NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

SEPARATION DES SOURCES DANS LE CAS DE SIGNAUX BRUITES A BRUITS DECORRELES

B. LUMEAU et H. CLERGEOT

LABORATOIRE DES SIGNAUX ET SYSTEMES - C.N.R.S.-E.S.E., Plateau du Moulon, 91190 GIF-SUR-YVETTE

RESUME

Dans les techniques de localisation spatiale, nous sommes amenés à estimer les matrices de densité spectrale à partir des signaux bruités. Nous nous plaçons dans l'hypothèse de bruits décorrélés (mais pas nécessairement de même variance). Dans ce cas la matrice de bruit est diagonale et les éléments non diagonaux de la matrice interspectrale sont non biaisés ; nous montrons qu'ils peuvent suffire à déterminer le rang et à estimer la matrice non bruitée $[\gamma_o(\nu)]$.

Pour obtenir une normalisation de la variance des éléments de la matrice, cette estimation est faite à partir de la matrice de cohérence. La détermination de la matrice $[C_o(\nu)]$, correspondant à $[\gamma_o(\nu)]$ compte tenu de la normalisation, est alors obtenue par un algorithme utilisant un critère de moindres carrés portant sur les éléments non diagonaux seulement.

Pour initialiser l'algorithme précédent nous proposons une méthode approchée, qui permet également d'obtenir une évaluation par défaut du rang de $[C_o(\nu)]$ et d'établir une condition suffisante d'unicité de la solution.

SUMMARY

Spatial localization techniques involve the estimation of spectral density matrices from noisy signals. We consider the assumption of uncorrelated noises (but not necessarily of the same variance). In this case the noise matrix is diagonal and the off-diagonal elements of the interspectral matrix are unbiased ; we show that they can be sufficient to determine the rank and to estimate the noise-free matrix $[\gamma_o(\nu)]$.

In order to normalize the variance of the matrix elements this estimation is based on the coherence matrix. The determination of the matrix $[C_o(\nu)]$, corresponding to $[\gamma_o(\nu)]$ after the normalization, is then obtained with an algorithm which uses a least squares criterion concerning only the off-diagonal elements.

An approximate method is proposed to initialize the algorithm. This method enables an evaluation of the rank of $[C_o(\nu)]$ by default and a sufficient condition to be established for the uniqueness of the solution.

1. INTRODUCTION

1.1. Généralités

Un des problèmes posés par l'électroencéphalographie est la détermination et la localisation, en particulier en pathologie humaine, du nombre de sources résultant d'activités neuronales très spécifiques [1]. Dans ce travail nous utilisons une approche, déjà introduite par Mermoz [2] dans le contexte de l'imagerie, tirant avantage de la décorrélation entre les signaux sources à identifier. Le but est d'obtenir, d'après la matrice interspectrale formée à partir de la sortie de K capteurs, le maximum d'information avant d'utiliser explicitement un modèle de propagation.

Dans les quelques applications fructueuses déjà obtenues en géophysique et en acoustique sous-marine [3-5] le bruit est considéré comme blanc, de même puissance sur les différents capteurs, ou négligeable. Ces hypothèses ne peuvent pas être retenues dans notre étude : le rapport signal à bruit étant, en particulier, très faible.

1.2. Position du problème

Dans les travaux antérieurs [1] nous disposions d'une référence pour estimer la matrice de bruit. Les signaux considérés étant faiblement stationnaires cette référence n'est pas optimale. Par contre, l'expérience nous a montré que l'hypothèse de décorrélation entre les bruits (ces bruits n'étant pas nécessairement de même variance) des différents capteurs était assez bien vérifiée.

Ceci nous a conduit à nous interroger sur la possibilité de déterminer le rang r_o et une estimée de la matrice interspectrale relative aux sources $[\gamma_o]$ à partir des interspectres.

