

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



221

NICE du 16 au 20 MAI 1983

## CARACTERISATION DE TRAJECTOIRES

### APPLICATION A L'ESTIMATION ET A LA PREDICTION DES ELEMENTS DE CINEMATIQUE D'UN MOBILE MANOEUVRANT

B. DELLERY<sup>(1)</sup>, A. LORENZI<sup>(2)</sup>C. BOZZO<sup>(3)</sup>, A. GUILBERT<sup>(4)</sup>, A. HOULES<sup>(5)</sup>, L. PASSERON<sup>(6)</sup>

## RESUME

L'estimation des éléments de cinématique d'un mobile, problème classique dans les conduites de tir embarquées est envisagé sous l'aspect de la caractérisation de trajectoires. L'article fait suite aux travaux de synthèse du CAPCA présentés lors du Congrès GRETSI 1981 sur la caractérisation et la modélisation de la trajectoire et des mouvements de mobiles manoeuvrants. On traite de l'introduction de conditions de fermeture spécifiques dans les équations classiques des modèles de cinématique.

Les conditions aux contraintes viennent se superposer aux conditions de fermeture intervenant naturellement dans le repère polaire retenu pour la modélisation et résultent de l'introduction d'hypothèses "fortes" sur la nature de la trajectoire suivie par le mobile.

Après avoir défini la notion de guidage proportionnel à deux dimensions, on propose une méthode basée sur l'hypothèse d'adoption de cette loi de navigation comme condition aux contraintes, à une classe de trajectoires caractéristiques. Les solutions ainsi élaborées sont analysées sous le double aspect de l'estimation des éléments de cinématique et de l'extrapolation de la position future du mobile poursuivi, et comparées aux solutions classiques existantes.

Dans un deuxième temps, nous proposons une généralisation de cette méthode au problème trois dimensions et nous présentons les résultats obtenus sur trajectoires réelles et simulées.

## SUMMARY

This paper deals with kinematics estimation, which is a classical problem in Target Motion Analysis, and which can be regarded as a paths description problem. It completes the former studies achieved by the CAPCA in this field and which had been presented in GRETSI 1981 symposium.

First, Special boundary "natural" (i.e geometrical) conditions are added to the classical equations of the kinematics models. Further constraint conditions are, then, superposed to the boundary conditions operating in the polar coordinates system used in model representation: they are derived from the "strong" hypotheses built according to the chosen aircraft flight path.

After defining the two dimensional proportional guidance law, we propose a method based upon the Fact that this principle corresponds to a specific paths class (as constraint conditions).

In the first time, the so-built results will be explained as corresponding to the kinematics estimation problem as well as to the prediction problem in T.M.A. These solutions will be compared with the classical ones which presently exist.

Eventually, in the second time, we propose to generalize this method to the three dimensional problem and the results obtained with actual as well as simulated aircraft paths data are presented.

(1) Ingénieur - Société STUDEC - Toulon

(2) Ingénieur - Compagnie de Signaux et d'Entreprises Electriques (Centre d'Etude des Techniques de l'Informatique et de l'Analyse des Systèmes - CETIA) - Toulon

(3) Directeur Scientifique - Compagnie de Signaux et d'Entreprises Electriques - Paris

(4) Ingénieur des Constructions Navales - Centre d'Analyse de Programmation et de calcul CAPCA/DCA - Toulon

(5) Ingénieur des Constructions Navales - Service Technique des Constructions et Armes Navales - Paris

(6) Ingénieur - SNIAS - Cannes



## CARACTERISATION DE TRAJECTOIRES

### APPLICATION A L'ESTIMATION ET A LA PREDICTION DES ELEMENTS DE CINEMATIQUE D'UN MOBILE MANOEUVRANT

#### 1. - INTRODUCTION . POSITION DU PROBLEME

L'estimation des éléments de cinématique d'un mobile, problème classique dans les conduites de tir embarquées, est envisagé sous l'aspect de la caractérisation de trajectoires. On fait ici la synthèse des travaux effectués au CAPCA depuis 1981 (Actes du colloque GRESTIT de juin 1981 [2]).

Le problème envisagé se présente de la façon suivante : à partir de mesures effectuées en temps discret, et entachées d'un bruit, généralement non stationnaire, d'un certain nombre d'états caractérisant de façon plus ou moins complète les manoeuvres du mobile poursuivi (coordonnées angulaires, distance, vitesses gyrométriques, écarts de poursuite), déterminer en temps réel, les 'paramètres' associés à la représentation de la trajectoire du mobile et des lois de mouvement sur cette trajectoire. On cherche donc à obtenir les estimées de différentes variables associées aux éléments de cinématique du mobile, considéré comme ponctuel, (vitesse, accélération, nature de la trajectoire suivie, etc...) dans le but d'obtenir une extrapolation précise de sa position future. Le problème de la caractérisation de trajectoire sera donc envisagé sous le double aspect des problèmes de l'estimation de cinématique et de l'extrapolation d'état associé à la prédiction de la position future du mobile considéré. En général, ces deux problèmes sont envisagés globalement en adoptant une modélisation unique de la cinématique du mobile poursuivi, tant il est vrai qu'il existe de nombreux points communs entre les deux problèmes.

Cependant, compte tenu de la faible période d'échantillonnage ( $< 0,1$  sec) des mesures de la position du mobile, le problème de la prédiction à un pas, associé au problème de filtrage est néanmoins différent de celui de la prédiction à  $N$  pas ( $10 < N < 100$ ) effectué dans le cas de l'extrapolation d'état. Etant donné les capacités d'évolution du mobile poursuivi, il est évident qu'une hypothèse comme, par exemple, celle du mouvement rectiligne uniforme admissible entre deux instants d'échantillonnage, ne l'est plus forcément sur un intervalle de temps plus important.

Dans ce qui suit, nous mettrons en évidence l'intérêt que présente l'introduction d'hypothèses fortes sur la nature de la trajectoire suivie par le mobile, hypothèses se traduisant par des contraintes supplémentaires sur le modèle de cinématique, et qui conduisent à une amélioration sensible des résultats obtenus en matière de prédiction. En s'intéressant en premier lieu au problème de l'extrapolation d'état, les résultats obtenus pour ces modèles spécifiques seront analysés à travers une approche macroscopique du problème de la prédiction. Les résultats seront alors généralisés au cas du problème de l'estimation pour l'ensemble 'filtrage-prédiction à un pas' et comparés à ceux obtenus en utilisant des modèles classiques de cinématique. Afin de mieux cerner le problème de la caractérisation de trajectoires, il est souhaitable dans un premier temps, d'effectuer l'analyse, sous une forme synthétique, des problèmes de caractérisation et de modélisation du processus de poursuite en regard des problèmes de filtrage et d'estimation en mettant en évidence à chaque étape les problèmes spécifiques au cas de l'extrapolation d'état.

