NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU
SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

OBSERVATEUR ADAPTATIF D'ETAT POUR UNE CLASSE DE SYSTEMES BILINEAIRES

A. LIPPEL , P. LOPEZ

Laboratoire d'Electronique et d'Automatique: UERST - 76077 LE HAVRE CEDEX - B.P. 4006

RESUME

Une méthode utilisant les techniques de synthèse des systèmes adaptatifs avec modèle de référence est appliquée à la synthèse d'un observateur adaptatif d'état d'une classe de systèmes bilinéaires. L'algorithme récursif est présenté. Les résultats de la simulation sont donnés: identification des paramètres et observation de l'état d'un système bilinéaire.

SUMMARY

A method using model reference adaptive techniques is proposed to design an adaptive observer for a bilinear system class. The recursive algorithm is presented. Simulation results are given : parameter's identification and the state observation of a bilinear system .

I - INTRODUCTION :

Dans cet article nous abordons le problème de la reconstruction de l'état d'une classe de systèmes bilinéaires, dont les paramètres sont inconnus. En dépit des nombreux travaux effectués dans le domaine concernant l'identification récursive des systèmes linéaires peu de travaux ont été consacrés aux systèmes bilinéaires [1] [2]

Nous proposons ici un observateur adaptatif pour une classe de systèmes bilinéaires, construit selon les techniques de synthèse des systèmes adaptatifs avec modèle de référence (MRAS) [3] [4] [5]

Dans la prochaine prochaine section nous présentons la classe de systèmes bilinéaires considérée, la structure de l'observateur associé. Dans la troisième section nous abordons en détail l'analyse de la stabilité Nous donnons enfin dans la quatrième section les résultats de simulation.

II - FORMULATION DU PROBLEME :

Soit le système mis sous la forme suivante :

$$x(k+1) = Ax(k) + Cu(k) + u(k)\ B\ x(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Dx(k) \quad (2)$$

où $x(k)$, $u(k)$ et $y(k)$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie. Si la partie linéaire du système est complètement observable et gouvernable, le système peut être mis sous la forme équivalente ci-dessous [6] :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_n & \cdots & b_1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Pour la construction de l'observateur adaptatif nous utilisons une méthode de synthèse de systèmes adaptatifs, développée auparavant pour les systèmes linéaires [3] [4]. Cet observateur estime simultanément les paramètres inconnus a_i, b_i et c_i et le vecteur d'état $X(k)$ à partir des mesures de l'entrée $u(k)$ et de la sortie $y(k)$

L'observateur proposé à la forme suivante (voir fig. 1) :

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + u(k)B(k)\hat{x}(k) + C(k)u(k) + W(k) \quad (3)$$

$$\hat{y}(k) = D\hat{x}(k) \quad (4)$$

où

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & 1 \\ a_n(k) & \cdots & \cdots & a_1(k) \end{bmatrix} \quad B(k) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_n(k) & & b_1(k) \end{bmatrix}$$

$$C^T(k) = \begin{bmatrix} c_1(k) \cdots\cdots c_n(k) \end{bmatrix}$$

$$W^T(k) = \begin{bmatrix} w_1(k) \cdots\cdots w_n(k) \end{bmatrix}$$

III - ANALYSE DE STABILITE :

Les systèmes sous forme d'équation d'état (1), (2) et (3), (4) peuvent être mis sous la forme des équations récursives :

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} a_i\ y(k-i) + u(k-n) \sum_{i=1}^{n} b_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n} r_i u(k-i) +$$

$$+ u(k-n) \sum_{i=2}^{n} v_i u(k-i) \quad (5)$$

où les vecteurs

$$r = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{bmatrix}$$
$$v = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

sont définis par

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -a_1 & 1 & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ -a_{n-2} & & & 1 & \cdot \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -b_1 & 0 & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ -b_{n-2} & & & & \cdot \\ -b_{n-1} & -b_{n-2} & \cdots & -b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ c_n \end{bmatrix}$$

et

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^{n} a_i(k-n)\hat{y}(k-i) + u(k-n) \sum_{i=1}^{n} b_i(k-n)\hat{y}(k-i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} r_i(k-n,k)u(k-i) + u(k-n) \sum_{i=2}^{n} v_i(k-n,k)u(k-i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} w_i(k-i) + \sum_{i=2}^{n} \delta_i(k-n,k,w_i) \quad (6)$$

où

$$r(k-n,k) = T_1(k-n,k)\ C(k-n)$$

avec

$$T_1(k-n,k) = \begin{bmatrix} z^{n-1} & 0 & \cdots & & 0 \\ -a_1(k-n)z^{n-2} & z^{n-2} & & & . \\ . & & & & \\ -a_{n-2}(k-n)z & -a_{n-3}(k-n)z & & z & 0 \\ -a_{n-1}(k-n) & -a_{n-2}(k-n) & \cdots & -a_1(k-n) & 1 \end{bmatrix}$$

$$v(k-n,k) = T_2(k-n,k)\ C(k-n)$$

$$T_2(k-n,k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -b_1(k-n)z^{n-2} & 0 & & & \\ . & & & & \\ -b_{n-2}(k-n)z & -b_{n-3}(k-n)z & & 0 & . \\ -b_{n-1}(k-n) & -b_{n-2}(k-n) & \cdots & -b_1(k-n) & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(k-n) = \begin{bmatrix} c_1(k-n) & \cdots & c_n(k-n) \end{bmatrix}^T$$

et $\quad \delta(k-n,k) = (T_1 + T_2)\ W(k-n) - W(k)$

Soit $\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ l'erreur de sortie. L'équation scalaire de l'erreur peut être obtenue, alors, à partir des équations (1) et (3) :

