NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

ETUDE THEORIQUE DE L'EQUATION DE RICCATI DISCRETE ET IMPLANTATION D'ALGORITHMES DE CALCUL DU GAIN DE KALMAN SUR DIFFERENTS PROCESSEURS.

Alain GIULIERI

Laboratoire L.A.I.A.T. - Université de TOULON
83130 LA GARDE

RESUME

Cet article complète sur les plans théorique et expérimental les travaux présentés aux précédents colloques du GRETSI. L'étude de l'équation de RICCATI est abordée par une approche géométrique en démontrant l'existence et l'unicité d'une solution définie positive de cette équation en relation avec les critères de stabilisabilité, de commandabilité et d'observabilité des systèmes dynamiques. De plus on présente les résultats expérimentaux de l'implantation d'algorithmes de calcul du gain de KALMAN optimal sur le micro-processeur 68000 de Motorola ainsi que sur un processeur spécialisé à base de micro-processeurs en tranches de la famille AMD 2900.

SUMMARY

The purpose of this note is to point out the well known existence and uniqueness conditions of the solution of the discrete RICCATI equation, related to Q-controllability, R-observability and stabilizability criteria by using the cone theory. Added to this, experimental results of implementation of optimal KALMAN gain computing algorithms in Motorola 68000 microprocessor and AMD 2900 family bit slice microprocessor will be found.

ETUDE THEORIQUE DE L'EQUATION DE RICCATI DISCRETE ET IMPLANTATION D'ALGORITHMES DE CALCUL DU GAIN DE KALMAN SUR DIFFERENTS PROCESSEURS.

1. - INTRODUCTION

Dans de nombreux problèmes de filtrage, il est nécessaire de connaître le gain de KALMAN optimal K associé à un système dynamique décrit par le quadruplet (ϕ, H, Q, R) tel que :

dim ϕ = n x n (matrice de transition)

dim H = m x n (matrice d'observation)

dim Q = n x n (matrice de covariance de bruit de commande)

dim R = m x m (matrice de covariance de bruit de mesure)

Le gain est donné par la relation

(1) $$K = PH^T (HPH^T + R)^{-1}$$

la matrice P étant solution de l'équation matricielle discrète de RICCATI

(2) $$P = \phi P \phi^T - \phi PH^T (HPH^T + R)^{-1} H P \phi^T + Q$$

Classiquement cette équation est résolue numériquement de façon itérative par les équations

(3) $$P_{k+1/k} = \phi P_{k/k} \phi^T + Q$$
$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - P_{k/k-1} H^T (HP_{k/k-1} H^T + R)^{-1} HP_{k/k-1}$$

Dans ce qui suit va être présentée une étude géométrique de l'existence de la solution de l'équation (2) et de la convergence des équations (3), puis nous présenterons les résultats de l'implantation d'algorithmes de résolution de cette équation sur le microprocesseur 68 000 et sur un processeur à base de microprocesseurs en tranche de la famille AMD 2900.

2. - ETUDE DE L'EQUATION DE RICCATI

2.1 - Notations :

$P > 0$ la matrice P est définie positive

$P \geqslant 0$ la matrice P est semi définie positive

$P_1 > P_2$ la matrice $P_1 - P_2$ est définie positive.

2.2 - Matrices d'information et de commandabilité :

Les propriétés de l'équation (2) sont liées à celles des matrices d'observabilité (ou d'information) F (k,0) et de commandabilité C (k,0) définies par :

$$F(k,0) \triangleq \sum_{i=0}^{k-1} \phi^{-iT} H^T R H \phi^{-i}$$

et $$C(k,0) \triangleq \sum_{i=0}^{k-1} \phi^i Q \phi^{iT}$$

De ces matrices se déduisent les critères de R-observabilité et de Q-commandabilité introduits par KALMAN :

- R-observabilité

Le système dynamique décrit par le quadruplet (ϕ, H, Q, R) est complètement observable si et seulement si

$$F(k,0) > 0 \quad \text{pour tout} \quad k > 0$$

- Q-commandabilité

Le système dynamique est complètement commandable si et seulement si

$$C(k,0) > 0 \quad \text{pour tout} \quad k > 0$$

2.3 - Etude mathématique préliminaire.

