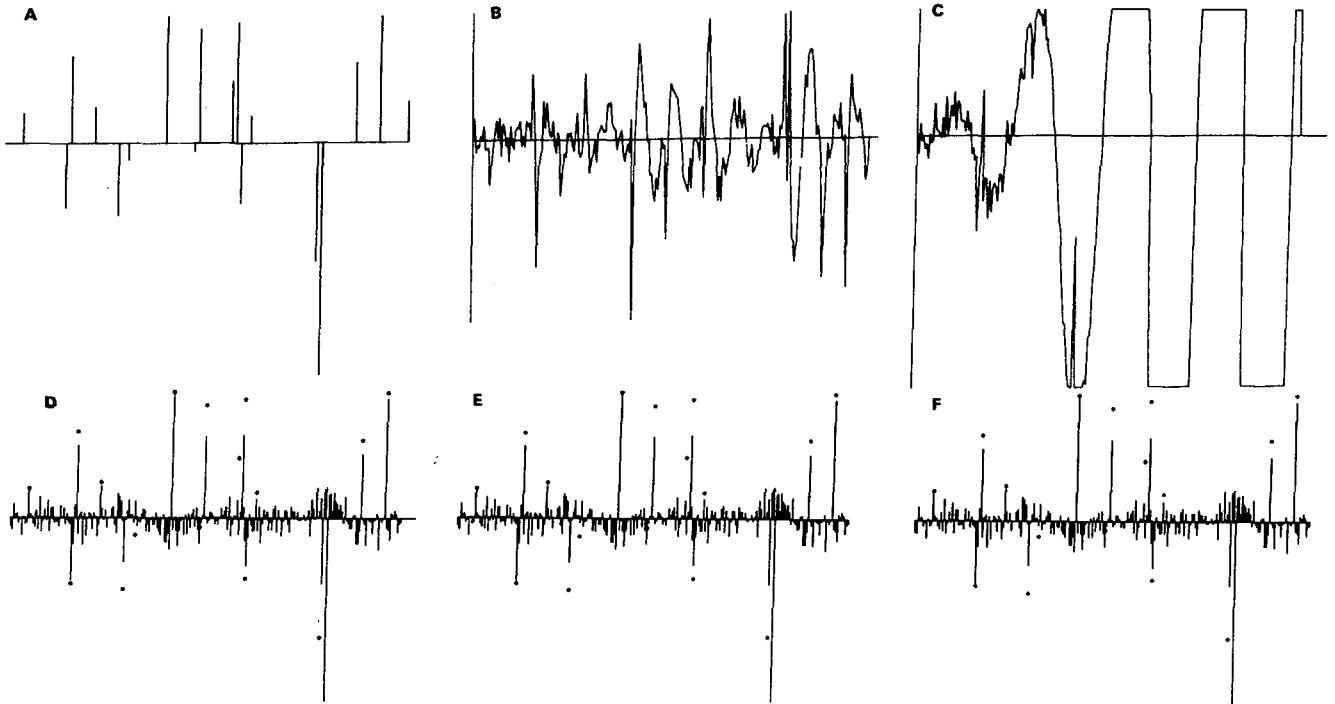
En l'absence de bruit, $\sigma_i = 0$, l'erreur moyenne quadratique est garantie non croissante et on converge vers la solution inverse généralisée de $\underline{y} = H \underline{x}$. Dans la réalité $\sigma_i \neq 0$ et la méthode peut diverger ou éventuellement se stabiliser dans un comportement cyclique dès que $h_i P_i h_i^t < \sigma_i$ [9]. L'introduction d'une matrice de quasi-orthogonalisation $M_0 \neq I$ améliore les choses [10]. L'erreur moyenne quadratique devient

$$emq_{i+1} = emq_i - 2(h_i M_i h_i^t)^{-1} (h_i M_i P_i h_i^t) + (h_i M_i h_i^t)^{-2} (h_i M_i^2 h_i^t) R_i^e \quad (46)$$