#### 2. - PROBLEMES DE CARACTERISATION ET MODELISATION

Cette question prise dans son ensemble est très vaste et très complexe. On peut citer :

- l'aspect continu-discret du processus,
- l'aspect non linéaire des équations de dynamique et de mesure,

- le choix de l'espace paramétrique envisagé pour la représentation de la dynamique du mobile poursuivi
- les caractéristiques propres des bruits entachant les variables de mesures auxquelles est associée la notion de R - observabilité du modèle,
- le choix des paramètres statistiques associées aux variables (bruits de dynamique) permettant de caractériser les manoeuvres du mobile poursuivi, manoeuvres qui ne sont pas connues a priori de l'observateur et qui doivent donc être modélisées dans le cadre d'une approche probabiliste. Nous appellerons 'variables de pilotage', les variables aléatoires qui interviennent de la sorte dans la Q-commandabilité du modèle.

##### 2.1 - Choix du système de coordonnées

Quel que soit le système de coordonnées retenu et le vecteur d'état adopté, les équations de dynamique et de mesure sont toujours non linéaires. Dans certains cas particuliers, il est possible de rendre linéaire l'une ou l'autre de ces équations en effectuant des hypothèses simplificatrices sur les mouvements de la cible. Il est évident que ces hypothèses grossières ne conduisent qu'à une solution approchée du problème de la modélisation. En faisant l'hypothèse que les bruits sont additifs, les équations définissant le processus ont la forme générale suivante :

$$\begin{cases} dX_t = F(X_t, t) + G(X_t, t) d\beta_t \\ Z_k = H(X_k, k) + V_k \end{cases}$$

Le processus de linéarisation des équations d'état peut être complexe. Il conduit en particulier lors du choix d'un vecteur d'état en coordonnées polaires ou cartésiennes, à des équations liant les différentes variables et leurs dérivées que nous appellerons 'équations aux contraintes'. Ces équations aux contraintes imposent entre les variables des conditions de fermetures qu'il faudra prendre en compte lors de la formulation du modèle de dynamique.

##### 2.2 - Choix de la composition du vecteur d'état

La composition du vecteur d'état résulte des divers choix suivants :

- choix des variables primaires (variables ou fonction de variables devant être estimées),
- choix des variables secondaires (expression des équations aux contraintes, des conditions de fermeture, des variables de pilotage),
- choix des états complémentaires permettant d'adapter le filtre (innovations, gains, etc...).

##### 2.3 - Equations ou contraintes et conditions de fermeture

###### 2.3.1 - Solutions générales

Le modèle de dynamique, obtenu par l'association des relations entre les variables primaires, leurs dérivées et les autres composantes du vecteurs d'état, ne peut être élaboré sans tenir compte des conditions de fermeture qui font intervenir les vitesses et accélérations issues des équations fondamentales de la cinématique du point. Il faut aussi remarquer que l'exploitation des multiples formes des conditions de fermetures au second ordre doit être analysée en regard du choix conséquent des variables de pilotage associées aux bruits de dynamique du modèle d'état. Dans le repère polaire, où sont toujours effectuées les mesures (angles d'azimut et de site, distance, vitesses gyrométriques, etc...), les conditions de fermeture interviennent naturellement entre les variables. La modélisation polaire s'avère donc être dans ce cas la plus cohérente vis-à-vis de la réalité du problème envisagé. BOZZO propose dans [2] un modèle polaire respectant les conditions de fermetures et pouvant intégrer ou non, les vitesses gyrométriques et les écartométries.

CARACTERISATION DE TRAJECTOIRES

APPLICATION A L'ESTIMATION ET A LA PREDICTION  
DES ELEMENTS DE CINEMATIQUE D'UN MOBILE MANOEUVRANT

2.3.2 - Solutions approchées

La caractérisation des évolutions d'un mobile manoeuvrant permet de mettre en évidence des conditions de fermetures supplémentaires qui ont pour but de simplifier les équations d'état du modèle ou d'ajouter à celui-ci un caractère spécifique. Cette caractérisation peut être effectuée sur la loi de mouvement ou sur la trajectoire du mobile poursuivi et apparaît sous la forme d'équations aux contraintes supplémentaires qui viennent se superposer aux conditions de fermeture déjà existantes dans le repère retenu pour la modélisation. On peut donc adopter une des approches suivantes en émettant des hypothèses :

- sur les lois de mouvements

Les hypothèses les plus courantes sont celles du mouvement à accélération normale (les accélérations ne pouvant s'effectuer que dans le plan normal au vecteur vitesse) ou du mouvement rectiligne uniforme.

- sur la trajectoire suivie par le mobile

On peut faire l'hypothèse que la trajectoire du mobile appartient à une classe de trajectoires spécifiques qui ne diffèrent les unes des autres que par le choix ou la détermination d'un ou de plusieurs paramètres caractéristiques. Il est possible de constituer un certain nombre de classes de trajectoires "types" en supposant que le mobile évolue suivant une loi caractéristique de navigation, comme le guidage proportionnel ou le relèvement constant, qui conduisent à des relations caractéristiques entre certaines composantes du vecteur d'état.

2.4 - Variables de pilotage

En général, le choix effectué consiste à prendre les accélérations intervenant dans le repère retenu pour la modélisation des mouvements de la cible ou le repère de SERRET-FRENET, lié à la trajectoire. Quelque soit le repère choisi pour exprimer les accélérations, et compte tenu des capacités d'évolutions variables des cibles rencontrées, l'hypothèse de constance ou de variations lentes des variables de pilotage ne sera que très rarement vérifiée pour un mobile manoeuvrant. Dans le cadre du problème de l'estimation, il apparaît dès lors, un compromis relativement difficile à effectuer entre d'une part, l'obtention d'une estimation la moins perturbée possible de la position et de ses dérivées et d'autre part la poursuite sans trainage des évolutions de la cible. Il existe une grande similitude entre ce problème et celui de l'extrapolation d'état associé à la prédiction de la position future de la cible, où il sera toujours nécessaire d'émettre une hypothèse de constance sur les dernières estimations d'une ou plusieurs variables appartenant au vecteur d'état. Dans les deux cas, une solution peut être apportée par :

- l'identification d'un terme de commande qui pourra être associé à la variable de pilotage (cf. §4),
- la substitution aux variables de pilotage classiques de paramètres constants ou plus lentement variables et caractérisant leur variation (cf. §3.1 guidage proportionnel)

Ainsi, on est amené à choisir les variables intervenant 'naturellement' dans la description des mouvements de la cible comme l'accélération tangentielle et l'accélération normale. Il semble réaliste d'effectuer une hypothèse de constance sur l'accélération tangentielle, mais il est nécessaire de caractériser les variations de l'accélération normale. Cette caractérisation résulte de l'introduction de conditions aux contraintes supplémentaires sur les lois de mouvements ou sur la trajectoire du mobile.

