

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

239



NICE du 16 au 20 MAI 1983

---

PROPRIETES HAUTE RESOLUTION DE LA MATRICE DE CORRELATION SPATIALE \*

HIGH RESOLUTION PROPERTIES OF THE SPACE CORRELATION MATRIX

C. BIENVENU

THOMSON-CSF Chemin des Travaux - 06801 CAGNES SUR MER

---

## RESUME

Durant ces dernières années, le domaine de l'écoute passive sous-marine s'est enrichi de nouvelles méthodes de traitement d'antenne dont les performances théoriques sont supérieures à celles des formations de voie classique et adaptative. Ce sont les méthodes haute résolution. Elles sont basées sur les propriétés des vecteurs et des valeurs propres de la matrice des densités spectrales des signaux reçus sur les capteurs de l'antenne. Mais ces propriétés, qui sont des propriétés asymptotiques, n'ont été démontrées qu'à fréquence pure. Dans un contexte large bande, il est très intéressant d'utiliser simultanément toutes les fréquences de la bande utile. Une façon d'aborder le problème est d'étudier les propriétés de la matrice de corrélation spatiale.

En exprimant cette matrice en fonction des vecteurs de Fourier et des matrices des densités spectrales aux différentes fréquences de la bande, on montre que ses vecteurs et valeurs propres se déduisent simplement de ceux des matrices des densités spectrales, et qu'elle possède les mêmes propriétés haute résolution que ces dernières.

## SUMMARY

During the last years, new array processing techniques have been developed in the underwater passive listening field. Their theoretical performance are better than those of conventional and adaptive beamforming : they are called high resolution methods . They are based on the properties of the spectral density matrix eigenvectors and eigenvalues of the signal received on the array. These properties, which are asymptotical properties, has been demonstrated at pure frequency. If the signals are wide band, it is very interesting to use simultaneously all the frequencies of the useful bandwidth. A possible approach to this problem is to study the properties of the space correlation matrix. Expressing that matrix versus Fourier vectors and spectral density matrices for the different frequencies of the bandwidth, it is shown that its eigenvectors and eigenvalues are easily deduced from those of the spectral density matrices, and that the space correlation matrix has the same high resolution properties.

\* Etude financée par la DRET, PARIS FRANCE.



## INTRODUCTION

Les méthodes haute résolution pour le traitement spatial d'antenne sont maintenant largement connues dans le domaine de l'écoute passive sous-marine et de la géophysique. Elles sont aussi envisagées en électromagnétisme. Leur attrait réside dans le fait que théoriquement elles sont asymptotiquement plus puissantes que les traitements spatiaux classiques et adaptatifs. Leur pouvoir de résolution augmente avec le temps d'observation jusqu'à l'infini (tout étant bien sûr stationnaire), alors que celui de la formation de voie classique est donné par la pupille de l'antenne comme celui du traitement adaptatif, mais pour ce dernier l'asymptote croît avec le rapport signal à bruit des sources. Cet accroissement de performance est dû à une modélisation plus complète du milieu. Pour les formations de voie classique et adaptative, seules les caractéristiques des sources sont modélisées : elles sont supposées ponctuelles, spatialement parfaitement cohérentes vues par l'antenne de réception, et les surfaces d'ondes reçues sont une fonction connue de la géométrie de l'antenne et de la position de la source. La fonction de transfert des capteurs est aussi supposée connue.

L'hypothèse supplémentaire faite dans les méthodes haute résolution est que la cohérence spatiale du bruit de fond est connue. Elles supposent aussi que le nombre  $P$  de sources est supérieur à celui  $K$  des capteurs de l'antenne.

L'hypothèse de base faite sur le bruit de fond est qu'il génère des bruits statistiquement indépendants sur les capteurs. Dans ces conditions, la matrice des densités spectrales  $\Gamma(f)$  des signaux reçus sur les capteurs s'écrit (les sources et le bruit de fond sont statistiquement indépendants) :

$$\Gamma(f) = \mathcal{G}(f) I + \sum_{i=1}^{P \ll K} \gamma_i(f) \vec{d}_i(f) \vec{d}_i^+(f) = \mathcal{G}(f) I + \Gamma_s(f) \quad (1)$$

$\mathcal{G}(f)$  est la densité spectrale du bruit de fond.

$I$  est la matrice de cohérence spatiale du bruit de fond qui est en l'occurrence la matrice identité.

$\vec{d}_i(f)$  est le vecteur position de la source  $i$  composé des fonctions de transfert entre la source  $i$  et les  $K$  capteurs, normalisées par la fonction de transfert entre la source  $i$  et un point de référence de l'antenne.