La présence du terme en M_i^2 dans l'expression du coefficient de R_i^e montre qu'effectivement on peut modifier l'importance relative des deux termes d'évolution de l'erreur quadratique moyenne en jouant sur le choix des éléments diagonaux de M_0 . Il n'empêche que la valeur optimale de \underline{K}_i , c'est-à-dire celle qui donne une solution à variance minimale à chaque i , est donnée par (9). Dans [10], le choix de M_0 était fait en pondérant exponentiellement le passé de façon à permettre à l'algorithme de suivre les fluctuations rapides du signal à restaurer. En fait ce choix serait optimal si $M_i h_i^t (h_i M_i h_i^t)^{-1} = P_{i-1} h_i^t (R_i^e)^{-1}$ c'est-à-dire si le vecteur $M_i h_i^t$ était un vecteur propre de la matrice de covariance d'erreur de l'estimateur à variance minimale. Cette condition est assez bien approchée lorsque le système a une réponse impulsionnelle du premier ordre dominant, ce qui explique les bons résultats obtenus avec des systèmes de ce type [10].

La méthode (40-41) permet donc de résoudre la difficulté précédente et de fournir, quel que soit h_0 , une solution vraiment sous-optimale, c'est-à-dire proche de

ESTIMATION SOUS-OPTIMALE RAPIDE POUR LA DECONVOLUTION EN TEMPS-REEL



l'optimum. De plus, et contrairement à [11], le calcul de K_N ne nécessite plus la résolution d'une équation matricielle de Riccati et peut être fait par un algorithme rapide (38).

VI. EXEMPLE D'APPLICATION

Le problème simulé est celui de l'étude d'un milieu stratifié, tel qu'il peut être rencontré en échographie ultrasonore [19] ou en géophysique [4]. L'exemple est d'ailleurs emprunté à Mendel [4]. La séquence d'entrée représentant la réflectivité du milieu est représentée à la figure 1-a. Elle est impulsive et blanche par nature et modélisée par un processus Bernouilli-Gaussien. L'instrument a une réponse impulsionnelle du 4ème ordre qui est discrétisée sur $\ell = 48$ points. La sortie mesurée avec un rapport signal-à-bruit de 10 dB est présentée à la figure 1-b. Les résultats obtenus par la méthode déterministe [10] sont présentés à la figure 1-c, et les figures 1-d, 1-e et 1-f présentent les lissages obtenus respectivement par le filtre de Kalman classique (8-10), le filtre de Kalman rapide (38) et par le nouvel estimateur sous-optimal (Adèle 40-41). Ce dernier résultat soutient la comparaison avec l'estimation optimale de Mendel [4] avec, malgré le caractère "minimal" de la représentation de ce dernier, un gain d'environ 2,3 dans le volume des calculs, ce qui justifie à nos yeux l'approximation asymptotique (41).

VII. CONCLUSIONS

Le tableau ci-après résume le volume des calculs (limité aux multiplications jugées les plus coûteuses) nécessités par la restauration d'un vecteur d'entrée à partir de m observations de la sortie et avec un modèle d'observation de dimension ℓ .

L'utilisation du filtre de Kalman discret pour résoudre le problème de la déconvolution n'est pas nouvelle [3,4,5], mais l'approche que nous proposons se distingue des précédentes par les avantages suivants :

Algorithme	Multiplications
Kalman conventionnel [3]	$[3(m+\ell)^2 + 3(m+\ell)]m$
Lisseur optimal en deux passes de Mendel [4]	$(2\ell^3 + 5\ell^2 + 4\ell)m + \ell$ (*)
Kalman rapide (38) [5]	$(5\ell + 4)m$
Adèle (17,40)	$2\ell m$

(*) la valeur de ℓ est en général plus faible dans ce cas car le modèle d'état est une réalisation minimale.

(i) la différence essentielle avec l'estimateur de Mendel [4] est que l'équation d'observation (7) est l'intégrale de convolution discrétisée. Cette façon de procéder, commune avec [3,5] évite tous les problèmes de réalisation minimale et de stabilité associés à la méthode de Mendel. De plus le calcul de $\hat{x}(i-p/i)$ est immédiat.

