NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

DETECTION PAR LES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE INTERSPECTRALE : ADAPTATION AU BRUIT DE FOND*

DETECTION BY THE SPECTRAL MATRIX EIGEN VALUES : ADATIVITY TO BACKGROUND NOISE.

Laurent KOPP - Georges BIENVENU

THOMSON-CSF, DASM - BP 53 - 06801 CAGNES-SUR-MER CEDEX

RESUME

Les méthodes globales d'identification, dites "Haute-résolution", utilisées en acoustique sous-marine pour l'écoute passive permettent potentiellement une déconvolution parfaite du champ sonore à condition de connaître la matrice de cohérence spatiale du bruit de fond.

L'objet de cette étude est de proposer une méthode d'estimation de cette matrice et de montrer les liens qui existent avec la méthode de détection par les valeurs propres de la matrice interspectrale.

SUMMARY

In underwater passive listening the so called "High-resolution" methods are global identification methods potentially able to achieve a perfect deconvolution of the noise field.

To do so an important requirement is to know the background noise spatial coherence matrix.

This study shows how this matrix could be estimated and the links with a detection test based on the spectral matrix eigenvalues.

* Etude financée par la Direction des Recherches et Etudes Techniques (DRET, Paris)

DETECTION PAR LES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE INTERSPECTRALE : ADAPTATION AU BRUIT DE FOND
DETECTION BY THE SPECTRAL MATRIX EIGENVALUES : ADAPTIVITY TO BACKGROUND NOISE

1. INTRODUCTION

L'écoute passive en acoustique sous-marine a pour tâche la détection, la localisation et l'identification des bruiteurs marins à partir des signaux qu'ils engendrent sur les hydrophones d'un réseau.

Dans le modèle idéalisé le plus généralement retenu pour étudier ce problème, le milieu est linéaire invariant et les capteurs "parfaits" (ponctuels, transparents, ...) les signaux sont des processus gaussiens, centrés, stationnaires et les différents bruiteurs contribuant au champ sonore sont mutuellement non corrélés (cette dernière hypothèse n'est d'ailleurs pas nécessaire : on pourrait admettre des corrélations entre sources.

Dans ces conditions, la matrice interspectrale des signaux reçus sur les K capteurs s'écrit à la fréquence f [1]

$$\Gamma(f) = \sum_{i=1,p} \gamma_i(f)\, \vec{d}(\theta_i,f)\, \vec{d}^{+}(\theta_i,f) + \sigma(f) J(f) \quad (1)$$

où on distingue :

- p sources ponctuelles de position θi et de densité spectrale $\gamma i(f)$
- Le bruit de fond de densité spectrale $\sigma(f)$ et de matrice de cohérence spatiale J(f)
- d (θi, f), le vecteur "position" de la ième source qui décrit l'effet de la propagation entre le point i et les différents capteurs ($d^{+}(\theta i,f)$ est vecteur ligne transposé et complexe conjugué de d (θi,f))

Il s'agit de déterminer les paramètres p, $\{\gamma i\ (f),\ \theta i\}_{i=1,p}$

Pour celà $\Gamma(f)$ possède des propriétés algébriques remarquables vis à vis des paramètres qui permettent de les identifier parfaitement en fonction de J(f) et du modèle de propagation (c'est à dire de la relation associant la position θ d'une source à son vecteur position $\vec{d}(\theta,f)$) à condition qu'il y ait moins de sources que de capteurs ($p \leq$ K-1).

La première étape consiste en un "blanchissement spatial" réalisé par un changement de base de capteurs de matrice C(f) choisie telle que :

$$C(f)\, J(f)\, C^{+}(f) = I_K$$

Ik étant la matrice identité d'ordre K (dans la nouvelle base le bruit de fond est incohérent) cette opération est possible si J(f) est connue car elle est définie positive.

Dans cette nouvelle base la matrice interspectrale devient :

$$\Gamma_c = C\Gamma C^{+} = \sum_{i=1,p} \gamma_i\, \vec{d}_{ci}\, \vec{d}_{ci}^{+} + \sigma I_K \quad (2)$$

avec $\vec{d}_{ci} = C(f)\, \vec{d}(\theta_i,f)$

La fréquence f est désormais sous-entendue.

De l'examen de (2) il ressort que la plus petite valeur propre de Γc est égale σ et qu'elle est dégénérée d'ordre K − p ; les autres propriétés de Γc [2] qui sont à la base des méthodes "Haute-résolution" ne seront pas utilisées dans cette étude et l'on va uniquement s'occuper du problème de la détection.

De ce qui précède, on voit que le nombre de sources se déduit de la mesure de la dégénérescence de la plus petite valeur propre de Γc.