$\gamma_i(f)$  est la densité spectrale de la source  $i$  mesurée sur le point de référence.

$\vec{d}_i^+$  est le conjugué transposé de  $\vec{d}_i$ .

Les méthodes haute résolution sont basées sur la décomposition en vecteurs et valeurs propres de la matrice des densités spectrales  $\Gamma(f)$ . On peut montrer que :

-  $(K - P)$  valeurs propres sont égales à  $\mathcal{G}(f)$ , les  $P$  autres étant plus élevées.

- Les  $P$  vecteurs  $\vec{V}_i(f)$  ( $i \in [1, P]$ ) qui correspondent aux  $P$  valeurs maximum  $\lambda_i(f)$ , sont dans un sous-espace à  $P$  dimensions, engendré par les  $P$  vecteurs position  $\vec{d}_i(f)$ . C'est le sous-espace source.

- Les  $(K - P)$  vecteurs propres  $\vec{V}_j(f)$  ( $j \in [P+1, K]$ ) qui correspondent aux  $(K - P)$  valeurs propres minimum et égales sont orthogonaux à chaque vecteur position  $\vec{d}_i(f)$ . Ils engendrent le sous-espace orthogonal à  $(K - P)$  dimensions.

Cette analyse conduit aux principes des méthodes haute résolution :

a) Les valeurs propres de  $\Gamma(f)$  permettent de déterminer le nombre de sources et de séparer les vecteurs propres qui engendrent le sous-espace source et le sous-espace orthogonal.

b) Les positions des sources peuvent être obtenues en utilisant soit le sous-espace source [1,4] soit le sous-espace orthogonal [5,8]. Dans les deux cas, il est nécessaire d'utiliser un vecteur position de source modèle  $\vec{d}(f, \vec{\theta})$  ( $\vec{\theta}$  est la position de la source). Lorsque l'on utilise le sous-espace source, on cherche à identifier la matrice des densités spectrales des sources seules mesurée à la matrice modèle :

$$\sum_{i=1}^P [\lambda_i(f) - \mathcal{G}(f)] \vec{V}_i(f) \vec{V}_i^+(f) = \sum_{i=1}^P \gamma_i(f) \vec{d}(f, \vec{\theta}_i) \vec{d}^+(f, \vec{\theta}_i) \quad (2)$$

Lorsque l'on exploite le sous-espace source, les positions des sources sont données par les zéros de la fonction :

$$G(f, \vec{\theta}) = \sum_{j=P+1}^K |\vec{V}_j^+(f) \vec{d}(f, \vec{\theta})|^2 \quad (3)$$

Si la matrice de cohérence spatiale du bruit de fond n'est pas égale à la matrice unité, le problème est résolu par une transformation connue de la matrice  $\Gamma(f)$  [9].

Les propriétés des valeurs et vecteurs propres de la matrice des densités spectrales que l'on vient d'exposer sont des propriétés asymptotiques. La résolution de la transformée de Fourier et la variance d'estimation doivent être nulles : la durée d'observation doit donc être infinie.

Cependant, la théorie des méthodes haute résolution n'a été établie qu'à fréquence pure (bande infiniment étroite). Si l'on s'intéresse à un contexte dans lequel les sources émettent des signaux large bande, c'est à dire dont les densités spectrales sont non nulles et varient lentement dans une large bande de fréquence, il est intéressant d'utiliser conjointement toutes les fréquences de la bande. Une façon d'aborder le problème est d'étudier les propriétés de la matrice de corrélation spatio-temporelle des signaux reçus. Ce sont donc comme dans le cas précédent des propriétés asymptotiques (durée d'observation infinie).

DECOMPOSITION DE LA MATRICE DE CORRELATION SPATIALE ECHANTILLONNEE

On se place dans le cas où l'on observe les signaux après échantillonnage.

Soit  $s_k(t)$  le signal reçu d'une source sur le capteur k. Soit  $s(t)$  le signal reçu en un point de référence de l'antenne. Selon le modèle,  $s_k(t)$  est égal au signal  $s(t)$  filtré par la fonction de transfert entre la source et le capteur k normalisée par la fonction de transfert entre la source et le point de référence. Le signal  $s_k(t)$  s'écrit donc :

$$s_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h_k(t - \tau) d\tau \quad (4)$$

Après échantillonnage, cette relation s'écrit :

$$s_k(e) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) h_k(e - m) \quad (5)$$

La durée d'observation tendant vers l'infini, le nombre d'échantillons sur lequel on observe les signaux tend vers l'infini : on le notera  $L_\infty$ .