3 - CARACTERISATION DE LA TRAJECTOIRE D'UN MOBILE MANOEUVRANT

Les méthodes de caractérisation de trajectoires dépendent en premier lieu de la nature du mobile poursuivi (mobile piloté ou guidé). On considère, dans ce qui suit, que le mobile évolue suivant une loi de guidage proportionnelle, loi qui est très souvent utilisée dans le cadre des problèmes d'interception.

Dans le cadre de l'application considérée, ce type de loi doit être exploitée pour caractériser les évolutions du mobile poursuivant, vu du mobile poursuivi (observateur) qui devra être considéré comme fixe ou très peu manoeuvrant.

Dans ce contexte (guidage vers un point, vu de ce point), l'hypothèse du relèvement constant (exploitable sur les trois coordonnées) ne semble pas vraisemblable, excepté dans le cas du relèvement constant et nul (courbe du chien), à courte distance. Par contre, l'utilisation d'une loi de guidage proportionnelle pour caractériser la trajectoire d'un mobile dans un plan, semble très réaliste.

3.1 - Présentation de la loi de guidage proportionnel

On désire caractériser la trajectoire d'un mobile M en sachant qu'il évoluera suivant une loi de guidage proportionnel pour rallier le but, considéré comme un point fixe d'où sont faites les observations.

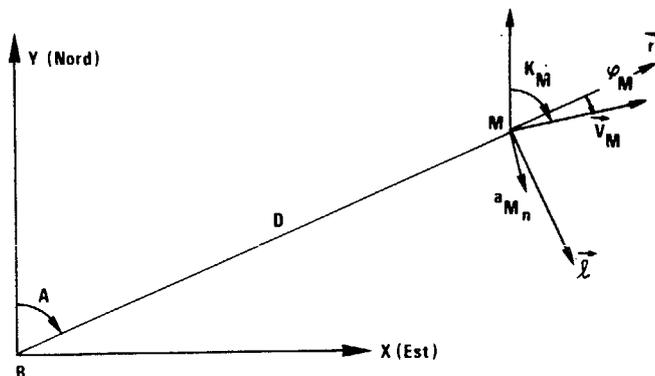


Figure 1

D'après [5], l'accélération normale est alors caractérisée par :

$$(1) \quad a_{Mn} = N V_M \dot{A}$$

où  $N = \mu + 1$  est la constante de navigation.

En exploitant les relations classiques de la cinématique du point, l'accélération normale, s'écrit :

$$(2) \quad a_{Mn} = K_M V_M = (\dot{\varphi}_M + \dot{A}) V_M = V_M \rho^2$$

il vient

$$(3) \quad a_{Mn} = (\mu + 1) V_M \dot{A} = V_M \rho^2 \text{ et donc}$$

$$(4) \quad \rho = (\mu + 1) \frac{\dot{A}}{V_M}$$

ce qui en fonction de la loi de mouvement du mobile caractérisée par  $\mu$  et  $V_M$  définit la courbure de la trajectoire à chaque instant. La vitesse angulaire de l'angle de guidage  $M$  est alors définie par :

$$(5) \quad \dot{\varphi}_M = \mu \dot{A}$$

Dans les problèmes pratiques [6], les valeurs de  $\mu$  retenues pour le guidage (phase d'interception) sont comprises entre 3 et 6.

3.2 - Etude des trajectoires de guidage proportionnel

Disposant de la relation (2) et des relations classiques de la cinématique du point, on peut écrire :

$$(6) \quad \text{tang } \varphi_M = \frac{DA}{D} = \frac{V_M \sin \varphi_M}{V_M \cos \varphi_M}$$



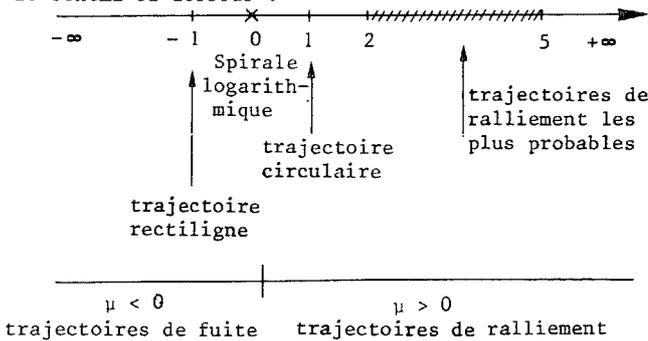
CARACTERISATION DE TRAJECTOIRE

APPLICATION A L'ESTIMATION ET A LA PREDICTION  
DES ELEMENTS DE CINEMATIQUE D'UN MOBILE MANOEUVRANT

$$\mu \frac{\dot{D}}{D} = \frac{\dot{\varphi}_M}{\text{Tang } \varphi_M} \text{ et par intégration (7) } \left( \frac{D}{D_0} \right)^\mu = \frac{\sin \varphi_M}{\sin \varphi_{M_0}}$$

Disposant d'une plage de variation infinie pour  $\mu$ , on peut constituer une classe de trajectoire dont un sous-ensemble sera caractéristique des trajectoires d'interception. On présente sur la figure 2 une représentation de ces trajectoires. Deux valeurs de  $\mu$  présentent un intérêt particulier et caractérisent les trajectoires rectiligne ( $\mu = -1$ ) et circulaire ( $\mu = 1$ ).

Les divers résultats obtenus peuvent être résumés sur le schéma ci-dessous :



3.3 - Etude d'un modèle spécifique : Formulation et résultats

L'introduction de la relation (3), dans les équations de cinématique décrivant le mouvement du mobile poursuivi permet d'envisager la formulation d'un modèle spécifique. Pour les diverses raisons présentées dans le paragraphe 2, il est préférable de choisir le repère polaire pour écrire les équations du mouvement, soit :

$$(8) \begin{cases} \ddot{A} = \frac{\Gamma_T}{V} \dot{A} + \left( \frac{\Gamma_N}{V} - 2 \dot{A} \right) \frac{\dot{D}}{D} \\ \ddot{D} = \frac{\Gamma_T}{V} \dot{D} - \left( \frac{\Gamma_N}{V} - \dot{A} \right) D \dot{A} \end{cases}$$

par substitution de (3) dans (8) et en posant :

$$\begin{aligned} x_1 &= A, & x_3 &= D, & x_5 &= V \\ x_2 &= \dot{A}, & x_4 &= \dot{D}, & x_6 &= \Gamma_T, & x_7 &= \mu \end{aligned}$$

l'équation de dynamique du modèle d'état est alors :

$$(9) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{x_6}{x_5} x_2 + \frac{(x_7 - 1) x_4}{x_3} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{x_6}{x_5} x_4 + x_7 x_3 x_2^2 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -\alpha_1 x_6 + W_1 \\ \dot{x}_7 = -\alpha_2 x_7 + W_2 \end{cases}$$