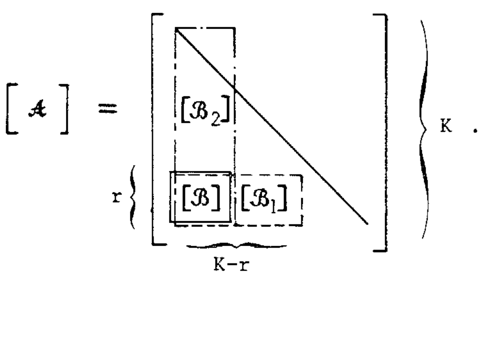
Une réponse est donnée à ce problème au paragraphe 2. Le problème pratique d'estimation de la matrice $[\gamma_o]$, à partir d'une matrice biaisée et bruitée, est discuté au paragraphe 3 et exposé en détail au paragraphe 4. La solution est envisagée aux paragraphes 5 et 6.

2. PERTINENCE DU PROBLEME POSE

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il est possible, avec certaines hypothèses, de déterminer une matrice $[\mathcal{A}]$ uniquement à partir de ses éléments non diagonaux.

Nous allons démontrer une condition suffisante pour l'unicité de la solution avec des hypothèses liées à l'ordre K et au rang r_o de la matrice $[\mathcal{A}]$.

Pour ce faire, considérons une sous-matrice carrée $[\mathcal{B}]$, d'ordre $r < K/2$, de $[\mathcal{A}]$ ne comportant aucun élément diagonal de celle-ci. Nous désignons par $[\mathcal{B}_1]$ la sous-matrice formée à partir de $[\mathcal{B}]$ en lui rajoutant les (K-2r) vecteurs colonnes à r composantes de $[\mathcal{A}]$ ne comportant pas d'élément diagonal, et par $[\mathcal{B}_2]$ la sous-matrice formée en rajoutant à $[\mathcal{B}]$ (K-r) vecteurs lignes à r composantes. En permutant les lignes ou les colonnes, on peut toujours placer $[\mathcal{B}]$, $[\mathcal{B}_1]$ et $[\mathcal{B}_2]$ dans la position indiquée ci-après :


(1)

2.1. Théorème

Soient, une matrice carrée $[\mathcal{A}]$ d'ordre K et de rang $r_o < K/2$, une sous-matrice principale $[\mathcal{B}]$ et deux sous-matrices $[\mathcal{B}_1]$ et $[\mathcal{B}_2]$ définies comme indiqué ci-dessus.

Si l'on peut déterminer ces trois sous-matrices de telle sorte que les sous-matrices, formées en enlevant à $[\mathcal{B}_1]$ l'un quelconque des vecteurs colonnes de $[\mathcal{B}]$ ou en enlevant à $[\mathcal{B}_2]$ l'un quelconque des vecteurs lignes de $[\mathcal{B}]$, restent de rang r_o, la matrice $[\mathcal{A}]$ est déterminée de façon unique à partir de ses éléments non diagonaux.

2.2. Démonstration

Nous désignons par $\underline{V}_i$ un vecteur colonne de la matrice $[\mathcal{A}]$ et par $\underline{W}_i$ le vecteur formé par les r_o dernières composantes de $\underline{V}_i$. D'après les hypothèses du théorème, il existe toujours un indice k tel que :

$$r_o < k \leq K - r_o . \tag{2}$$

Considérons le vecteur $\underline{V}_k$, la matrice $[\mathcal{A}]$ étant de rang r_o, il existe r_o coefficients tels que :

$$\underline{V}_k = \sum_{j=1}^{r_o} \zeta_j \underline{V}_j , \tag{3}$$

ceci entraîne pour le vecteur $\underline{W}_k$:

$$\underline{W}_k = \sum_{j=1}^{r_o} \zeta_j \underline{W}_j . \tag{4}$$

Par suite, la matrice $[\mathcal{B}]$ étant régulière par hypothèse, $\underline{W}_k$ est déterminé de façon unique comme combinaison linéaire des $\underline{W}_j$ par la relation :

$$\underline{\zeta}_k = [\mathcal{B}]^{-1} \underline{W}_k . \tag{5}$$

Pour les valeurs choisies de l'indice k la matrice $[\mathcal{B}]$ et le vecteur $\underline{W}_k$ ne comportent que des éléments non diagonaux, ce qui permet de déterminer le vecteur paramètre sans faire intervenir les éléments inconnus de $[\mathcal{A}]$.