Soit B l'espace de BANACH des matrices réelles symétriques de dimension n x n et soit K le cône des matrices définies non négatives dans B. L'équation (3) est de la forme

(4) $$P_{k+1/k} = f(P_{k/k-1})$$

où f est un opérateur transformant B en B et qui peut se décomposer en produit de deux opérateurs :

$$f(P) = \xi\, \psi(P)$$

avec $\psi(P) = P - PH^T (HPH^T + R)^{-1} HP = (P^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1}$

et $\xi(P) = \phi P \phi^T + Q$

2.3.1 - Propriétés de l'opérateur ψ

- l'opérateur ψ est positif :

si $P \in K$, P se décompose en $P = S.S^T$

et $\psi(P) = S\,(1 + S H^T R^{-1} HS^T)^{-1} S^T > 0$

- l'opérateur ψ est monotone :

Pour démontrer que ψ est monotone, il suffit de démontrer que la dérivée de $\psi(P + \varepsilon\Delta)$ existe et appartient au cône K en respectant les conditions d'existence de $P + \varepsilon\Delta$: $(P, \Delta \in K)$

$$\psi(P + \varepsilon\Delta) - \psi(P) = \varepsilon\Delta - \varepsilon\Delta H^T (R + HPH^T + \varepsilon H\Delta H^T)^{-1} HP$$
$$- \varepsilon PH^T (R + HPH^T + \varepsilon H\Delta H^T)^{-1} H\Delta$$
$$+ PH^T (HPH^T + R)^{-1} HP - PH^T (R + HPH^T + \varepsilon H\Delta H^T)^{-1} HP + 0(\varepsilon)$$

Pour un ε suffisamment petit

$$(R + HPH^T + \varepsilon H\Delta H^T)^{-1} = (R + HPH^T)^{-1} (1 + \varepsilon H\Delta H^T (R + HPH^T)^{-1})^{-1} + 0(\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\psi(P + \varepsilon\Delta) - \psi(P)}{\varepsilon}$$

$$= (1 - H^T (HPH^T + R^{-1}) HP)^T \Delta (1 - H^T (HPH^T + R)^{-1} HP)$$

c'est-à-dire $\dfrac{d\psi(P + \varepsilon\Delta)}{d\varepsilon} \in K$

- Pour tout $P \in K$ il existe $\alpha \in (0,1)$ tel que $\psi(P) > \alpha P$

en effet $\psi(P) - \alpha P = S\,|(1 + SH R^{-1} H^T S^T)^{-1} - \alpha 1|\, S^T$

La matrice $(1 + SH R^{-1} H^T S^T)^{-1}$ étant à l'intérieur du cône K, la matrice entre crochets est définie positive pour un α suffisamment petit.

- Si P et $Q \in K$, et $\alpha \in (0,1)$, il existe un nombre $\mu > 0$ tel que

$$\psi(\alpha P + \mu Q) > \alpha\, \psi(P) + \mu Q/2$$

La démonstration de cette propriété se fait en imposant que l'expression

$$\psi(\alpha P + \mu Q) - \alpha\,\psi(P) - \mu Q/2$$

soit définie non négative, ce qui est le cas pour un μ suffisamment petit.

2.3.2 - Propriétés de l'opérateur ξ

- l'opérateur ξ est positif :

si $P \in K$ alors $\phi P \phi^T + Q \in K$

- l'opérateur ξ est monotone :

La démonstration est de même type que celle pour l'opérateur ψ :

$$\xi(P + \varepsilon\Delta) - \xi(P) = \varepsilon\,\phi\,\Delta\,\phi^T$$

donc $\dfrac{d\xi(P+\varepsilon\Delta)}{d\varepsilon} \in K$

2.4 - Existence de la solution.