La mise en oeuvre d'un filtre de KALMAN (EKF) élaboré sur ce modèle d'état conduit à des résultats satisfaisants. On présente sur la figure 3, une comparaison des résultats obtenus, en simulation, sur l'estimation de l'accélération normale d'un mobile soumis au guidage proportionnel, avec deux modèles polaires dont un est spécifique du cas traité. Toutefois, et étant donné la spécificité de la loi de mouvement adoptée, cet estimateur ne conduit à des résultats satisfaisants que dans le cadre du problème de l'estimation des éléments de cinématique d'un mobile évoluant suivant une loi de guidage proportionnel, les conditions de stabilité associées au filtre n'étant pas toujours satisfaisantes sur une trajectoire quelconque

(c'est le cas, en particulier, de l'approche radiale ou du changement de concavité de la trajectoire qui conduisent à une discontinuité infinie sur  $\mu$ ). Pour s'affranchir de cette difficulté, on envisage, dans ce qui suit, une méthode qui consiste à supposer connu le coefficient de guidage qui peut être alors considéré comme une commande. Dans le paragraphe suivant, nous mettrons en évidence, les avantages d'une telle approche en proposant une extension du domaine de validité de la loi de guidage proportionnel.

4 - EXTENSION DU DOMAINE D'ADEQUATION DE LA LOI DE GUIDAGE PROPORTIONNEL.

En utilisant les équations (9) le modèle d'état peut être formulé de la manière suivante :

$$(10) \begin{cases} \dot{x}(t) = F(x,t) + G(x,t). V(t) + G'(x,t) \delta t \\ z_k = H x_k + V_k \end{cases}$$

où  $V(t)$  représente la commande.

Après linéarisation de l'équation de dynamique, les résultats obtenus par la mise en oeuvre d'un filtre EKF sur ce modèle spécifique sont comparés à ceux obtenus par des méthodes classiques utilisant des modèles polaire et cartésien. Cette étude comparative est envisagée sous le double aspect de l'estimation et de l'extrapolation d'état et effectués sur ensemble composé d'une trajectoire de navigation proportionnelle caractérisé par  $\mu = 4$  (trajectoire 1) et d'une trajectoire quelconque susceptible d'admettre la même caractérisation (trajectoire 2). Dans les deux cas, on effectue simultanément une étude de sensibilité aux paramètres en considérant que la commande nécessaire au modèle spécifique peut être biaisée. Nous envisagerons donc de caractériser les trajectoires 1 et 2 par les constantes de navigation  $\mu = 3$  et  $\mu = 5$ .

Caractéristiques des trajectoires traitées :

- trajectoire 1 : navigation proportionnelle  $\mu = 4$
- trajectoire 2 : virage circulaire puis approche radiale
- $V = 250\text{m/sec}$ , accélération normale maximum  $\Gamma_N \text{ max} = 6 \text{ g}$
- caractéristiques des bruits de mesure :  $\sigma_D = 5 \text{ m}$
- $\sigma_A = 1 \text{ mrd}$

4.1 - Application au problème de l'estimation d'état

Les divers résultats présentés concernent l'estimation de l'accélération normale (cette variable étant la plus difficile à estimer dans le cas du mouvement plan). Les résultats sont analysés en déterminant la moyenne et l'écart-type de l'erreur d'estimation  $\epsilon = \left| \Gamma_N - \hat{\Gamma}_N \right|$

Estimation		Modèles spécifiques			Modèle polaire	Modèle cartésien
		$\mu = 3$	$\mu = 4$	$\mu = 5$		
trajectoire 1	$M_\epsilon$	0.39	0.16	0.46	3.11	4.90
	$\sigma_\epsilon$	0.46	0.26	0.56	4.04	6.07
trajectoire 2	$M_\epsilon$	2.18	2.26	2.34	3.27	5.16
	$\sigma_\epsilon$	6.01	6.10	6.07	7.23	8.39

4.2 - Application au problème de l'extrapolation d'état

Le modèle spécifique exploitant des conditions de fermeture en vitesse, l'extrapolation de la position future du but pour les modèles polaire et cartésien sera effectuée en considérant que sur l'intervalle de temps de prédiction, les composantes de la vitesse dans les deux repères sont constantes et égales à leurs dernières estimations.

On présente les résultats obtenus pour des extrapolations d'état sur 3 et 5 secondes. On analyse ces résultats en déterminant des probabilités telles que l'erreur de prédiction en position soit inférieure à 10 et 50 m.

CARACTERISATION DE TRAJECTOIRE

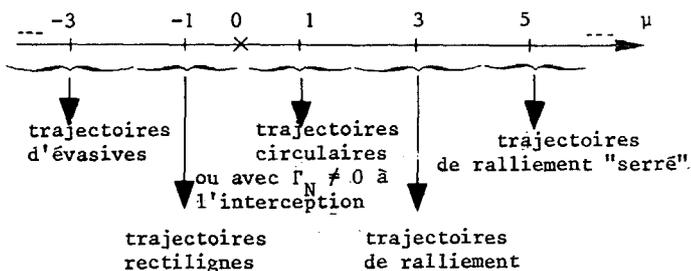
APPLICATION A L'ESTIMATION ET A LA PREDICTION  
DES ELEMENTS DE CINEMATIQUE D'UN MOBILE MANOEUVRANT

Extrapolation à 3 sec		Modèles spécifiques			Modèle polaire	Modèle cartésien
		$\mu = 3$	$\mu = 4$	$\mu = 5$		
trajectoire 1	P(10)	0.25	0.87	0.32	0.16	0.17
	P(50)	0.71	1	0.72	0.42	0.45
trajectoire 2	P(10)	0.42	0.42	0.41	0.37	0.21
	P(50)	0.77	0.75	0.69	0.51	0.40

Extrapolation à 5 sec		Modèles spécifiques			Modèle polaire	Modèle cartésien
		$\mu = 3$	$\mu = 4$	$\mu = 5$		
trajectoire 1	P(10)	0.13	0.67	0.14	0	0.03
	P(50)	0.47	1	0.57	0.18	0.20
trajectoire 2	P(10)	0.23	0.22	0.22	0.15	0.10
	P(50)	0.55	0.58	0.55	0.37	0.29

4.3 - Constitution de classes de trajectoires "types"

Compte-tenu des résultats obtenus et étant donné la faible sensibilité du modèle spécifique au paramètre  $\mu$ . On envisage la constitution d'un ensemble composé de classes de trajectoires types, chaque trajectoire étant caractérisée par un coefficient de guidage proportionnel. On envisagera, par la suite, les diverses classes suivantes :



On propose dans le paragraphe 5, une méthode de test d'hypothèses qui permettra de déterminer en temps réel la valeur du coefficient de guidage la plus appropriée à la caractérisation instantanée des paramètres de la trajectoire d'un mobile. Cette méthode de test permet d'envisager un module adaptatif d'estimation et d'extrapolation d'état.