(ii) la différence avec la méthode de Crump [3] ou de Commenges [5] tient à l'information a priori sur le signal à restaurer qui est uniquement contenue dans π_0 , ce qui est moins restrictif qu'un modèle autorégressif, et ce qui permet cependant de développer un algorithme rapide.

Par ailleurs l'approximation asymptotique de la version sous-optimale (Adèle 17,40), qui est justifiée dès que $\ell < m$, permet de gagner un facteur d'environ 2,5 dans le volume des calculs tout en fournissant des résultats acceptables.

L'exploitation de l'algorithme (24-27) dans le cas des signaux bidimensionnels est exposée dans [18].



ANNEXE

Avec les définitions (21-23), la démonstration de (24-27) se fait par une technique analogue à celle utilisée dans [8]. Posons

$$\underline{\delta K}_i \triangleq K_i - D_{i-1}^t K_{i-1} \quad (21)$$

$$\text{d'où } \underline{\delta K}_i = (P_i - D_{i-1}^t P_{i-1} D_{i-1}) \underline{h}_i^t \quad (A-1)$$

$$\text{de même } \underline{\delta R}_i^e \triangleq R_i^e - R_{i-1}^e \quad (22)$$

$$\text{entraîne } \underline{\delta R}_i^e = \underline{h}_i (P_i - D_{i-1}^t P_{i-1} D_{i-1}) \underline{h}_i^t \quad (A-2)$$

Nous obtenons, d'après (20)

$$\begin{aligned} \delta P_{i+1} &= \delta P_i - \underline{K}_{g,i} (R_i^e)^{-1} \underline{K}_{g,i}^t \\ &\quad + D_{i-1}^t \underline{K}_{g,i-1} (R_{i-1}^e)^{-1} \underline{K}_{g,i-1}^t D_{i-1} \end{aligned} \quad (A-3)$$

$$\text{où } \underline{K}_{g,i} = \underline{K}_i (R_i^e)^{-1} \quad (A-4)$$

$$\begin{aligned} \delta P_{i+1} &= \delta P_i - \underline{K}_{g,i} \left[\underline{R}_{i-1}^e + \underline{h}_i \delta P_i \underline{h}_i^t \right] \underline{K}_{g,i}^t \\ &\quad + \left[\underline{K}_{g,i} - \underline{\delta K}_{g,i} \right] (R_{i-1}^e)^{-1} \left[\underline{K}_{g,i} - \underline{\delta K}_{g,i} \right]^t \end{aligned} \quad (A-5)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \underline{\delta K}_{g,i} &\triangleq \underline{K}_{g,i} - D_{i-1}^t \underline{K}_{g,i-1} \\ &= (\underline{\delta K}_i - \underline{K}_{g,i} \underline{\delta R}_i^e) (R_{i-1}^e)^{-1} \\ &= \left[I - \underline{K}_{g,i} \underline{h}_i \right] \delta P_i \underline{h}_i^t (R_{i-1}^e)^{-1} \end{aligned} \quad (A-6)$$

En reportant (A-6) dans (A-5) et en développant, il vient

$$\begin{aligned} \delta P_{i+1} &= \left[I - \underline{K}_{g,i} \underline{h}_i \right] \left[\delta P_i + \delta P_i \underline{h}_i^t (R_{i-1}^e)^{-1} \underline{h}_i \delta P_i^t \right] \\ &\quad \times \left[I - \underline{K}_{g,i} \underline{h}_i \right]^t \end{aligned} \quad (A-7)$$

qui peut se mettre sous une autre forme

$$\begin{aligned} \delta P_{i+1} &= \left[I - D_{i-1}^t \underline{K}_{g,i-1} \underline{h}_i \right] \left[\delta P_i + \delta P_i \underline{h}_i^t (R_i^e)^{-1} \underline{h}_i \delta P_i^t \right] \\ &\quad \times \left[I - D_{i-1}^t \underline{K}_{g,i-1} \underline{h}_i \right]^t \end{aligned} \quad (A-8)$$