Cette méthode de détection a l'intérêt d'être indépendante du modèle de propagation et on supposera désormais que le modèle de propagation est inconnu et qu'il s'agit donc plus d'estimer θi mais directement $\vec{d}_{ci}$.

Pour pouvoir définir une méthode pratique de détection à partir de la remarque précédente, il faut s'affranchir du bruit de mesure et des erreurs de modélisation de la cohérence spatiale du bruit de fond, ce qui va suivre.

2. LE BRUIT DE MESURE

Dans cette section le bruit de fond est de cohérence spatiale connue et, dans un premier temps, il sera supposé incohérent.

Le bruit de mesure est pris en compte par une approche statistique qui a fait l'objet d'une étude précédente [3] dont les différentes étapes sont résumées ci-dessous.

On commence par définir l'observation: ici les signaux d'entrée subissent une transformation de Fourier pour donner une suite de vecteurs $\vec{X}n$ complexes distribués suivant une loi gaussienne complexe de densité :

$$p(\vec{X}) = (\pi)^{-K} |\Gamma|^{-1} \exp(-\vec{X}^{\dagger} \Gamma^{-1} \vec{X}) \qquad (3)$$

$|\Gamma|$ et Γ^{-1} désignant respectivement le déterminant et l'inverse de Γ.

L'observation utilisée est obtenue en prenant N vecteurs $\vec{X}n$ statistiquement indépendants. La dépendance de la statistique de l'observation vis à vis des paramètres du problème apparaît donc à travers la seule matrice interspectrale Γ.

Avant de considérer le problème général de la détection d'un nombre quelconque de sources, on peut examiner une situation plus simple : Il s'agit du problème binaire de savoir si il y a p ou q sources (hypothèses Hp et Hq respectivement).

La fonction de vraisemblance dans l'hypothèse Hp s'écrit :

$$L_p(X, \vec{\beta}_p)$$

où $\vec{\beta}p$ symbolise l'ensemble des paramètres (σ $\{\gamma i, \vec{d}i\}_{i=1,p}$)

Si les paramètres $\vec{\beta}p$ et $\vec{\beta}q$ étaient connus on sait que la plupart des critères conduisent à comparer à un seuil le rapport de vraisemblance usuel :

$$L_p(X, \vec{\beta}_p) / L_q(X, \vec{\beta}_q)$$

Dans le présent contexte, ces paramètres étant inconnus, on útilise le rapport de vraisemblance généralisé :

$$L_p(X, \hat{\vec{\beta}}_p) / L_q(X, \hat{\vec{\beta}}_q)$$

$\hat{\vec{\beta}}p$ étant l'estimée de $\vec{\beta}p$ au sens maximum de vraisemblance. On est donc conduit à étudier les estimateurs de $\vec{\beta}p$. En fait, si $p > 1$, le problème ne peut être complétement résolu (ce n'est d'ailleurs pas surprenant, le même problème existe dans le cas asymptotique [4])

Il est cependant possible de calculer :

$$L_p^c(X) = L_p(X, \hat{\vec{\beta}}_p) = (\pi e)^{-KN} (F(p))^{-N} \qquad (4)$$

avec $F(p) = \prod_{i=1,p} \hat{\lambda}_i \left[\sum_{i=p+1,K} \hat{\lambda}_i / (K-p) \right]^{K-p}$

$\{\hat{\lambda}i\}$ étant les K valeurs propres de $\hat{\Gamma} = \frac{1}{N} \sum_{n=1,N} \vec{X}_n \vec{X}_n^{\dagger}$ rangées en décroissant.

Pour revenir au problème général de la détection d'un nombre quelconque de sources où il s'agit de décider entre K hypothèses possibles, on utilise l'approche suivante : le problème est découpé en une suite de problèmes binaires ; à partir de p = 0 on teste l'hypothèse Hp :{ il y a plus p sources} contre l'hypothèse $\overline{Hp}$:{ non Hp, il y a au moins p+1 sources} , on considère les valeurs successives de p aussi longtemps que l'hypothèse $\overline{Hp}$ n'est pas rejetée.

Pour tester Hp contre $\overline{Hp}$ on utilise la méthode du rapport de vraisemblance généralisé qui conduit à comparer à un seuil :

$$\max_{q \leq p} (L_q^c(X)) / \max_{q > p} (L_q^c(X))$$

Le calcul de ce rapport donne [3]

$$T(p) = (\lambda_g^p / \lambda_a^p)^{N(K-p)} \qquad (5)$$

λ_a^p et λ_g^p désignent respectivement les moyennes arithmétiques et géométriques des K-p plus petites valeurs propres de $\hat{\Gamma}$.