5 - APPLICATION D'UNE METHODE DE TEST D'HYPOTHESES A LA CARACTERISATION DE TRAJECTOIRES.

5.1 - Position du problème

Dans l'étude que nous présentons, les hypothèses adoptées caractérisent des évolutions supposées équiprobables. En effet, le modèle de dynamique choisi (dans le cas de l'estimation comme dans celui de la prédiction d'état) donne naissance à un ensemble de "signatures de trajectoires" possédant les mêmes caractéristiques fondamentales (elles sont décrites par le même type de loi de Navigation proportionnelle). D'autre part, la structure même du test d'hypothèses utilisé (§5/3) impose la contrainte suivante au niveau du choix des hypothèses : Celles-ci étant ordonnées suivant le caractère plus ou moins prononcé des évolutions, on ne peut passer d'une hypothèses à une autre qu'en respectant cet ordre.

Après avoir rappelé le caractère global du test de Bayes, nous intéressons à l'aspect séquentiel introduit dans le test de Wald pour aboutir à une solution extrapolée de celle proposée par Schweppe [3] qui conduit à un algorithme de détection séquentielle étendu à un nombre quelconque d'hypothèses.

5.2 - Test de Bayes

On considère un système physique, observable par un processus stochastique  $z(t)$ . Sachant que deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  sont faites sur le système, il s'agit de

déterminer de façon optimale l'hypothèse dans laquelle on se trouve, disposant de  $n$  observations depuis l'instant initial.

$$Z(n) = [z(0), z(1), z(k), z(n-1), z(n)]$$

est l'ensemble formé de ces observations.

$S_N$  est l'ensemble de toutes ses réalisations.  $S_0$  et  $S_1$  sont définis de la façon suivante :

$Z(n)$  appartient à  $S_0$  dans l'hypothèse  $H_0$

$Z(n)$  appartient à  $S_1$  dans l'hypothèse  $H_1$ ,

le choix de ces deux sous-espaces déterminant le caractère plus ou moins optimal attaché à la résolution du problème.

Soit  $C_{i,j}$  le coût associé à l'acceptation de l'hypothèse  $H_i$ , sachant que  $H_j$  est vraie.

Le risque Bayésien est alors défini par :

$$(11) R = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 C_{i,j} p(H_j) \int_{S_i} p_Z [Z(n)/H_j] dZ(n)$$

qu'il s'agit de minimiser afin d'obtenir  $S_0$  et  $S_1$ .

$$C_\alpha = C_{10} - C_{00}, \text{ et } C_\beta = C_{01} - C_{11}; L = \frac{C_{\alpha p}}{C_{\beta p}} \frac{(H_0)}{(H_1)}$$

$$Z(n) \in S_1 \iff \frac{P[Z(n)/H_1]}{P[Z(n)/H_0]} < L; Z(n) \in S_0 \iff \frac{P[Z(n)/H_1]}{P[Z(n)/H_0]} > L$$

$$(12) T[Z(n)] = \frac{P[Z(n)/H_1]}{P[Z(n)/H_0]} \text{ est appelé rapport de vraisemblance}$$

$L$  est le seuil. Alors, si  $T[Z(n)]$  est supérieur au seuil, on choisit l'hypothèse  $H_1$ , sinon l'hypothèse  $H_0$ , avec les probabilités d'erreur :

$\alpha$  : probabilité de rejeter  $H_0$  quand  $H_0$  est vraie

$\beta$  : probabilité d'accepter  $H_0$  quand  $H_1$  est vraie

$\alpha$  et  $\beta$  sont dites respectivement de 1ère et 2ème espèce.

$$(13) \alpha = \int_{S_1} p[Z(n)/H_0] dZ(n); \beta = \int_{S_0} p[Z(n)/H_1] dZ(n)$$

5.3 - Détection séquentielle, test de WALD

A chaque hypothèse, correspond un modèle du processus envisagé. A l'arrivée d'une observation nouvelle, on divise l'espace  $S_N$  en 3 :

$S_N^0$ ,  $S_N^1$  et  $S_N^{0,1}$  grâce à 2 bornes  $A$  et  $B$  précisées ultérieurement, A la  $p^{\text{ème}}$  étape :

Si  $T[Z(p)] > A$ ,  $Z(p)$  appartient à  $S_p^1$ ,

on choisit l'hypothèse  $H_1$

Si  $T[Z(p)] < B$ ,  $Z(p)$  appartient à  $S_p^0$ ,

on choisit l'hypothèse  $H_0$

Si  $B < T[Z(p)] < A$ ,  $Z(p)$  appartient à  $S_p^{0,1}$ ,

on attend la mesure  $Z(p+1)$

En considérant les 2 premières hypothèses, on trouve facilement :

$$(14) \frac{1 - \beta}{\alpha} \geq A \text{ et } \frac{\beta}{1 - \alpha} \leq B$$

Cependant, la période d'échantillonnage utilisée étant faible, on néglige les dépassements de  $A$  et  $B$  par  $T[Z(p)]$ , d'où :

$$(15) A = \frac{1 - \beta}{\alpha} \text{ et } B = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

On prendra  $\alpha = \beta$  par la suite (cf. § 5.1).