2.4.1 - La solution de (3) existe si et seulement si il existe un élément $\overline{P}$ K

tel que $f(\overline{P}) \leqslant \overline{P}$ avec $f(\overline{P}) \in K$

Cette propriété est la conséquence, dans la théorie des cônes, des propriétés de ψ et ξ qui sont positifs monotones continus.

2.4.2 - Si la solution de (3) existe et si $Q \neq 0$, alors la séquence des matrices (4) a une limite pour toute condition initiale $P_i \in K$:

Démonstration :

a) Il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\xi(P) \geqslant f(P) = \xi\,\psi(P) \geqslant \xi(\alpha P) \geqslant \alpha\xi(0)$$

Compte tenu des propriétés de f, ξ et ψ

$$\xi^i(P) \geqslant f^i(P) \geqslant \alpha\xi^i(0)$$

Il existe un nombre $\beta > 0$ tel que

$$\xi^i(P) = \xi^i(0) + \phi^i P \phi^{iT} \leqslant \beta\xi^i(0)$$

donc $\beta u_o \geqslant f^i(P) \geqslant \alpha u_o$

avec $u_o = \xi^i(0)$

b) Pour tout $P \in K$ il existe $\lambda \in (0,1)$ tel que :

$$f(\lambda P) = \xi\psi(\lambda P) \geqslant \xi(\lambda\psi(P)) \geqslant \lambda f(P) + \alpha_1\xi/0)$$

$$f^2(\lambda P) \geqslant \xi\psi(\lambda f(P) + \alpha_1\xi(0)) \geqslant \xi(\lambda\psi f(P) + \alpha_1\,\xi(0)/2)$$

$$\geqslant \lambda\xi\psi\, f(P) + \alpha_2\,\xi(0)$$

en répétant i fois il vient :

$$f^i(\lambda P) \geqslant \lambda f^i(P) + \alpha_i\,\xi(0)$$

c'est-à-dire $f^i(\lambda P) \geqslant \lambda f^i(P) + \dfrac{\alpha_i}{\beta}\, u_o$

$$f^i(\lambda P) \geqslant \lambda(1+\nu) f^i(P)$$

avec $\nu = \alpha_i/\beta\lambda > 0$

L'opérateur f^i qui a les propriétés a et b est donc u_o-concave. Dans la théorie des cônes, la solution est unique et les itérations convergent pour toute initialisation $P_i \in K$.

Remarque 1 : Si $Q \neq 0$, la matrice nulle ne peut pas être solution de (3)

Remarque 2 : $\xi^i(0) \in K$ pour tout $i > 0$ correspond au critère de Q-commandabilité puisque $C(k,0) = \xi^k(0)$.

Cette condition est implicite dans la démonstration précédente.

De plus au système décrit par les équations (3) correspond son système dual décrit par les équations:

$$\xi' = \phi^{-T}\,(P^{-1})\,\phi^{-1} + \phi^{-T} H^T R^{-1} H\,\phi^{-1}$$

$$\psi = ((P^{-1})^{-1} + Q)^{-1}$$

La matrice P étant définie positive, P^{-1} l'est aussi et donc $\xi'^i(0)$ doit être définie positive, ce qui est le critère de R-observabilité :

$$F(k,0) = \xi'^k(0)$$

Donc les critères de Q-commandabilité et de R-observabilité sont des critères nécessaires à l'existence d'une solution unique de l'équation de RICCATI.