L'élément a_{kk} de la matrice $[\mathcal{A}]$ est alors déterminé directement par la relation :

$$a_{kk} = \sum_{j=1}^{r_o} \zeta_j a_{kj} . \tag{6}$$

En faisant varier k, nous obtenons ainsi les éléments diagonaux de $[\mathcal{A}]$ pour $r_o < k \leq K - r_o$.

Considérons un vecteur $\underline{V}_h$ avec $h \in [1,r_o]$. D'après l'hypothèse faite sur $[\mathcal{B}_1]$, il existe r_o vecteurs colonnes de $[\mathcal{B}_1]$, différents de $\underline{W}_h$, linéairement indépendants. Soit $\{\underline{W}_j\}$ l'ensemble de ces vecteurs, $j \in \Omega$ et Ω étant l'ensemble des r_o indices différents tels que $\Omega \subset \{[1,(h-1)] \cup [(h+1),(K-r_o)]\}$. Le vecteur $\underline{W}_h$ peut donc s'exprimer sous la forme :

$$\underline{W}_h = \sum_{j \in \Omega} \eta_j \underline{W}_j . \tag{7}$$

Les coefficients $\{\eta_j\}$ et les éléments $\{a_{hh}\}$ sont déterminés par des relations analogues à (5) et (6), dans lesquelles les vecteurs $\{\underline{W}_j\}$ remplacent les vecteurs colonnes de la matrice $[\mathcal{B}]$.

En conclusion, nous avons déterminé de façon unique les éléments diagonaux $\{a_{kk}\}$ pour $k \in [1,(K-r_o)]$ à partir des éléments non diagonaux de la matrice $[\mathcal{A}]$.

Remarquons que les éléments de la matrice $[\mathcal{B}_2]$ sont tous déterminés. Le calcul des éléments diagonaux $\{a_{ii}\}$ de la matrice $[\mathcal{A}]$, $i \in](K-r_o),K]$, se fera, comme pour le calcul des éléments diagonaux d'indice h, $h \in [1,r_o]$, en raisonnant sur les vecteurs lignes au lieu des vecteurs colonnes et sur la matrice $[\mathcal{B}_2]$ au lieu de la matrice $[\mathcal{B}_1]$.

3. PROBLEME PRATIQUE LIE A L'ESTIMATION DE LA MATRICE $[\gamma_o]$ A PARTIR D'UNE MATRICE $[\hat{\gamma}]$ BRUITEE ET BIAISEE

En pratique, du fait du bruit et du biais sur $[\hat{\gamma}]$, même si $[\gamma_o]$ est rigoureusement de rang r_o et si les bruits sont parfaitement décorrélés, les éléments non diagonaux de $[\hat{\gamma}]$ sont différents de ceux de $[\gamma_o]$. Donc, on ne peut pas affirmer qu'il existe une matrice de rang r_o dont les éléments non diagonaux sont rigoureusement identiques à ceux de $[\hat{\gamma}]$.

Ainsi, les conditions d'application du théorème et de la méthode utilisée pour la démonstration ne sont pas remplies. Nous avons donc envisagé de rechercher une estimée $[\hat{\gamma}_o]$ de la matrice interspectrale non bruitée comme étant la matrice de rang r_o qui minimise un critère quadratique portant sur la différence des termes non diagonaux de $[\hat{\gamma}]$ et de $[\hat{\gamma}_o]$.

La variance sur les termes de l'estimée $[\hat{\gamma}]$ étant d'après [6] :

$$E[|\delta\hat{\gamma}_{ij}|^2] = \frac{1}{L_e}\,[\gamma_{ii}\gamma_{jj}], \tag{8}$$

il est logique d'utiliser le critère de moindres carrés pondérés :

$$D = \sum_{i\neq j}\left[\frac{\hat{\gamma}_{o_{ij}} - \hat{\gamma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\gamma}_{ii}\hat{\gamma}_{jj}}}\right]^2, \tag{9}$$

ou, de façon équivalente, la grandeur D normalisée de manière à faire apparaître une erreur relative :

$$\varepsilon = \frac{D}{\sum_{i\neq j}\left[\frac{\hat{\gamma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\gamma}_{ii}\hat{\gamma}_{jj}}}\right]^2}\,. \tag{10}$$