CARACTERISATION DE TRAJECTOIRE

APPLICATION A L'ESTIMATION ET A LA PREDICTION  
DES ELEMENTS DE CINEMATIQUE D'UN MOBILE MANOEUVRANT

5.4. Algorithme de détection séquentielle, d'après SCHWEPPE

Si  $T[Z(p)] = \frac{P[Z(p)/H1]}{P[Z(p)/H0]}$ , on obtient la récurrence suivante :

$$(16) T[Z(p)] = \frac{P[z(p)/Z(p-1), H1]}{P[z(p)/Z(p-1), H0]} T[Z(p-1)]$$

On considère par la suite la variable :

$$(17) T_{0,1}(p) = \text{Log} \{T[Z(p)]\}$$

On tient compte alors du fait que l'on considère ici un processus stochastique Z(t) Gaussien Markovien caractérisé par des modèles qui, après discrétisation, seront représentatifs des Hypothèses H0 et H1 que l'on peut adopter à chaque itération et qui conduisent à des filtres fonctionnant en parallèle. En effet, on peut écrire :

$$p z(p)/Z(p-1), H\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\ell} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{[z(p) - \hat{z}_\ell p/p-1]^2}{\sigma_\ell^2} \right\}$$

avec  $\ell = 0,1$ , tandis que les équations du filtre de KALMAN-BUCY nous donnent :

$\sigma_\ell$  : covariance de l'erreur de prédiction sur la mesure en régime stationnaire, dans l'hypothèse  $\ell$

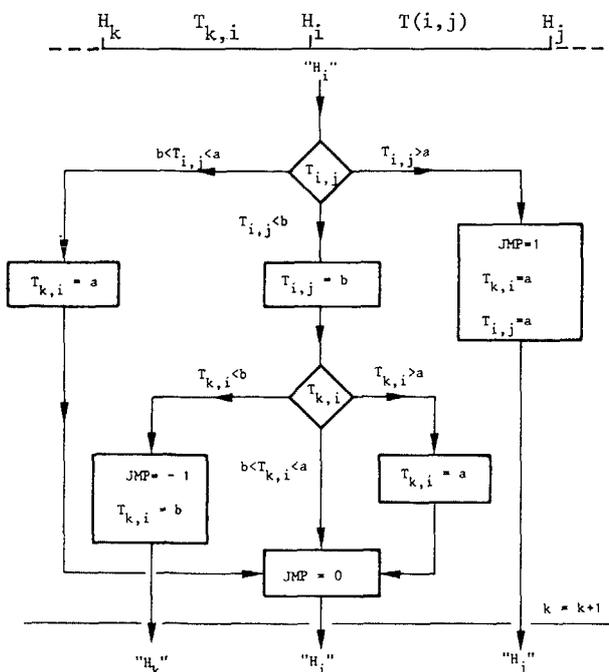
$\hat{z}_\ell p/p-1$  : valeur prédite de la mesure à l'instant p sachant celle à l'instant p-1, dans l'hypothèse  $\ell$

d'où :

$$(19) T_{0,1}(p) = T_{0,1}(p-1) + \text{Log} \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi_{1p}^2}{\sigma_1^2} - \frac{\xi_{0p}^2}{\sigma_0^2} \right]$$

5.5 - Extension du test à n hypothèses

Dans le cas où l'on a à traiter n hypothèses, on détermine alors de manière identique n-1 variables de décision et conformément au postulat des hypothèses équiprobables, on conserve alors les mêmes bornes A et B pour chacune des variables. De cette façon, on peut passer d'une hypothèse à l'autre, suivant le schéma de la figure 4, où A et B sont remplacés par leur logarithme, (les modèles associés conduisent à une banque de filtres fonctionnant en parallèle). Supposons qu'à l'instant tk, on soit dans l'hypothèse i, distribuée dans cet ordre :



L'intérêt de cet algorithme dans l'application présente est qu'il permet d'identifier le coefficient  $\mu$  en temps réel, c'est-à-dire le modèle "réel" parmi N modèles décrits par une loi de navigation proportionnelle.

Notons que la mise en oeuvre de cet algorithme peut être simplifiée dans le cas de l'extrapolation d'état comme nous le montrerons dans le paragraphe 6.

En s'intéressant plus particulièrement au problème de l'extrapolation d'état, on présente sur les figures 5 et 7 les résultats obtenus par la mise en oeuvre d'un algorithme de test à cinq hypothèses de guidage proportionnel caractérisées par les coefficients de navigation présentés dans le paragraphe 4.3. On compare ces résultats à ceux obtenus par une méthode classique d'extrapolation au premier ordre en utilisant un modèle cartésien (figure 6). On présente ci-après, les résultats obtenus dans les deux cas et ceux concernant les diverses hypothèses testées, en précisant que la durée d'extrapolation décroît quand la distance diminue.

Extrapolation d'état	Résultats de l'extrapolation suivant les hypothèses					Modèle adaptatif	Modèle cartésien
	"H <sub>1</sub> "	"H <sub>2</sub> "	"H <sub>3</sub> "	"H <sub>4</sub> "	"H <sub>5</sub> "		
P(e)/ec 10 m	0,25	0,29	0,33	0,41	0,47	0,46	0,29
P(e)/ec 50 m	0,36	0,41	0,48	0,52	0,57	0,51	0,41

6 - FORMULATION D'UN ALGORITHME ADAPTATIF D'EXTRAPOLATION D'ETAT ET APPLICATION A LA CARACTERISATION DES TRAJECTOIRES GAUCHES

6.1 - Extension de la loi de guidage proportionnel au cas tridimensionnel

La loi de navigation proportionnelle est caractéristique d'un problème plan ; il est donc évident que la méthode proposée dans le cas tridimensionnel et qui consiste à projeter la trajectoire dans deux plans orthogonaux (figure 8) ne constitue pas une solution exacte. Cependant, les plans de projection choisis étant le plan Nord-Est et le plan Altitude-distance dans le plan N-E, la méthode permet de traiter sans approximation, les cas fréquemment rencontrés où la trajectoire du mobile poursuivi se situe dans un des plans de projection considérés. Néanmoins, nous allons montrer que l'approximation consistant à envisager deux navigations proportionnelles simultanées (20) dans les plans de projections conduit à des résultats satisfaisants pour des trajectoires gauches.

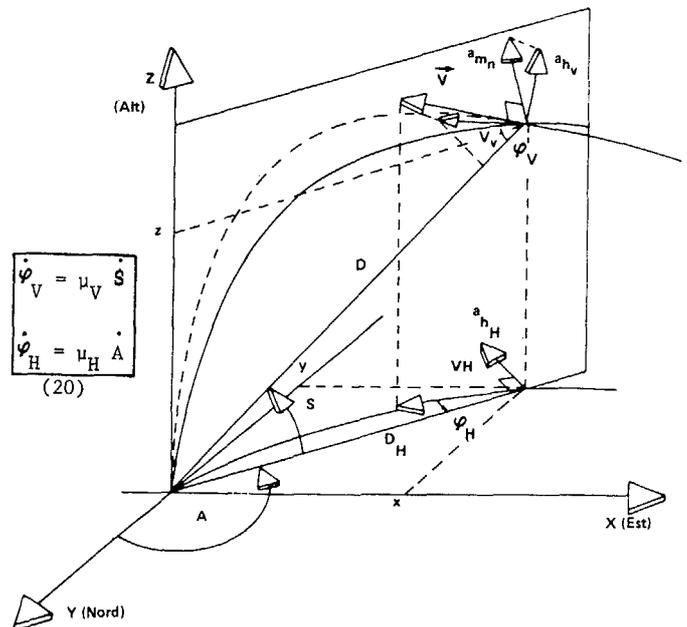


Figure 8

CARACTERISATION DE TRAJECTOIRES  
 ---  
 APPLICATION A L'ESTIMATION ET A LA PREDICTION  
 DES ELEMENTS DE CINEMATIQUE D'UN MOBILE MANOEUVRANT

6.2 - Mise en oeuvre d'un algorithme adaptatif d'extrapolation et application au traitement des trajectoires gauches.