Le récepteur est donc défini par

$$T(p) \underset{\overline{H_p}}{\overset{H_p}{\gtrless}} \eta_p$$

les seuils étant fixés par :

$$\text{Proba}\{T(p) < \eta_p / p\} = \alpha_p \quad (6)$$

La probabilité ci-dessus étant prise conditionnellement à la situation où il y a exactement p sources. αp contrôle la puissance du test.

Ce test est un test de "sphéricité"classique.

Dans ce qui précède, on a supposé le bruit de fond incohérent : dans le cas contraire exactement les mêmes résultats sont obtenus en travaillant après blanchissement spatial.
Le test de détection sera noté T(p,J) pour expliciter la dépendance vis à vis de l'hypothèse faite sur le bruit de fond.

Les difficultés de calcul de la distribution statistique de T(p,J) rendent délicat la détermination des seuils (par (6)) en fonction du paramètre αp de rejection (ainsi d'ailleurs que le choix de αp vis à vis des performances désirées)

En pratique il est possible de fixer ces seuils par simulation, celà donne de bons résultats mais manque de souplesse.

La figure 1 illustre le comportement du test de détection sur un champ sonore simulé comprenant 2 sources à l'infini de gisements 0° et 10° et de puissance spectrale $\gamma i/\sigma$ égale à -10 dB par rapport au bruit de fond (de cohérence spatiale J1 : voir section suivante). L'antenne est horizontale linéaire à 12 capteurs équidistants d'une demi-longueur d'onde à la fréquence de travail ; on utilise N = 100 vecteurs $\vec{X}_n$

On voit sur la figure le test $T(p,J_1)$ en fonction de p et la "ligne des seuils" ηp

Une façon radicale de contourner le problème de calcul des seuils est d'utiliser une approche différente. On est ici dans une situation très analogue à celle de l'identification d'un processus autorégressif pour lequel il faut en déterminer l'ordre : on sait que le critère d'Akaike [8] fournit une solution satisfaisante à ce problème et on est d'ailleurs dans une situation particulièrement favorable à l'utilisation de ce critère puisque le calcul de la vraisemblance généralisée est explicitement possible (relation (4)). Ce critère a été utilisé récemment [9] avec succès semble-t-il.

Bien que ce type de méthode soit d'emploi beaucoup plus simple, elle ne donne pas toujours des performances aussi satisfaisantes (en terme de probabilité de décision correcte) que la méthode avec seuils. Il semble que la méthode ne soit réellement satisfaisante qu'asymptotiquement (N grand) et lorsque les sources sont fortes et bien séparées.

3. ESTIMATION DE LA MATRICE DE COHERENCE SPATIALE DU BRUIT DE FOND

Les résultats précédents ne sont applicables que si J est connu. Dans cette section, on propose une méthode d'estimation de J lorsqu'elle fait partie d'une famille {Jm} dépendant d'un paramètre m (éventuellement vectoriel) qu'il s'agit donc d'estimer. Soit donc m_o la valeur vraie, inconnue de ce paramètre et m la valeur supposée.

Conformément à la méthode décrite en 1. on blanchit Jm par un changement de base de matrice Cm, la matrice interspectrale dans la nouvelle base, avec des notations évidentes, s'écrit :

$$\Gamma(m,m_o) = \sum_{i=1,p} \gamma_i \vec{d}_{mi} \vec{d}_{mi}^{\,+} + \sigma C_m J_{m_o} C_m^+$$

$$\Gamma(m,m_o) = \Gamma(m_o,m_o) + \sigma C_m (J_{m_o} - J_m) C_m^+ \quad (7)$$

Le dernier terme de (7) apparît comme une perturbation et la plus petite valeur propre de Γ(m,mo) sera en général non dégénérée si m ≠ mo. Asymptotiquement, on déciderait donc $\hat{p}$ = K-1.

Un moyen simple d'estimer mo est alors de tracer les valeurs propres de Γ(m,mo) en fonction de m : mo est la valeur de m pour laquelle la dégénérescence de la plus petite valeur propre est d'ordre maximal.

C'est une méthode qui avait été nommée "focalisation des valeurs propres" [2,5]. Nous allons montrer ici comment déduire de cette remarque une méthode pratique d'estimation de mo.
On voit que mo est la valeur de m pour laquelle le nombre de sources détectées est minimum.

Ceci est illustré sur les figures 2 et 3 (respectivement les valeurs propres et le nombre de sources détectées en fonction de m) appliqué à la simulation de la figure 1 (on a ici mo = 1).