La forme du critère, introduit en (10), nous conduit à raisonner sur la matrice de cohérence $[\hat{C}]$ associée à la matrice $[\hat{\gamma}]$, matrice dans laquelle l'élément $C_{\ell k}$ est défini par la relation :

$$C_{\ell k} = \frac{\gamma_{\ell k}}{\sqrt{\gamma_{\ell\ell}\gamma_{kk}}}\,. \tag{11}$$

Nous allons, dans le paragraphe suivant, formaliser la méthode envisagée.

4. FORMULATION MATHEMATIQUE DE LA METHODE - LIEN AVEC LA DIAGONALISATION

4.1. Formulation mathématique

Soient $\{[Rr]\}$ l'ensemble des matrices définies non négatives de rang $\leq r$ et $[\hat{C}]$ la matrice de cohérence estimée. Nous cherchons dans la famille $\{[Rr]\}$ la matrice $[Rrm]$ qui minimise le critère :

$$\varepsilon_r = \frac{\sum_{i\neq j}|Rr_{ij}-\hat{C}_{ij}|^2}{\sum_{i\neq j}|\hat{C}_{ij}|^2}\,. \tag{12}$$

Soit ε_{rm} le minimum de ε_r pour r donné. De façon évidente, ε_{rm} vérifie les propriétés suivantes :

a) $\varepsilon_{rm} \leq 1$,

b) $\varepsilon_{rm} \leq \varepsilon_{r'm}$ si $r > r'$, (13)

c) $\varepsilon_{Km} = 0$.

De plus, si la matrice $[\gamma_o]$ est de rang r_o, pour $r > r_o$, ε_{rm} ne correspond plus qu'aux termes de biais et de variance sur les éléments non diagonaux de la matrice $[\hat{C}]$. Par suite, ε_{rm} doit être petit devant un. Un majorant de ε_{rm} est donné par la valeur de ε_r lorsqu'on substitue à la matrice $[Rr]$ la matrice $[\gamma_o]$ normalisée qui est bien de rang $\leq r$. Si on néglige le terme de biais, la valeur de ce majorant est donnée par :

$$\varepsilon_{r[\gamma_o]} = \frac{\sum_{i\neq j}\frac{1}{L_e}}{\sum_{i\neq j}|\hat{C}_{ij}|^2} \tag{14}$$

que l'on peut noter symboliquement :

$$\varepsilon_{r[\gamma_o]} = \frac{1}{L_e|\hat{C}_{ij}|^2}\,. \tag{15}$$

La méthode générale sera donc la suivante : recherche, par valeur croissante de r, de la suite des $\{\varepsilon_{rm}\}$, le rang r_o choisi correspondra à la plus faible valeur de r pour laquelle ε_r devient de l'ordre de $\varepsilon_{r[\gamma_o]}$.

Soit $[Rr_o]$ la matrice qui correspond au minimum ε_{rm} de l'ordre de $\varepsilon_{r[\gamma_o]}$; dans ces conditions, la matrice $[\gamma_o]$ sera estimée par la matrice $[\hat{\gamma}_o]$ d'éléments :

$$\hat{\gamma}_{o_{ij}} = \sqrt{\hat{\gamma}_{ii}\hat{\gamma}_{jj}}\,Rr_{o_{ij}}\,. \tag{16}$$

4.2. Lien avec la diagonalisation de $[\hat{\gamma}]$

Dans le cas où l'on utilise tous les éléments de la matrice $[\hat{\gamma}]$, la recherche du sous-espace source pourrait se faire en cherchant la matrice $[Rr]$ qui minimise un critère ε'_r analogue à ε_r, la sommation portant ici sur toutes les valeurs de i et de j. Le critère ε'_r peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon'_r = \frac{\mathrm{tr}\{[Rr]-[\hat{C}]\}^2}{\mathrm{tr}[\hat{C}]^2}\,. \tag{17}$$