En supposant résolu le problème de l'estimation des éléments de cinématique du mobile poursuivi, les (n-1) variables de décision nécessaires à la mise en oeuvre d'un test à n hypothèses de guidage proportionnel dans les deux plans de projection choisis pour représenter la trajectoire en trois dimensions, peuvent être obtenues de la manière suivante. A partir d'un état estimé et vieilli de N pas, on effectue une prédiction à N pas pour chacun des modèles associés aux n hypothèses. Les variables de décision sont alors déterminées à partir des écarts entre les diverses positions prédites pour l'instant t et la mesure au même instant. Nous présenterons dans ce qui suit les résultats obtenus par la mise en oeuvre d'un algorithme de test à 5 hypothèses de guidage proportionnel dans les deux plans de projection. On dispose donc de 25 couples de coefficients  $\mu_H$ ,  $\mu_V$  pour caractériser la trajectoire, ce qui confère au module de prédiction formulé, un caractère adaptatif. Les résultats présentés concernent le traitement d'une trajectoire d'avion (trajectoire gauche) et sont comparés à ceux obtenus pour un modèle cartésien en effectuant une extrapolation d'état au premier ordre. On visualise sur les figures 9 et 10, les trajectoires prédites dans le plan Nord-Est, à chaque instant, par les deux extrapolateurs. On présente sur la figure 11 les résultats du test d'hypothèse dans les deux plans de projection.

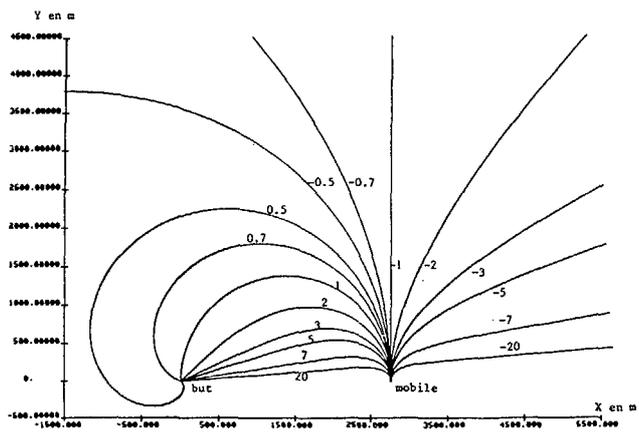


Figure 2 : Classes de trajectoires de navigation proportionnelle.

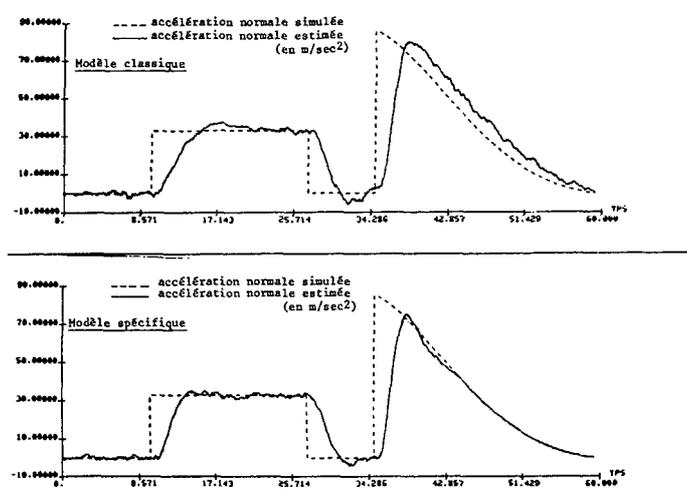


Figure 3 : Comparaison des accélérations normales estimées par un modèle classique et un modèle spécifique.

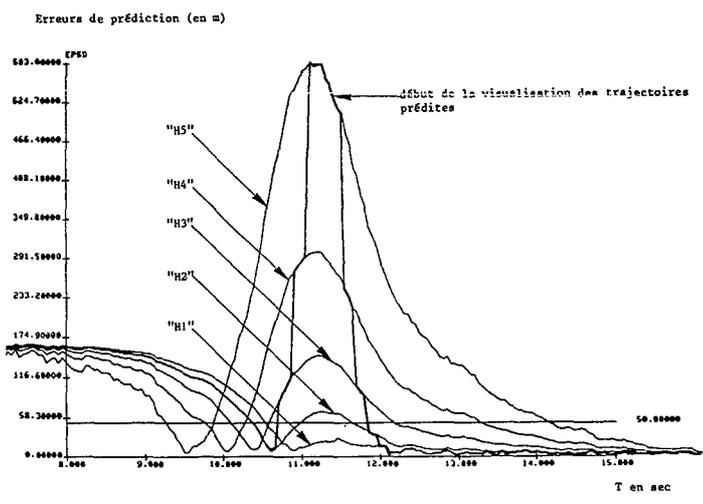


Figure 5 : Test à cinq hypothèses de guidage proportionnel

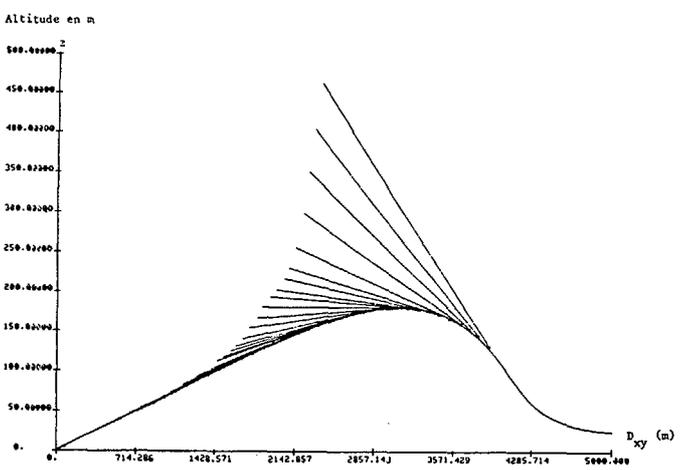


Figure 6 : Trajectoires prédites à chaque instant par extrapolation au 1er ordre suivant un modèle cartésien.