Si l'on admet que l'on peut factoriser δP_i sous la forme

$$\delta P_i = Y_o M_o Y_o^t \quad (A-9)$$

alors on montre par récurrence que

$$\delta P_{i+1} = Y_i M_i Y_i^t \quad (A-10)$$

$$\text{avec } Y_i = (I - \underline{K}_{g,i} \underline{h}_i) Y_{i-1} \quad (A-11)$$

$$\text{et } M_i = M_{i-1} + M_{i-1} Y_{i-1}^t \underline{h}_i^t (R_{i-1}^e)^{-1} \underline{h}_i Y_{i-1} M_{i-1}^t \quad (A-12)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HO Y.C., LEE R.C.K. "A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control". IEEE Transactions, AC-9 : 333-339, (1964).
- [2] FRANKLIN J.N. "Well-posed stochastic extensions of ill-posed linear problems". J. Math. Anal. Appl., 31 : 682-716, (1970).
- [3] CRUMP N.D. "A Kalman filter approach to the deconvolution of seismic signals". Geophysics, 39 : 432-444 (1974).
- [4] MENDEL J.M., KORMYLO J. "New fast optimal white-noise estimators for deconvolution". IEEE Transactions, GE-15 : 32-41, (1977).
- [5] COMMENGES D. "Etude théorique et mise en oeuvre d'algorithmes de déconvolution". Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Bordeaux I, n° 296, (1980).
- [6] DIKSHIT S.S. "A recursive Kalman window approach to image restoration". IEEE Trans., ASSP-30 : 125-140, (1982).
- [7] HART C.G. et coll. "Digital signal processing for image deconvolution and enhancement" in New Directions in Signal Processing in Communication and Control, J.K. Skwirzynski ed., NATO ASIS, Groningen, The Netherlands, Noordhoff-Leiden (1975).
- [8] MORF M. et coll. "Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systems". IEEE Trans. AC-19 : 315-323, (1974).
- [9] WOOD S.L. et coll. "Reconstruction with limited data using estimation theory", in Computer aided tomography and ultrasonics in medicine, J.Raviv, J.F.Greenleaf & G.T.Herman ed., North-Holland, (1979).
- [10] DEMOMENT G., SAINT-FELIX D. "Déconvolution discrète en temps-réel", 8ème Colloque GRETSI, Nice, 275-280, (1981).
- [11] DEMOMENT G., SEGALEN A. "Adèle, a fast suboptimal estimator for real-time deconvolution". Electronics Letters, 19 : 86-88, (1983).
- [12] WOODS J.W., RADEWAN C.H. "Kalman filtering in two-dimensions", IEEE Trans., IT-23 : 473-482, (1977).
- [13] WOODS J.W., "Correction to 'Kalman filtering in two dimensions'". IEEE Trans., IT-25 : 628-629, (1979).
- [14] WOODS J.W., INGLE V.K. "Kalman filtering in two dimensions : further results". IEEE Trans., ASSP-29 : 188-197, (1981).
- [15] MURPHY M.S. "Comments on 'Recursive filtering algorithm for a two-dimensional system'". IEEE Trans., AC-25 : 336-337, (1980).
- [16] MORF M., KAILATH T. "Square root algorithms for least squares estimation". IEEE Trans., AC-20 : 487-497, (1975).
- [17] FAVIER G. "Algorithmes de factorisation et algorithmes rapides pour le filtrage et la commande". dans Algorithmes rapides pour le traitement des systèmes dynamiques linéaires, A.Benveniste et P.Dewilde ed., INRIA, Le Chesnay, (1981).
- [18] SAINT-FELIX D., DJAFARI A.M., DEMOMENT G. "Quelques problèmes liés à l'amélioration de la résolution d'un système de tomographie à micro-ondes par déconvolution". 9ème Colloque GRETSI (1983).
- [19] HERMENT A., DEMOMENT G., VAYSSE M. "Algorithm for on-line deconvolution of echographic signals". in Acoustical Imaging vol.10, P.Alais & A.F.Metherell ed., Plenum Press, (1982).