Remarque 3 : Si l'équation $\xi(P) = P$ admet une solution $P_0 \in K$, c'est-à-dire si le système est stable, alors $f(P_0) \leqslant P_0$

Remarque 4 : L'équation (2) peut s'écrire (formulation de JOSEPH) sous la forme d'une équation de LIAPUNOV

$$P_{k+1} = \phi(1 - K_k H)\,P_k\,(1 - K_k H)^T\,\phi^T + Q + \phi K_k R K_k^T\,\phi^T$$

avec $K_k = P_k H^T\,(H P_k H^T + R)^{-1}$

La première équation converge si et seulement si le rayon spectrale $\sigma(\phi(1-KH))$ est plus petit que l'unité puisque $Q + \phi K R K^T \phi^T > 0$. On en déduit que si il est possible de trouver une matrice P_i, et par conséquent une matrice K_i, telle que $\sigma(\phi(1-K_iH)) < 1$, la solution $\overline{P}$ de l'équation

$$\xi_i(\overline{P}) = \phi(1 - K_i H)\,\overline{P}\,(1 - K_i H)^T\,\phi^T + Q + \phi K_i\,R\,K_i^T\,\phi^T$$

vérifie la relation $f(\overline{P}) \leqslant \overline{P}$ ceci correspond au critère de stabilisabilité des systèmes.

2.5 - Conclusion

Il vient d'être démontré par la théorie des cônes le théorème bien connu : la solution définie positive de l'équation matricielle discrète de RICCATI existe et est unique si le système dynamique associé décrit par le quadruplet (ϕ,H,Q,R) est stabilisable, R-observable et Q-commandable.

3. - IMPLANTATION D'ALGORITHMES DE RESOLUTION

3.1 - Présentation des algorithmes

Il s'agit de deux algorithmes d'obtention du gain de KALMAN qui ont déjà été présentés aux colloques précédents.

- Algorithme de quasilinéarisation.

Cet algorithme permet d'obtenir la solution de l'équation de RICCATI en itérant sur une équation de LIAPUNOV :

$$P_{k+1} = \theta_k\,P_{k+1}\,\theta_k^T + Q_k$$

avec

$$\theta_k = \phi(1 - K_k H)$$

$$K_k = P_k H^T\,(H P_k H^T + R)^{-1}$$

$$Q_k = \phi K_k R K_k^T\,\phi^T + Q$$

L'intérêt de ce type d'algorithme réside en deux points :

- sa convergence quadratique
- son initialisation qui garantit la convergence, même avec une matrice de rayon spectrale $\tau(\phi) > 1$.

- Algorithme de LINDQUIST.

Cet algorithme est basé sur le fait que le gain de KALMAN est fonction non pas de la matrice P, mais d'une projection $L = PH^T$. L'équation de RICCATI est alors transformée en équation de CHANDRASEKHAR et dans le cas d'une sortie scalaire, l'algorithme s'écrit de la façon suivante :

$$K_{n+1} = K_n - (H K_n^*) K_{n+1}^*$$
$$K_{n+1}^* = (1 - (H K_n^*)^2)^{-1} (K_n^* - (H K_n^*) K_n)$$

Cet algorithme présente l'avantage d'être très simple mais impose une initialisation par l'équation de LIAPUNOV :

$$P_0 = \phi P_0 \phi^T + Q$$

et $K_0 = K_0^* = P_0$

Il est à remarquer que cette initialisation n'est possible que lorsque la matrice ϕ correspond à un système stable.

- Algorithme de résolution de l'équation de LIAPUNOV.

La résolution de l'équation de LIAPUNOV se fait par :

$$P_{k+1} = \phi P_k \phi^T + Q$$

Pour obtenir une convergence quadratique, on utilise l'algorithme accéléré :

$$P_{2k+1} = (\phi^2)^k P_{2k} (\phi^2)^{kT} + P_{2k}$$

3.2 - Implantation sur microprocesseurs.

Les algorithmes présentés au § 3.1 ont été implantés en langage assembleur sur la carte 68 KDM de Motorola et les mesures de temps ont été faites par logiciel en utilisant le mesureur de temps programmable (PTM) disponible sur cette carte. Les calculs sont faits avec des mots de 32 éléments binaires soit en virgule fixe, soit en binaire flottant. La matrice ϕ est écrite sous forme compagne, R = 1 et H = (1, 0 ..., 0).