Le modèle de bruit utilisé ici est un modèle de bruit de surface [5, 6, 7] dans lequel le terme général de la matrice de cohérence spatiale s'écrit :

$$(J_m)_{kl} = \frac{2^m m!}{(2\pi d_{kl})^m} \, J_m (2\pi d_{kl})$$

d_{kl} est la distance en longueur d'onde entre les capteurs k et l.
J_m (.) est la fonction de Bessel d'ordre m et de première espèce.

Pour expliquer comment déduire de ces remarques une méthode pratique d'estimation de mo on pourra consulter la fig. 4 qui représente, pour quelques valeurs de m, l'évolution de la quantité test T(p,Jm) en fonction de m (à titre de comparaison la figure 1 représentait T(p, Jmo)). Cette fig. montre pourquoi le nombre de sources détectées est plus grand quand $m \neq mo$.
On a sensiblement le résultat suivant :

- Pour m suffisamment différent de mo, si $q \geqslant p$

$$T(q, J_m) < T(q, J_{m_0}) \qquad (8)$$

En définissant la fonction

$$F(m) = \sum_{q=p,K-1} T(q, J_m) \qquad (9)$$

On aura

$$F(m) < F(m_0) \quad \text{si } |m - m_0| > \varepsilon \qquad (10)$$

En fait, dans la relation (9) on peut prendre p = o car les quantités tests sont très faibles quand $q < p$.

L'ordre de grandeur de ε est sensiblement tel que la perturbation provenant d'une erreur de modélisation soit du même ordre de grandeut que celle provenant du bruit de mesure.

La figure 5 représente F(m) pour la simulation précédente et confirme les remarques précédentes: la position de son maximum apparaît comme une étonnante approximation de mo.

L'intérêt d'utiliser cette fonction est évident : elle est tout à fait indépendante des seuils, elle présente un maximum local relativement large qui permet d'utiliser des algorithmes rapides d'optimisation (Fibonacci, section dorée en monovariable, sphéra en multivariables) sans avoir à représenter tout le diagramme des valeurs propres qui d'ailleurs offre un moyen d'estimation "visuelle" de mo extrêmement imprécis (fig. 2).

On remarquera que cette méthode d'estimation de m est intimement liée à la façon de modéliser le problème de la détection des sources. En effet, le seul cas où une erreur sur mo apparaît comme équivalente à l'apparition des sources parasites est celui où le modèle de propagation est inconnu et donc les vecteurs $\vec{d}_{ci}$ peuvent avoir n'importe quelle forme.

Enfin, il y aurait beaucoup à dire sur les familles {Jm} avec lesquelles la méthode proposée est valable : il est certain qu'il doit exister une certaine "organisation" dans les paramètres pour qu'un algorithme d'optimisation soit utilisable. D'autre part, il ne faut pas que cette famille soit trop "riche" : pour prendre un cas extrême, si Jm est capable de modéliser $\hat{\Gamma}$, la méthode est évidemment inapplicable.

4. CONCLUSION

Il a été proposé une méthode pratique d'estimation de la matrice de cohérence spatiale du bruit de fond lorsqu'elle fait partie d'une famille à priori dépendant d'un petit nombre de paramètres.

On a montré comment le problème était intimement lié au problème de la détection des sources par les valeurs propres de la matrice interspectrale.

REFERENCES

[1] W.S. LIGGETT, "Passive Sonar : Fitting models to multiple time series" Proceed. of NATO ASI on signal processing, Loughborough (U.K.) August 1972, Academic Press Editor, pp 327-345

[2] G. BIENVENU, L. KOPP, "Adaptive high resolution passive methods" in proceedings of EUSIPCO 80 conf pp 715-721

[3] G. BIENVENU, L. KOPP " Optimality of the spectral matrix eigensystem in underwater passive listening", To be published in IEEE ASSP Trans.

[4] H. MERMOZ, "Imagerie, Corrélation et modèles" Annales Télécom. 31, n°1-2, Jan Fev 1976 pp 17-36

[5] G. BIENVENU, L. KOPP, "Adaptivity to background noise spatial coherence for high resolution methods" proc. ICASSP 80 pp 307-310

[6] E.M. ARASE, T. ARASE, "Corrélation of ambient sea noise" JASA, 40, 1 July 1966 pp 205-210

[7] B.F. CRON, C.H. SHERMAN "Spatial correlation functions for various noise models" JASA, 34, 11, 1962, pp 1732-1736

[8] H. AKAIKE "A new look at the statistical model identification" IEEE Trans on Automatic Conrol AC 19, pp 716-723 Dec. 1974

[9] G. VEZZOSI, P. NICOLAS "Séparation de fronts d'ondes corrélés", Actes du Gretsi 1983 Nice 16-20 Mai 1983.