La relation (5) peut s'écrire sous la forme du produit scalaire de deux vecteurs de dimension :

$$L_\infty \quad \vec{s}_k(e) = h_k^+ (e) \vec{s} \quad (6)$$

$\vec{s}$  est formé des échantillons de  $s(t)$  et  $h_k^+(e)$  de ceux de  $h_k(-t)$  décalés de  $e$  échantillons par rapport à  $\vec{s}$ .

Le vecteur d'observation  $\vec{s}_k$  constitué des  $L_\infty$  échantillons  $s_k(e)$  s'écrit :

$$\vec{s}_k = h_k^+ \vec{s} \quad (7)$$

où  $h_k$  est une matrice ( $L_\infty \times L_\infty$ ) dont la ligne  $e$  est égale à  $h_k^+(e)$ . Donc les lignes  $e$  et  $p$  sont identiques à un décalage près égal à  $(p - e)$ .

La matrice de corrélation spatiale échantillonnée est définie par :

$$R = E (\vec{X} \vec{X}^+) \quad (8)$$

où  $\vec{X}$  est le vecteur d'observation à ( $K \times L_\infty$ ) dimensions composé des  $K$  vecteurs  $\vec{s}_k$  observés sur chaque capteur :

$$\vec{X}^+ = [ \vec{s}_1^+, \dots, \vec{s}_k^+, \dots, \vec{s}_K^+ ] \quad (9)$$

Avec le modèle utilisé,  $\vec{X}$  est égal à :

$$\vec{X} = \vec{B} + \sum_{i=1}^P \vec{s}_i \quad (10)$$

$\vec{B}$  est le vecteur d'observation du bruit de fond et  $\vec{s}_i$  celui de la source  $i$ . En utilisant la relation (7), on voit que  $\vec{s}_i$  peut s'écrire :

$$\vec{s}_i = H_i \vec{s}_i \quad (11)$$

$H_i$  est une matrice à ( $K \times L_\infty$ ) lignes et  $L_\infty$  colonnes composées par les  $K$  matrices  $h_{ik}$  (relation (7)).  $R$  est donc égale à :

$$R = E(\vec{B} \vec{B}^+) + \sum_{i=1}^P E(H_i \vec{s}_i \vec{s}_i^+ H_i^+) = R_B + R_S = R_B + \sum_{i=1}^P H_i R_{s_i} H_i^+ \quad (12)$$

Les matrices de corrélation temporelle  $R_{s_i}$  sont symétriques définies positives (forme de Toeplitz) et peuvent donc s'écrire :

$$R_{s_i} = Q_{s_i} \Lambda_{s_i} Q_{s_i}^+ = Q_{s_i} \Lambda_{s_i}^{1/2} Q_{s_i}^+ = C_{s_i} C_{s_i}^+ \quad (13)$$

$\Lambda_{s_i}$  est la forme diagonale de  $R_{s_i}$  et  $Q_{s_i}$  sa matrice de diagonalisation.

La relation (12) s'écrit donc :

$$R = R_B + \sum_{i=1}^P H_i C_{s_i} C_{s_i}^+ H_i^+ = R_B + \sum_{i=1}^P H_{ci} H_{ci}^+ \quad (14)$$

Si  $W_{lci}$  est la colonne  $l$  de la matrice  $H_{ci}$ , on peut écrire :

$$R = R_B + \sum_{i=1}^P \sum_{e=1}^{L_\infty} \vec{w}_{eci} \vec{w}_{eci}^+ \quad (15)$$

Les matrices  $R_{s_i}$  sont des matrices carrées ( $L_\infty \times L_\infty$ ) de Toeplitz.  $L_\infty$  tendant vers l'infini, on montre [10] que ses vecteurs propres sont les vecteurs de Fourier  $\vec{F}_e$  aux  $L_\infty$  fréquences :  $f_e = \frac{1}{L_\infty T_E}$



( $T_E$  est la période d'échantillonnage), et les valeurs propres correspondantes sont égales à la densité spectrale de  $s_i(t)$  :  $\gamma_i(f_e)$ . Les matrices  $Q_{si}$  sont donc toutes égales à la matrice de Fourier  $F = [\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_e, \dots, \vec{F}_{L_\infty}]$  (16)

et la matrice  $H_{ci}$  s'écrit :

$$H_{ci} = H_{iF} \Lambda_{s_i}^{1/2} \quad (17)$$

La matrice diagonale  $\Lambda_{s_i}$  comporte sur sa diagonale les  $L_\infty$  densités spectrales  $\gamma_i(f_e)$ . La matrice  $H_{iF}$  est composée de  $K$  sous-matrices ( $h_{ik}^F$ ) de dimensions ( $L_\infty \times L_\infty$ ). La matrice  $h_{ik}^F$  est définie par la relation (7) pour la source  $i$ . Les lignes de ( $h_{ik}^F$ ) sont les transformées de Fourier à chaque fréquence  $f_e$  des lignes de  $h_{ik}$ . Sa première ligne s'écrit donc :

$$[h_{ik}(f_1), \dots, h_{ik}(f_e), \dots, h_{ik}(f_{L_\infty})] \quad (18)$$

$h_{ik}(f_e)$  est donc la  $k^{\text{ième}}$  composante du vecteur position  $\vec{d}_i(f_e)$  de la source  $i$  à la fréquence  $f_e$ .