La solution de ce problème est triviale. Soient $\{\lambda_i\}$ les valeurs propres de $[\hat{C}]$ classées par ordre décroissant et $\{\underline{W}_i\}$ les vecteurs propres correspondants. Nous obtenons successivement :

$$[Rrm] = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\,\underline{W}_i\,\underline{W}_i^{\dagger} \tag{18}$$

et

$$\varepsilon'_{rm} = \frac{\sum_{i=r+1}^{K}\lambda_i^2}{\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^2}\,. \tag{19}$$

Nous retrouvons ainsi la méthode consistant à sélectionner les plus grandes valeurs propres. Le choix du critère ε_r que nous avons fait, justifie le fait de diagonaliser $[\hat{C}]$, comme nous l'avons proposé dans [1], et non pas directement $[\hat{\gamma}]$.

5. ALGORITHME UTILISE POUR LA RECHERCHE DU MINIMUM DU CRITERE

Une matrice variance de rang r peut toujours se factoriser sous la forme d'un produit de deux matrices $(K\times r)$:

$$[Rr] = \underbrace{[Mr]}_{r}\underbrace{[Mr]^{\dagger}}_{K}\,. \tag{20}$$

Nous allons chercher à nous rapprocher du minimum de ε_r par un algorithme analogue à celui du gradient sur les éléments de la matrice [Mr].

A cette fin, calculons la différentielle $d\varepsilon_r$ du critère ε_r, donné en (12), qui sera nulle au minimum :

$$d\varepsilon_r = \frac{\sum\limits_{i\neq j} (Rr_{ij}-\hat{C}_{ij})dRr^*_{ij}+(Rr^*_{ji}-\hat{C}^*_{ji})dRr_{ji}}{\sum\limits_{i\neq j} |\hat{C}_{ij}|^2} . \quad (21)$$

Compte tenu du caractère hermitique des matrices [Rr] et [$\hat{C}$] nous avons :

$$d\varepsilon_r = \frac{2\sum\limits_{i\neq j} (Rr_{ij}-\hat{C}_{ij})dRr_{ji}}{\sum\limits_{i\neq j} |\hat{C}_{ij}|^2} . \quad (22)$$

Définissons la matrice $[\mathcal{D}]$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{ii} = 0, \\ \mathcal{D}_{ij} = R_{ij}-\hat{C}_{ij} \quad \text{pour} \quad i \neq j, \end{cases}$$

et raisonnons sur le numérateur Dr de ε_r (pour alléger les notations). D'après (22) et (23) nous obtenons :

$$dDr = 2tr\{[\mathcal{D}]d[Rr]\}. \quad (24)$$

Or d'après (20) :

$$d[Rr] = [Mr]d[Mr]^{\dagger}+d[Mr][Mr]^{\dagger}, \quad (25)$$

ce qui conduit à la relation :

$$dDr = 2tr\{[\mathcal{D}][Mr]d[Mr]^{\dagger}\}+2tr\{[\mathcal{D}]d[Mr][Mr]^{\dagger}\}. \quad (26)$$

Ainsi, la différentielle dDr et, par suite, la différentielle $d\varepsilon_r$ seront nulles si :

$$[\mathcal{D}][Mr] = [0]. \quad (27)$$

Pour trouver le minimum défini par (27), formons un algorithme du type gradient tel que :

$$[\delta Mr] = -\mu[\mathcal{D}][Mr] \quad \text{avec } 0 < \mu << 1. \quad (28)$$

Pour μ suffisamment petit, l'accroissement δDr de Dr peut être assimilé à sa différentielle et ainsi nous avons d'après (27) et (28) :

$$\delta Dr = -4\mu tr\{[\mathcal{D}][Mr][Mr]^{\dagger}[\mathcal{D}]^{\dagger}\}. \quad (29)$$

Or, la trace de $\{[\mathcal{D}][Mr][Mr]^{\dagger}[\mathcal{D}]^{\dagger}\}$ représente la somme des carrés des modules des éléments de la matrice $[\mathcal{D}][Mr]$. Elle est donc positive ou nulle. Elle ne peut être nulle que si tous les éléments de la matrice $[\mathcal{D}][Mr]$ sont nuls ; donc si on se trouve à un extrêmum de Dr, ou de façon équivalente, à un extrêmum de ε_r.