CARACTERISATION DE TRAJECTOIRE  
 -----  
 APPLICATION A L'ESTIMATION ET A LA PREDICTION  
 DES ELEMENTS DE CINEMATIQUE D'UN MOBILE MANOEUVRANT

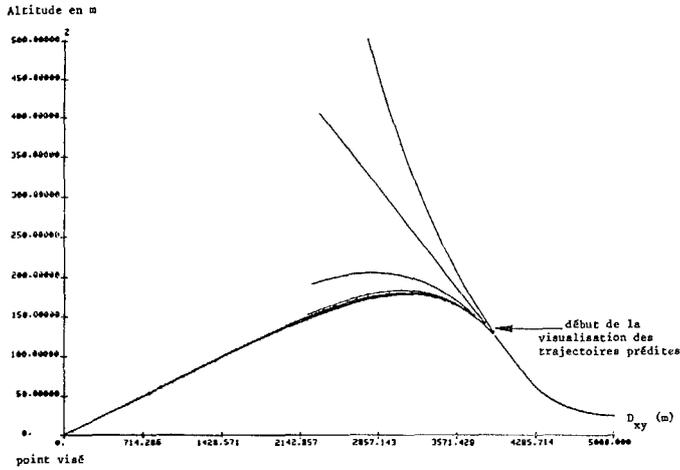


Figure 7 : Trajectoires prédites à chaque instant en exploitant les résultats du test à cinq hypothèses.

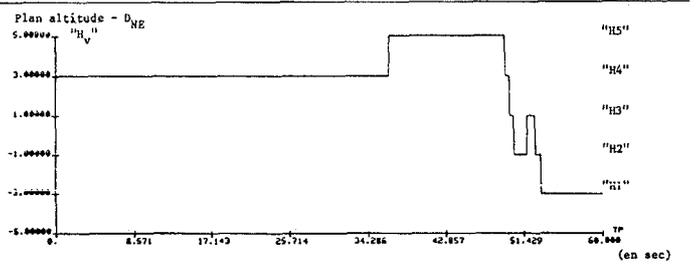
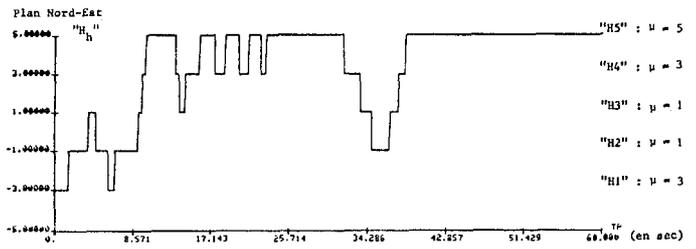


Figure 11 : Résultats du test à cinq hypothèses de guidage proportionnel sur une trajectoire gauche.

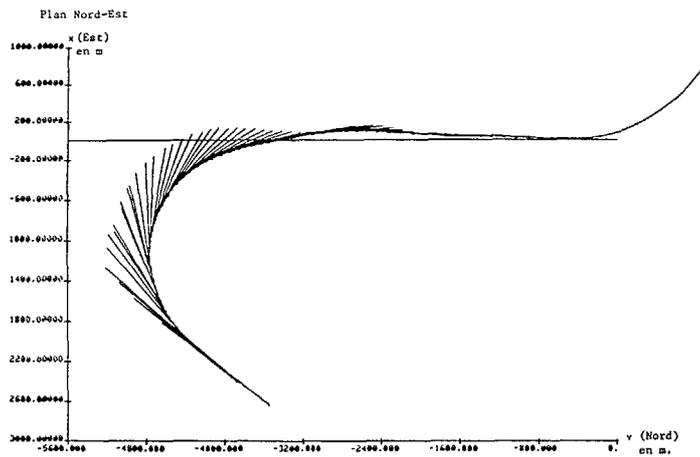


Figure 9 : Trajectoire gauche (trajectoires prédites à chaque instant dans le plan N-E par extrapolation au 1er ordre suivant un modèle cartésien).

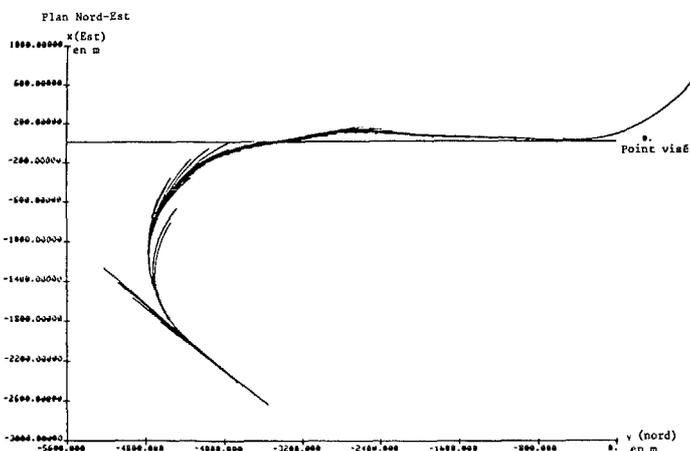


Figure 10 : Idem figure 7 pour l'algorithme adaptatif d'extrapolation d'état.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Filtrage et estimation :

- [1] - C.A. BOZZO  
"Le filtrage optimal et ses applications aux problèmes de poursuite".  
"TECHNIQUE ET DOCUMENTATION", Paris 1982
- [2] - C. BOZZO, C. BLONDEL, E. SIFREDI  
"Caractérisation et modélisation de la trajectoire et des mouvements de mobiles manoeuvrants",  
Huitième colloque GRETSI, NICE, Juin 1981

Détection et test d'hypothèse :

- [3] - F.C. SCHWEPPE  
Evaluation of likelihood functions for gaussian signals I.E.E.E. Trans. Information Theory. Vol. I.T.II, pp. 61-70, January 1965
- [4] - C. DONCARLI, A. LORENZI  
"Un algorithme d'estimation - détection pour la poursuite de trajectoire". Huitième colloque GRETSI, NICE, Juin 1981

Caractérisation de trajectoires :

- [5] - S.A. MURTAUGH, H.E. CRIEL  
"Fundamentals of proportional navigation" I.E.E.E. Spectrum, Vol. 3, pp 75-85, december 1966
- [6] - M. GUELMAN  
"Proportional navigation with a manoeuvring target", I.E.E.E. Trans. on aerospace and electronic systems, Vol. AES-8, n°3, May 1972
- [7] - L. PASSERON  
"Modélisation et traitement de trajectoires" Huitième colloque GRETSI, NICE, Juin 1981.

REMERCIEMENTS :

Nous remercions vivement les Professeurs Ph. DE LARMINAT et C. DONCARLI (Université de Nantes) et Monsieur GRANGER (Direction des Recherches et Etudes Techniques) pour l'intérêt porté à nos travaux et pour les conseils et encouragements qu'ils ont bien voulu nous prodiguer.