Le tableau n° 1 donne les mesures de temps de 20 itérations pour l'algorithme de LINDQUIST et le tableau n° 2 celles pour l'algorithme de quasilinéarisation. Les résultats du tableau n° 3 correspondent à l'algorithme de résolution de l'équation de LIAPUNOV sous sa forme itérative normale et ceux du tableau n° 4 à l'algorithme de résolution de l'équation de LIAPUNOV sous la forme accélérée à convergence quadratique.

Compte tenu de la disponibilité du matériel mis à la disposition par le CAPCA (DCAN de TOULON), il a été possible de microprogrammer l'algorithme de LINDQUIST sur un processeur spécialisé à base de microprocesseurs en tranche de la famille AMD 2900. Les résultats des simulations ont permis d'établir le tableau n° 5 correspondant à des calculs sur mots de 32 éléments binaires à virgule fixe.

3.3 - Conclusion.

Les mesures effectuées sur les différents algorithmes permettent de constater que le gain important en précision apporté par le calcul en binaire flottant pénalise d'un coefficient 2 le temps de calcul. De plus l'utilisation d'un processeur spécialisé diminue le temps de calcul d'un coefficient 10 au minimum.

DIMENSION	LINDQUIST, Temps en secondes: Virgule fixe	binaire flottant
2	0,026	0,044
3	0,033	0,056
4	0,041	0,070
5	0,050	0,086
6	0,062	0,105
7	0,074	0,125
8	0,088	0,148
9	0,102	0,173
10	0,118	0,200
11	0,136	0,230
12	0,155	0,265
13	0,175	0,298
14	0,197	0,332
15	0,220	0,370
16	0,240	0,412

1. Tableau des résultats des mesures de temps en secondes de l'algorithme de LINDQUIST pour 20 itérations sur 68000 (programmes en assembleur, avec nombres réels codés en virgule fixe et en binaire flottant).

DIMENSION	Quasilinéarisation, Temps en secondes: virgule fixe	binaire flottant
2	0,037	0,055
3	0,064	0,111
4	0,100	0,167
5	0,134	0,256
6	0,195	0,354
7	0,255	0,466
8	0,288	0,594
9	0,400	0,729
10	0,488	0,899
11	0,582	1,072
12	0,683	1,261
13	0,793	1,468
14	0,913	1,690
15	1,040	1,925
16	1,160	2,180

2. Tableau des résultats des mesures de temps en secondes de l'algorithme de Quasilinéarisation pour 20 itérations sur 68000 (programmes en assembleur, avec nombres réels codés en virgule fixe et en binaire flottant).

DIMENSION	LIAPUNOV, Temps en secondes: Virgule fixe	binaire flottant
2	0,020	0,051
3	0,051	0,095
4	0,106	0,192
5	0,191	0,343
6	0,313	0,560
7	0,480	0,854
8	0,699	1,240
9	0,976	1,720
10	1,377	2,330
11	1,730	3,060
12	2,230	3,920
13	2,800	4,930
14	3,480	6,110
15	4,250	7,460
16	5,125	9,000

3. Tableau des résultats des mesures de temps en secondes de l'algorithme de LIAPUNOV pour 20 itérations sur 68000 (programmes en assembleur, avec nombres réels codés en virgule fixe et en binaire flottant).

DIMENSION	LIAPUNOV accéléré Temps en secondes virgule fixe	binaire flottant
2	0,062	0,129
3	0,121	0,157
4	0,144	0,285
5	0,175	0,483
6	0,487	0,680
7	0,583	1,070
8	0,891	1,530
9	1,180	2,080
10	1,720	2,920
11	2,270	3,750
12	2,870	4,770
13	3,510	6,170
14	4,400	7,660
15	5,570	9,270
16	6,450	11,200

4. Tableau des résultats des mesures de temps en secondes de l'algorithmes de LIAPUNOV accéléré pour 20 itérations sur 68000 (programmes en assembleur, avec nombres réels codés en virgule fixe et en binaire flottant).