Ce résultat satisfait la relation (28) ; ainsi, nous pouvons définir notre algorithme pour une suite de matrices $\{[Mr_k]\}$ par :

$$[Mr_{k+1}] = [Mr_k]-\mu_k[\mathcal{D}_k][Mr_k]. \quad (30)$$

Si nous considérons la suite correspondante des valeurs Dr_k du critère, nous obtenons pour μ_k suffisamment petit et d'après (29) :

$$Dr_{k+1}-Dr_k = -4\mu_k tr\{[\mathcal{D}_k][Mr_k][Mr_k]^{\dagger}[\mathcal{D}_k]^{\dagger}\}. \quad (31)$$

Cette variation sera négative tant que la matrice $[\mathcal{D}_k][Mr_k]$ ne se réduit pas à la matrice nulle. Les valeurs $\{D_k\}$ du critère forment donc une suite décroissante qui converge vers un minimum local de Dr ou de ε_r ; ce que nous recherchions.

Ici nous n'envisagerons pas le problème de l'unicité d'un tel minimum local, ni celui de l'unicité de [Mr] pour un minimum donné de ε_r.

6. SOLUTION APPROCHEE POUR INITIALISER L'ALGORITHME

Pour la recherche de la matrice $[Mr_o]$, dont l'obtention est nécessaire pour obtenir $[\hat{Y}_o]$, l'algorithme (30), décrit au paragraphe 5, devrait être mis en oeuvre pour toutes les valeurs de r avec r $\in$ [1,K/2[. De plus, faute d'avoir démontré l'unicité du minimum local de Dr, l'algorithme risque de converger vers une valeur erronée si les conditions initiales sont mauvaises.

Pour ces raisons, nous avons envisagé une méthode simplifiée, dérivée de la méthode utilisée pour la démonstration du théorème au paragraphe 2, qui nous servira à estimer, par valeur inférieure, l'ordre de grandeur du rang.

6.1. Factorisation de la matrice [$\hat{C}$]

La matrice [$\hat{C}$], étant définie non négative, peut se décomposer de façon unique sous la forme d'un produit de matrices triangulaires avec éléments positifs sur la diagonale. Dans le cas d'une matrice de rang r inférieur à l'ordre K, cette décomposition prend la forme :

$$[\hat{C}] = \begin{bmatrix} \overbrace{[P_1]=[A][A]^{\dagger}}^{r} & [P_2]=[A][B]^{\dagger} \\ [P_3]=[B][A]^{\dagger} & [P_4]=[B][B]^{\dagger} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} [A] & [0] \end{matrix} \\ [B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} [0] & [A]^{\dagger} \end{matrix} & [B]^{\dagger} \end{bmatrix} . \quad (32)$$

Les éléments non diagonaux de [$\hat{C}$] étant connus, il suffit de déterminer les r premiers éléments diagonaux pour que la matrice soit complètement définie.

En effet, le bloc $[P_1]$ est alors connu et, par un algorithme classique, on peut le décomposer en un produit tel que :

$$[P_1] = [A][A]^{\dagger}. \quad (33)$$

Ainsi le bloc [B] est déterminé par la relation :

$$[B] = [P_3][A^{\dagger}]^{-1}, \quad (34)$$

ce qui permet de calculer les éléments diagonaux manquants de [$\hat{C}$] à partir du produit matriciel :

$$[P_4] = [B][B]^{\dagger}. \quad (35)$$

Les r premiers éléments diagonaux et le rang seront estimés en utilisant une méthode inspirée de celle développée au paragraphe 2.