La ligne  $m$  de  $h_{ik}^F$  est comme on l'a vu identique à la première mais décalée de  $(m - 1)$  échantillons. Donc la ligne  $m$  de ( $h_{ik}^F$ ) s'écrit :

$$[h_{ik}(f_1)e^{-2\pi j f_1(m-1)T_E}, \dots, h_{ik}(f_e)e^{-2\pi j f_e(m-1)T_E}, \dots, h_{ik}(f_{L_\infty})e^{-2\pi j f_{L_\infty}(m-1)T_E}] \quad (19)$$

La matrice ( $h_{ik}^F$ ) est donc égale à :

$$h_{ik}^F = [h_{ik}(f_1)\vec{F}_1, \dots, h_{ik}(f_e)\vec{F}_e, \dots, h_{ik}(f_{L_\infty})\vec{F}_{L_\infty}] \quad (20)$$

et la matrice  $H_{iF}$  s'écrit :

$$H_{iF} = [\vec{d}_i(f_1) \otimes \vec{F}_1, \dots, \vec{d}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e, \dots, \vec{d}_i(f_{L_\infty}) \otimes \vec{F}_{L_\infty}] \quad (21)$$

où  $A \otimes B$  est le produit de Kronecker des matrices  $A$  et  $B$  [11]

Des relations (17) et (21) on déduit le vecteur  $\vec{W}_{eci}$  :

$$\vec{W}_{eci} = \gamma_i(f_e)^{1/2} \vec{d}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e \quad (22)$$

La matrice des densités spectrales des sources seules s'écrit par conséquent :

$$\begin{aligned} \Gamma_S &= \sum_{e=1}^P \sum_{i=1}^L \vec{W}_{eci} \vec{W}_{eci}^+ = \\ &= \sum_{e=1}^P \sum_{i=1}^L \gamma_i(f_e) [\vec{d}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e] [\vec{d}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e]^+ \\ &= \sum_{e=1}^P \sum_{i=1}^L [\gamma_i(f_e) \vec{d}_i(f_e) \vec{d}_i^+(f_e)] \otimes (\vec{F}_e \vec{F}_e^+) \\ &= \sum_{e=1}^P \Gamma(f_e) \otimes (\vec{F}_e \vec{F}_e^+) \quad (23) \end{aligned}$$

On appellera les vecteurs  $[\vec{d}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e]$  vecteurs position généralisés des sources. Ils sont orthogonaux pour deux fréquences différentes à cause de l'orthogonalité des vecteurs de Fourier :

$$\begin{aligned} &[\vec{d}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e]^+ [\vec{d}_i(f_m) \otimes \vec{F}_m] = \\ &[\vec{d}_i^+(f_e) \vec{d}_i(f_m)] [\vec{F}_e^+ \vec{F}_m] = \delta_{em} \vec{d}_i^+(f_e) \vec{d}_i(f_m) \quad (24) \end{aligned}$$

La matrice  $R_S$  est donc de rang  $(PL_\infty)$ .

L'hypothèse de base faite sur le bruit de fond dans les méthodes haute résolution est qu'il est statistiquement indépendant entre les capteurs (cas auquel il est toujours possible de se ramener si sa cohérence spatiale est connue). En supposant que la densité spectrale du bruit de fond est identique sur les capteurs,  $R_B$  s'écrit :

$$R_B = I \otimes r_B \quad (25)$$

où  $I$  est la matrice unité d'ordre  $K$ , et  $r_B$  la matrice de corrélation temporelle du bruit de fond.

$r_B$  ayant une forte de Toeplitz, ses valeurs propres sont égales à la densité spectrale  $\sigma(f_e)$  du bruit de fond aux fréquences  $f_e$  et ses vecteurs propres sont les vecteurs de Fourier correspondants.