Dimension	LINDQUIST Temps en millisecondes
N°2	2,15
3	2,75
4	3,05
5	4,20
6	5,10
7	6,10
8	7,30
9	8,40
10	9,60
11	10,90
12	12,50
13	14,20
14	26,10
15	17,90
16	19,10

5. Temps de calcul de l'algorithme de LINDQUIST pour 20 itérations sur microprocesseur en tranche à base de 2900 (nombres réels codés en virgule fixe).

4. -CONCLUSION

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation matricielle discrète de RICCATI en utilisant la théorie des cônes a redémontré les résultats classiques liées à la stabilisabilité, la Q-commandabilité et la R-observabilité des systèmes. Certains algorithmes d'obtention du gain de KALMAN ont été implantés sur processeurs. Ces algorithmes ont été présentés au précédent colloque et la comparaison des temps de calcul montre que l'utilisation d'un processeur spécialisé apporte un gain supérieur à 10 dans le temps de calcul.

Remerciements:
Les travaux d'implantation d'algorithmes ont été possibles grâce au CAPCA (DCAN de TOULON) et particulièrement à Monsieur l'Ingénieur Principal de l'Armement C.BOZZO que je tiens à remercier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B.O. ANDERSON - J.B. MOORE
"Optimal Filtering" - Information and System Sciences Séries PRENTICE HALL 1979

[2] M. AOKI
"Optimization of Stochastic Systems"
Academic Press NEW YORK 1967

[3] C. BOZZO
"Le Filtrage optimal et ses applications aux problèmes de poursuite".
Techniques et Documentation - PARIS - à paraître

[4] R.S. BUCY and P.D. JOSEPH
"Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance".
Interscience Publishers - NEW YORK 1968

[5] R.S. BUCY - J. RODRIGUEZ-CANABAL
"A Negative Definite Equilibrium and its induced Cone of Global Existence for RICCATI Equation".
SIAM J. Math. Anal. Vol.3 N° 4 Novembre 1972

[6] R. BUCY, D. RAPPAPORT, L. SILVERNAM
"Correlated noise Filtering and Invariant Directions for the RICCATI Equation".
IEEE Automatic Control Vol 15 N° 5
p. 535-540 Octobre 1970

[7] P. CAINES, D. MAYNE
"On the Discrete Time Matrix RICCATI Equation of optimal Control".
Journal Control 1970 Vol. 12 N° 5 p.785-794 1970

[8] R. CANABAL
"The Geometry of the RICCATI Equations".
Contrat AFOSR 71-2141 reproduit par National Technical Information Service. Juin 1972

[9] G. FAVIER
"Filtrage, Identification et Commande adaptative des systèmes linéaires stochastiques à temps discret".
Thèse d'Etat - NICE Juillet 1981

[10] A. FOURNIER
"Contribution à l'étude de l'équation matricielle de RICCATI. Participation au filtrage de signaux périodiques".
Doctorat d'Etat - TOULOUSE 1978

[11] M. GEVERT et T. KAILATH
"Constant, Predictable and Degenerate Directions of the Discrete-time RICCATI Equations".
Automatica Vol. 9 p.699-771 1973

[12] A. GIULIERI, C. BOZZO
"Analyse des méthodes de résolution numérique de l'équation discrète de RICCATI - GRETSI 7ème colloque sur le traitement de signal et ses applications" NICE Juin 1979

[13] A. GIULIERI
"Opérateur de RICCATI rapide. - Implémentation d'algorithmes de calcul du gain de KALMAN optimal" GRETSI, 8ème colloque sur le traitement du signal et ses applications. NICE Juin 1981

[14] A. GIULIERI - J. ALMAHNA
Rapport final contrat DRET 79-659 Juin 1982

[15] A. JASWINSKI
"Stochastic Processes and Filtering Theory" - Mathematics in Science and engineering .
Vol. 64 academic Press 1970

[16] E. JONES
"A Reformulation of the Algebraic RICCATI Equation Problem".
IEEE Automatic Control p. 113 Février 1976