6.2. Détermination du bloc diagonal $[P_1]$ et du rang de la matrice $[\hat{Y}_o]$

Nous désignons par $\{\underline{V}_j\}$ les vecteurs colonnes de [$\hat{C}$] et par $\{\underline{W}_j\}$ les vecteurs formés par les (K-r-1) dernières composantes des $\{\underline{V}_j\}$. Nous désignerons par $[\mathcal{B}]$ la matrice formée par les r vecteurs $\{\underline{W}_1,\underline{W}_2\ldots\underline{W}_r\}$.

En général, le vecteur $\underline{W}_{r+1}$ ne s'exprimera pas comme combinaison linéaire de $\{\underline{W}_1,\underline{W}_2\ldots\underline{W}_r\}$ du fait que la matrice [$\hat{C}$] est biaisée et bruitée. Nous définirons le vecteur $\tilde{\underline{W}}_{r+1}$ par :

$$\tilde{\underline{W}}_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} \zeta_j \underline{W}_j, \quad (36)$$

où les $\{\zeta_j\}$ sont déterminés en minimisant le critère :

$$\theta_r = \frac{|\underline{W}_{r+1} - \tilde{\underline{W}}_{r+1}|^2}{|\underline{W}_{r+1}|^2} \quad . \tag{37}$$

Si la matrice $[\mathcal{B}]$ est de rang r, le vecteur paramètre correspondant au minimum est donné par :

$$\tilde{\underline{\zeta}}_r = \{[\mathcal{B}][\mathcal{B}]\}^{-1}[\mathcal{B}]^{\dagger}\underline{W}_{r+1} . \tag{38}$$

En considérant la matrice $[\mathcal{B}]$ de rang r, les paramètres $\{\zeta_j\}$ sont les estimées des coefficients du $(r+1)^{\text{ième}}$ vecteur colonne de la matrice de cohérence non bruitée, en fonction des r premiers. Pour les indices de ligne {h}, où $h \leq r$, les éléments diagonaux C_{hh} seront donc estimés à partir de la relation :

$$\hat{C}_{h(r+1)} = \sum_{j \neq h}^{r} \tilde{\zeta}_j \, \hat{C}_{hj} + \tilde{\zeta}_h \, \tilde{\hat{C}}_{hh} \tag{39}$$

où l'on supposera que ζ_h est différent de zéro.

Pour une première estimation de l'ordre, on peut utiliser le critère θ_r, à la place du critère ε_r ; nous aurons ainsi une estimation par défaut. En effet, soient r_o le rang de $[\gamma_o]$, $r \leq r_o$ le rang de la sous-matrice $[\mathcal{B}]$ et, en l'absence de biais, $\underline{W}_{r+1}$ le vecteur colonne adjacent à la matrice $[\mathcal{B}]$. Dans ces conditions, nous voyons que le vecteur $E[\underline{W}_{r+1}]$ s'exprime exactement comme combinaison linéaire de $\{E[\underline{W}_1], E[\underline{W}_2], \ldots, E[\underline{W}_r]\}$ dès que r est supérieur à r_o et que, pour la matrice $[\hat{C}]$, ce critère se réduit au terme de bruit dont une estimation nous est fournie par :

$$\theta_{r_o} = \frac{1}{L_e \dfrac{1}{K-r-1} \displaystyle\sum_{h=r+1}^{K} |\hat{C}_{h(r+1)}|^2} \quad . \tag{40}$$

Ainsi, nous constatons que le rang, estimé à partir de ce critère, correspond bien à une estimation par défaut.

6.3. Classement préalable des capteurs

Le bloc $[P_1]$ de la matrice $[\hat{C}]$ étant déterminé comme indiqué au paragraphe précédent et les matrices [A] et [B], dont l'ensemble définit la matrice [Mr], étant calculées selon (33) et (34), nous remarquons que les matrices $[\hat{C}]$ et [Rr], $\{[Rr] = [M][M]^{\dagger}\}$, ne diffèrent que par le bloc $[P_4]$, $\{[P_4] = [B][B]^{\dagger}\}$.

La matrice [Rr] étant déterminée entièrement à partir des (r+1) premières colonnes de $[\hat{C}]$, nous avons intérêt à ordonner les lignes et les colonnes de façon à grouper dans ces colonnes les éléments pour lesquels le coefficient de cohérence est le plus grand.