On peut donc écrire :

$$r_B = \sum_e \sigma(f_e) \vec{F}_e \vec{F}_e^+ \quad (26)$$

On en déduit :

$$R_B = I \otimes \sum_e \sigma(f_e) \vec{F}_e \vec{F}_e^+ = \sum_e \sigma(f_e) I \otimes (\vec{F}_e \vec{F}_e^+) \quad (27)$$

La matrice de corrélation spatiale échantillonnée est donc égale à :

$$\begin{aligned} R &= \sum_e \sigma(f_e) I \otimes (\vec{F}_e \vec{F}_e^+) + \sum_{i=1}^P \gamma_i(f_e) \vec{d}_i(f_e) \vec{d}_i^+(f_e) \\ &\quad \otimes (\vec{F}_e \vec{F}_e^+) \\ &= \sum_e [\sigma(f_e) I + \sum_{i=1}^P \gamma_i(f_e) \vec{d}_i(f_e) \vec{d}_i^+(f_e)] \otimes (\vec{F}_e \vec{F}_e^+) \\ &= \sum_e \Gamma(f_e) \otimes (\vec{F}_e \vec{F}_e^+) \quad (28) \end{aligned}$$

Les vecteurs et valeurs propres de  $R$  s'expriment facilement en fonction de ceux des matrices du second membre de (28). En effet, on montre [11] que  $\{\lambda_i(A), \lambda_j(B)\}$  et  $\{\vec{v}_i(A), \vec{v}_j(B)\}$  sont les valeurs propres et les vecteurs propres

respectivement des matrices A et B, les valeurs et vecteurs propres  $\lambda_p$  et  $\vec{V}_p$  de  $(A \otimes B)$  sont égaux à :

$$\lambda_{p=ij} = \lambda_i(A) \lambda_j(B) \tag{29}$$

$$\vec{V}_{p=ij} = \vec{V}_i(A) \otimes \vec{V}_j(B)$$

Les vecteurs de Fourier étant asymptotiquement orthogonaux, on vérifie facilement que les vecteurs propres de  $(\vec{F}_e \vec{F}_e^+)$  sont les vecteurs de Fourier eux-mêmes, les valeurs propres correspondantes étant nulles sauf celles qui correspondent au vecteur propre  $\vec{F}_e$  qui vaut 1. En utilisant les relations (29), on déduit que la matrice  $[\Gamma(f_m) \otimes (\vec{F}_m \vec{F}_m^+)]$  est de rang K.

Les K valeurs propres non nulles sont égales à celles de  $\Gamma(f_m)$ , les vecteurs propres correspondants étant égaux à :  $\vec{V}_i(f_m) \otimes \vec{F}_m$ . Ces vecteurs sont orthogonaux pour deux fréquences différentes, à cause de l'orthogonalité des vecteurs de Fourier :

$$\begin{aligned} [\vec{V}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e]^+ [\vec{V}_i(f_m) \otimes \vec{F}_m] &= [\vec{V}_i^+(f_e) \vec{V}_i(f_m)] \\ [\vec{F}_e^+ \vec{F}_m] &= \delta_{em} \vec{V}_i^+(f_e) \vec{V}_i(f_m) \end{aligned}$$

Par conséquent on vérifie facilement que les K vecteurs propres  $[\vec{V}_i(f_m) \otimes \vec{F}_m]$  sont aussi vecteurs propres de R, les valeurs propres correspondantes étant celles de  $\Gamma(f_m)$ .

Donc les  $(KL^\infty)$  vecteurs et valeurs propres de R sont égaux à :

$$\vec{V}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e, e \in [1, L^\infty], i \in [1, K]$$

Les valeurs propres correspondantes étant égales à :

$$\lambda_i(f_e), e \in [1, L^\infty], i \in [1, K]$$

CONCLUSION

A partir des résultats établis au paragraphe précédent, il est facile de montrer que la matrice R possède les mêmes propriétés haute résolution que la matrice des densités spectrales.

a) Si  $\vec{V}_i(f_m)$  appartient au sous-espace orthogonal, il est orthogonal à tous les vecteurs positions  $\vec{d}_i(f_m)$ . A cause de l'orthogonalité à deux fréquences différentes des vecteurs de Fourier, les  $(K-P)L^\infty$  vecteurs propres correspondants  $[\vec{V}_i(f_m) \otimes \vec{F}_m]$  ( $i \in [P+1, K], m \in [1, L^\infty]$ ) sont orthogonaux aux

aux  $PL^\infty$  vecteurs position généralisés des sources :  $[\vec{V}_i(f_m) \otimes \vec{F}_m]^+ [\vec{d}_j(f_e) \otimes \vec{F}_e] = [\vec{V}_i^+(f_m) \vec{d}_j(f_e)] [\vec{F}_m^+ \vec{F}_e]$

$$\text{Si : } m=e, \vec{V}_i^+(f_m) \vec{d}_j(f_e) = 0, \text{ et si : } m \neq e, \vec{F}_m^+ \vec{F}_e = 0 \tag{30}$$

Les valeurs propres associées aux  $(K-P)$  vecteurs propres qui correspondent à la fréquence  $f_e$ , sont égales à  $\sigma(f_e)$  ( $e \in [1, L^\infty]$ )

b) Si  $\vec{V}_i(f_m)$  appartient au sous-espace source, il est par définition vecteur propre de la matrice des densités spectrales des sources seules  $\Gamma_s(f_m)$ , la valeur propre associée étant égale à :  $\lambda_i(f_m) - \sigma(f_m)$ .