[17] T. KAILATH, L. LJUNG
"The Asymptotic Behavior of Constant Coefficient RICCATI Differential Equations".
IEEE Automatic Control - p. 385-388 Juin 1976

[18] R.E. KALMAN
"On the General Theory of Control Systems".
Proc. Ist IFAC Congr. Tome l p. 481-491 1961

[19] R.E. KALMAN and J.E. BERTRAM
"Control System Analysis and Design via the Second Method of LYAPUNOV. Continuous and Discrete Time Systems".
I et II Trans ASME, Ser D J.Basic Eng. 82
p. 371-400 1960

[20] S. KLEIBANOV, V. PRIVAL SKII, I. TIME
"Stabilization of Coefficients in a Discrete KALMAN Filter". Automatika i telemekhanika n° 3
p. 76-82 Mars 1974, UDC 621.372.54.083.82 1974

[21] D.L. KLEINMAN
"Stabilizing a Discrete, Constant, Linear System with Application to Iterative Methods for Solving the RICCATI Equation".
IEEE on Auto. Control p. 252-254 Juin 1974

[22] W. KNOW, A. PEARSON
"A note on the Algebraic Matrix RICCATI Equation"
IEEE Automatic Control p. 143-144 Février 1977

[23] M. KRASNOSEL'SKI
"Positive Solutions of Operator Equations"
NOORDHOFF LTD - Groninguen 1964

[24] V. KUCERA
"A contribution to Matrix Quadratic Equations".
IEEE Automatic Control p. 344-347 Juin 1972

[25] A. LINDQUIST
"A New Algorithm for Optimal Filtering of Discrete Time Stationary Processes".
SIAM J. Control Vol.12 n° 4 p.736-746 Nov. 1974

[26] A. LINDQUIST
"Optimal Filtering of Continuous time Stationary Processes by means of the Backward Innovation Process".
SIAM J. Control Vol 12 n° 4 p. 747-754 Nov. 1974

[27] P. MAYBECK
"Stochastic Models, Estimation and Control".
Mathematics in Science and Engineering
Vol 141 Academic Press 1979

[28] B. MOLINARI
"The Stabilizing Solution of the Algebraic RICCATI Equation".
SIAM J. Control Vol. 11 n° 2 p.262-271 Mai 1973

[29] B. MOLINARI
"The Stabilizing Solution of the Discrete Algebraic RICCATI Equation".
IEEE Automatic Control - p. 394-399 Juin 1975

[30] M. PAVON
"Stochastic Realization Invariant Directions the Matrix RICCATI Equation".
SIAM J. Control and optimization vol. 18 n° 2
p. 155-180 Mars 1980

[31] H. PAYNE, L. SILVERMAN
"On the Discrete Time Algebraic RICCATI Equation"
IEEE Automatic Control Vol. 18 N° 3
p. 226-234 Juin 1973

[32] D. RAPPAPORT, L. SILVERMAN
"Structure and Stability of Discrete-time optimal Systems".
IEEE Automatic Control Vol. 16 n° 3
p. 227-233 Juin 1971

[33] D. RAPPAPORT
"Constant Directions of the RICCATI Equation".
Automatica. Vol. 8 p. 175-186 Bergamon Press 1972

[34] READ
"RICCATI Differential Equation".
Mathematics in Sciences in Sciences and Engineering Vol. 86 Academic Press 1972

[35] A. SAGE, J. MELSA
"Estimation Theory with Application to Communication and Control". Mac Graw Hill 1971

[36] M. SORINE
"Sur les équations de Chandrasekhar associées à des opérateurs non bornés".
IRIA, Rapport n° 267 1977

[37] M. SORINE
"Un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation de RICCATI stationnaire".
Rapport INRIA n° 55 Février 1981

[38] J. WILLEMS
"On the Existence of a Non Positive Solution to the RICCATI Equation".
IEEE Automatic Control p. 592-593 Octobre 1974