Pour ce classement il suffit, par exemple, de s'intéresser à la sous-matrice inférieure et de :

- rechercher dans cette sous-matrice le coefficient de cohérence maximum $\hat{C}_{mn}$ et positionner cet élément sur la ligne K de la colonne 1,

- réordonner les indices de la matrice $[\hat{C}]$ à l'aide d'un tableau intermédiaire IND(k) (initialisé à IND(k) = k) tel que :

a) IND(K) = m

b) IND(1) = n

$$\left.\begin{array}{l} \text{c) } k \in \{2,n\} \Rightarrow \text{IND}(k) = \text{IND}(k)-1 \\ \text{d) } k \in \{m,K-1\} \Rightarrow \text{IND}(k) = \text{IND}(k)+1 \end{array}\right\} \text{car } m > n$$

- déterminer les coefficients $\{\alpha_k\}$ tels que :

$$\alpha(k) = \frac{\hat{C}(K,k)}{\hat{C}(K,1)}, \text{ avec } k \in \{2,K\},$$

afin de définir les éléments $\hat{Q}_{mn}$ d'une matrice $[\hat{Q}]$ déduite de $[\hat{C}]$ par la relation :

$$\hat{Q}(\text{IND}(\ell),\text{IND}(k)) = \hat{C}(\text{IND}(\ell),\text{IND}(k)) - \alpha(k)\hat{C}(\text{IND}(\ell),\text{IND}(1))$$

$$\text{avec } \begin{cases} k \in \{2,K\} \\ \ell \in \{k+1,K\} \end{cases}$$

- rechercher dans les éléments de cette matrice $[\hat{Q}]$ le maximum et positionner cet élément sur la ligne K-1 de la colonne 2,

- réordonner les indices ...,

- générer à l'aide du tableau des indices la matrice $[\hat{C}]$ assurant le meilleur classement des coefficients de cohérence.

Le passage par l'intermédiaire de la matrice $[\hat{Q}]$ se justifie par le fait qu'il est nécessaire de s'assurer que la grandeur des coefficients de cohérence ne résulte pas de la proportionalité de deux colonnes (ou de deux lignes) de la matrice $[\hat{C}]$.

7. CONCLUSION

La contribution de ce travail dans le domaine de la localisation spatiale est importante par le fait qu'elle élargit la portée des méthodes existantes au cas de signaux fortement bruités et pour lesquels la seule information faite a priori est la décorrélation des bruits.

Dans la méthode proposée nous montrons, d'une part qu'il y a un lien direct entre le critère retenu (12) pour estimer le rang de la matrice interspectrale non bruitée et la diagonalisation, et d'autre part, qu'il existe une condition suffisante d'unicité qui permet d'estimer par défaut le rang de cette matrice et d'initialiser l'algorithme permettant de minimiser le critère (12).

REFERENCES

[1] B.LUMEAU, "Identification de sources d'activités cérébrales", Thèse de Docteur-Ingénieur, Orsay, 1980.

[2] H.MERMOZ, "Imagerie, corrélations et modèles, Annales des Télécommunications, vol.31, n°1-2, Janvier-Février 1976, p. 17-36.

[3] F.GLANCEAUD et al., "Identification d'ondes UBF dans la magnétosphère en utilisant la matrice interspectrale", Annales des Télécommunications, vol.34, n° 3-4, Mars-Avril 1979, p. 243-248.

[4] J.L.LACOUME et al., "Caractérisation par analyse interspectrale du champ d'ondes reçu sur un réseau de capteurs. Applications", Colloque National sur le Traitement du Signal et ses Applications, Nice, France, 28 Mai-2 Juin 1979, p. 80-1/80-7.

[5] G.BIENVENUE et D.PILLON, "Méthodes de haute résolution en écoute passive", Colloque National sur le Traitement du Signal et ses Applications, Nice France, 1-5 Juin 1981, p. 341-347.

[6] B.LUMEAU et H.CLERGEOT, "Spatial localization - Spectral matrix bias and variance - Effects on the source subspace", Signal Processing, vol.4, n° 2-3, Avril 1982, p. 103-123.