Les  $(PL^\infty)$  vecteurs propres correspondants  $[\vec{V}_i(f_m) \otimes \vec{F}_m]$  ( $i \in [1, P], m \in [1, L^\infty]$ ) sont vecteurs propres de la matrice de corrélation spatiale échantillonnée des sources seules  $R_s$ .

Les valeurs propres associées aux P vecteurs propres qui correspondent à la fréquence  $f_e$  sont égales à :  $\lambda_i(f_e) - \sigma(f_e)$  ( $e \in [1, L^\infty], i \in [1, P]$ ). On peut donc écrire l'identité :

$$\begin{aligned} R_s &= \sum_e \sum_{i=1}^P \gamma_i(f_e) [\vec{d}_i^+(f_e) \vec{d}_i(f_e)] \otimes [\vec{F}_e \vec{F}_e^+] = \\ &= \sum_e \sum_{i=1}^P [\lambda_i(f_e) - \sigma(f_e)] [\vec{V}_i^+(f_e) \vec{V}_i(f_e)] \otimes [\vec{F}_e \vec{F}_e^+] \tag{31} \end{aligned}$$

Il est donc possible d'utiliser avec la matrice de corrélation spatiale échantillonnée les mêmes méthodes que celles utilisées avec la matrice des densités spectrales.

Pour exploiter le sous-espace orthogonal, on peut élaborer une fonction analogue à celle de la relation (3). Connaissant pour chaque fréquence  $f_m$  le modèle du vecteur position source  $\vec{d}(f_m, \vec{\theta})$ , on sait construire les L modèles des vecteurs position source généralisés :  $[\vec{d}(f_m, \vec{\theta}) \otimes \vec{F}_m]$ . Les vecteurs propres de R qui appartiennent au sous-espace orthogonal étant orthogonaux aux vecteurs position généralisés des sources, les positions des sources sont données par par les zéros de la fonction :

$$G(\vec{\theta}) = \sum_e \sum_{i=P+1}^K |[\vec{V}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e]^+ [\vec{d}(f_e, \vec{\theta}) \otimes \vec{F}_e]|^2 \tag{32}$$

Il est facile de montrer que cette fonction

$$s'écrit : G(\vec{\theta}) = \sum_e \sum_{i=P+1}^K | \vec{V}_i^+(f_e) \vec{d}(f_e, \vec{\theta}) |^2 = \sum_e G(f_e, \vec{\theta}) \tag{33}$$

On obtient donc la simple intégration en fonction de la fréquence de la fonction obtenue avec la matrice des densités spectrales, résultat auquel on pouvait s'attendre.



Pour exploiter le sous-espace source, on utilise une matrice de corrélation spatiale des sources seules modèle :

$$\sum_e \sum_{i=1}^P \gamma_i(f_e) [\vec{d}(f_e, \vec{\theta}_i) \otimes \vec{F}_e] [\vec{d}(f_e, \vec{\theta}_i) \otimes \vec{F}_e]^+ \quad (34)$$

Les paramètres des sources (densités spectrales, positions) sont obtenus en effectuant une identification entre cette matrice modèle et la matrice de corrélation spatiale des sources seules estimées à partir du sous-espace source [1] :

$$\sum_e \sum_{i=1}^P [\hat{\lambda}_i(f_e) - \sigma(f_e)] [\vec{v}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e] [\vec{v}_i(f_e) \otimes \vec{F}_e]^+ \quad (35)$$

Il est de même possible, comme cela a été proposé à fréquence pure [2], d'inclure dans le modèle du vecteur position des sources des paramètres de propagation.

Il est clair que dans cette identification, la détermination des positions des sources se fait en utilisant toutes les fréquences conjointement.

Pour déterminer le nombre de sources à une fréquence donnée, on utilise le rapport de vraisemblance généralisé qui conduit à des tests dont l'un des plus simples s'écrit [12] :

$$T(P) = \left\{ \frac{\sum_{i=P+1}^K \hat{\lambda}_i^{(K-P)}}{K-P} \right\} / \left\{ \frac{\sum_{i=P+1}^K \hat{\lambda}_i}{K-P} \right\} \quad (36)$$

où les  $\hat{\lambda}_i$  sont les valeurs propres de la matrice des densités spectrales estimée, rangées dans l'ordre décroissant lorsque  $i$  varie de 1 à  $N$ . A large bande, on observe le vecteur  $\vec{X}$ . Si le champ de bruit est constitué de processus Gaussiens centrés, et si le nombre fini d'échantillons  $L$  sur lequel on observe  $\vec{X}$  est suffisamment grand pour que la matrice de corrélation de  $\vec{X}$  puisse être considérée comme égale à  $R$  (relation (28)), la loi de probabilité d'une série d'observations  $\vec{X}_n$  ( $n \in [1, N]$ ) indépendantes, s'écrit :

$$p \{ \vec{X}_n \} = (2\pi)^{-\frac{KLN}{2}} [\det R]^{-\frac{N}{2}} \exp - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \vec{X}_n^+ R^{-1} \vec{X}_n \quad (37)$$

En utilisant de même le rapport de vraisemblance généralisé, on peut montrer en employant la même technique que dans [12] que le test équivalent à (36) s'écrit :

$$T'(P) = \prod_{i=1}^L \left\{ \left[ \frac{\sum_{i=P+1}^K \hat{\lambda}_i(f_e)}{K-P} \right]^{(K-P)} \right\} / \prod_{i=P+1}^K \hat{\lambda}_i(f_e) \quad (38)$$

Si l'on a des informations a priori, le test peut changer. Si l'on suppose le bruit de fond blanc dans la bande par exemple, on obtient :

$$T''(P) = \prod_{e=1}^L \left\{ \left[ \frac{\sum_{i=P+1}^K \hat{\lambda}_i(f_e)}{L(K-P)} \right]^{K-P} \right\} / \left\{ \prod_{i=P+1}^{K-1} \hat{\lambda}_i(f_e) \prod_{e=1}^L \frac{\hat{\lambda}_K(f_e)}{L} \right\} \quad (39)$$

A titre d'exemple, on présente sur les figures 1 et 2 des résultats obtenus en utilisant le sous-espace orthogonal. L'antenne comporte 12 capteurs équidistants d'une demi-longueur d'onde à la fréquence  $f_M$ . Le champ de bruit est composé d'un bruit de surface isotrope et de deux sources à  $-5^\circ$  et  $+5^\circ$ , de densités spectrales uniformes, et de rapport signal à bruit  $-15$  dB. Les matrices de densités spectrales sont obtenues en intégrant 100 spectres instantanés calculés avec une résolution de  $f_M/50$ . On présente les résultats obtenus avec 10 tirages indépendants, aux fréquences  $2/3 f_M$  et  $f_M$  (relation (3)) sur la fig. 1 et dans la bande  $2/3 f_M - f_M$  (relation (33)) sur la figure 2.

#### Références

- [1] W.S. LIGGETT "Passive sonar : fitting models to multiples time series". Proceed of NATO ASI on Signal Processing, Loughborough (U.K), august 1972, Academic Press, pp. 327.345.
- [2] H. MERMOZ "Imagerie, corrélation et modèles" Ann. des Télécom., t. 31, n° 1-2, janv-fév. 1976, pp. 17-36.
- [3] J.L. LACOUME, B. BOUTHEMY, F. GLANGEAUD, C. LATOMBE, A. SILVENT, "Caracterisation par analyse interspectrale du champ d'ondes reçu sur un réseau de capteurs- Applications" 7e Colloque GRETSI, Nice, 28 mai - 2 Juin 1979 pp.80/1 -80/7.
- [4] G. VEZZOZI "Wavefront separation by rectification of the Choleski factor of the cross-spectral matrix" Proceed. Int. Conf. on Spectral Analysis and its use in Underwater Acoustics, Imperial College, London, April 1982, pp. 22/1- 22/8.

- [5] N.L. OWSLEY, J.F. LAW "Dominant mode power spectrum estimation" Proceed ICASS P 82, Paris, France, May 3-5 1982, pp. 775-778.
- [6] G. BIENVENU, L. KOPP "Principe de la goniométrie passive adaptative" 7e colloque GRETSI, NICE, 28 Mai - 2 juin 1979, pp. 106/1 - 106/10.
- [7] R.O. SCHMIDT "Multiple emitter location and signal parameter estimation" Proceed. RADC Spectrum Estimation Workshop, oct. 1979, pp. 243 - 258.
- [8] DON H. JOHNSON, S.R. DEGRAAF "Improving the resolution of bearing in passive sonar arrays by eigenvalues analysis" IEEE Trans. ASSP, vol 30 n° 4, aug. 1982, pp. 638-647.
- [9] G. BIENVENU "Detection passive de sources ponctuelles dans du bruit isotrope" 5ème Colloque GRETSI, NICE 16-21 Juin 1975, pp. 473-479.
- [10] R.M. GRAY "On the asymptotic eigenvalue distribution of Toeplitz matrices" IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT 18, n° 6, nov. 1972, pp. 725-730.
- [11] T.W. ANDERSON "Introduction to multivariate statistical analysis" JOHN WILEY and SONS INC. 1958.
- [12] G. BIENVENU, L. KOPP "Optimality of high resolution array processing using eigensystem" accepté pour publication IEEF Proceed. ASSP.

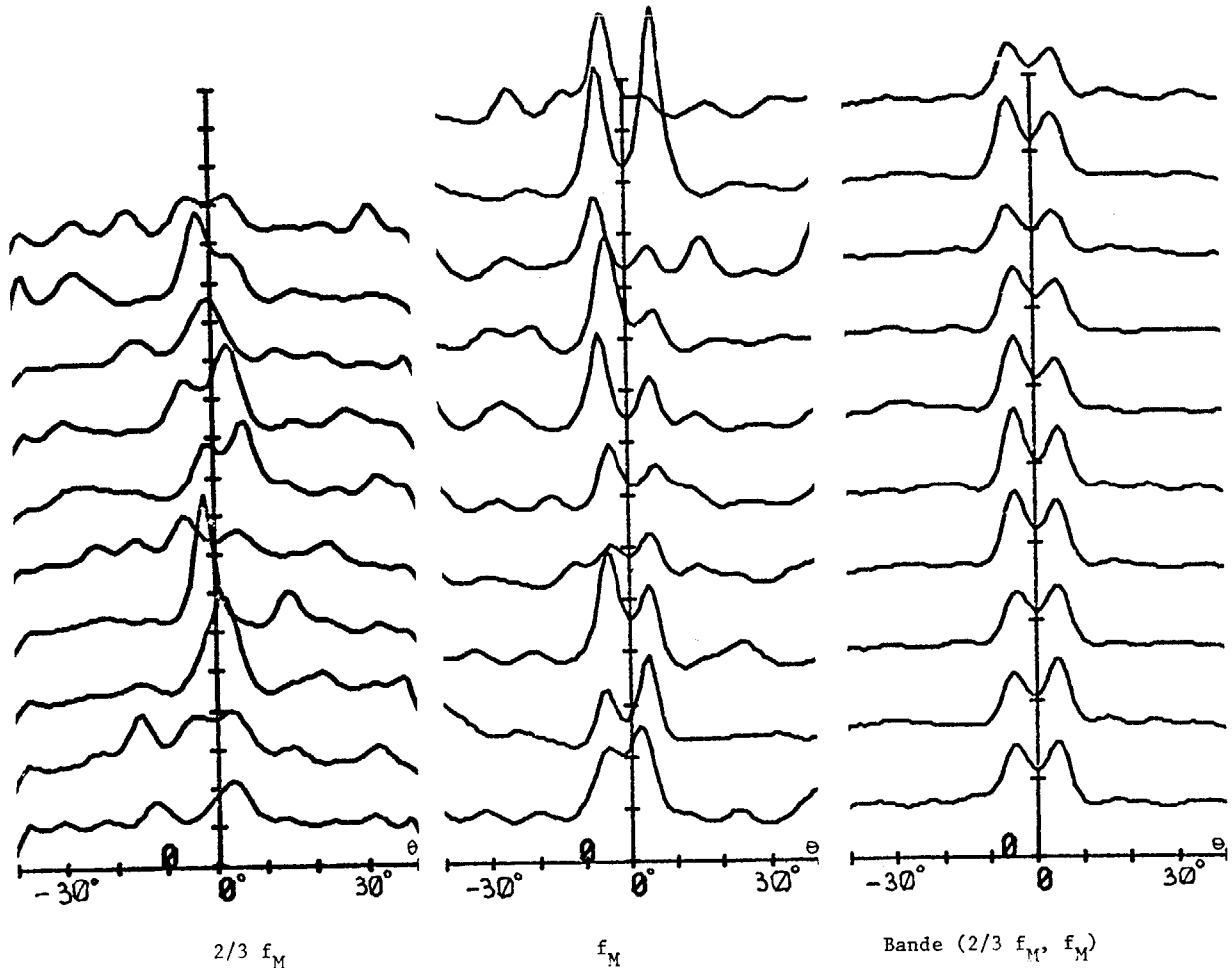


Fig. 1 : fréquence pure  $G(f, \theta)$

Fig. 2 : Large bande :  $G(\theta)$