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) - \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon(k-i) = & \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i(k-n))\ \hat{y}(k-i) \ + \\ & + u(k-n) \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_i(k-n)) y(k-i) + \sum_{i=1}^{n} (r_i - r_i(k-i)) u(k-i) \\ & + u(k-n) \sum_{i=1}^{n} (v_i - v_i(k-n,k)) u(k-i) - \sum_{i=1}^{n} w_i(k-i) \ - \\ & - \sum_{i=2}^{n} \delta_i(k-n,k,w_i) + u(k-n) \sum_{i=1}^{n} b_i(k-n)\ \varepsilon(k-i) \end{aligned} \qquad (7)$$

Comme en [3], [4] nous établissons les $w_i(k)$ de façon à exprimer l'equation (7) sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) - \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon(k-i) = & \left(1 + \sum_{i=1}^{n} d_i z^{-i}\right) \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i(k)) f_i^{\hat{y}}(k) + \\ & + \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_i(k)) f_i^{uy}(k) + \sum_{i=1}^{n} (r_i - r_i(k)) f_i^{u}(k) \ + \\ & + \sum_{i=2}^{n} (v_i - v_i(k)) f_i^{u2}(k) \end{aligned} \qquad (8)$$

où

$$r(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -a_1(k) & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ -a_{n-2}(k) & -a_{n-3}(k) & \cdots & 1 & 0 \\ -a_{n-1}(k) & -a_{n-2}(k) & \cdots & -a_1(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(k) \\ \vdots \\ c_n(k) \end{bmatrix}$$

et

$$v(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -b_1(k) & 1 & \cdots & & 0 \\ . & . & . & . & . \\ -b_{n-2}(k) & -b_{n-3}(k) & \cdots & 1 & 0 \\ -b_{n-1}(k) & -b_{n-2}(k) & \cdots & -b_1(k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(k) \\ \vdots \\ c_n(k) \end{bmatrix}$$

et les signaux $f_i^{\hat{y}}(k)$, $f_i^{u}(k)$, $f_i^{uy}(k)$ et $f_i^{u2}(k)$ sont obtenus par filtrage

$$f_i^{\hat{y}}(k) + \sum_{j=1}^{n} d_j f_i^{\hat{y}}(k-j) = \hat{y}(k-i)$$

$$f_i^{u}(k) + \sum_{j=1}^{n} d_j f_i^{u}(k-j) = u(k-i)$$

$$f_i^{uy}(k) + \sum_{j=1}^{n} d_j f_i^{uy}(k-j) = y(k-i)u(k-n) \qquad i=1,..n$$

$$f_i^{u2}(k) + \sum_{j=1}^{n} d_j f_i^{u2}(k-j) = u(k-i)u(k-n)$$

Remarque: pour les signaux $f^{\hat{y}}$ et f^{u} on peut faire

$$f_{i+m}(k) = f_i(k-m)$$

Pour établir $w_i(k)$ nous nous servons des expressions suivantes :

$$\Delta\ a(k) = a(k) - a(k-1)$$

$$\Delta\ b(k) = b(k) - b(k-1)$$

$$\Delta\ r(k) = r(k) - r(k-1)$$

$$\Delta\ v(k) = v(k) - v(k-1)$$

a) $$\sum_{h=0}^{n-1} z^{-h} u_a^h(k) = \left[1 + \sum_{j=1}^{n} d_j z^{-j}\right] \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i(k)) f_i^{\hat{y}}(k) \ - \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i(k-n)) \hat{y}(k-i) \qquad (9)$$

où pour $\quad 0 \leqslant h \leqslant n-1$

$$u_a^h(k) = \sum_{j=0}^{h}\sum_{i=1}^{n} d_j \Delta a_i(k)\, f^{\hat{y}}_{i+j-h}(k)$$

b) $$\sum_{h=0}^{n-1} z^{-h} u_r^h(k) = \left[1 + \sum_{j=1}^{n} d_j z^{-j}\right] \sum_{i=1}^{n} (r_i - r_i(k)) f_i^u(k) - \sum_{i=1}^{n} (r_i - r_i(k-i))u(k-i) \qquad (10)$$

où pour h=0

$$u_r^\circ = \sum_{i=1}^{n} \Delta r_i(k) f_i^u(k)$$

et pour $1 \leqslant h \leqslant n-1$

$$u_r^h = \sum_{i=h+1}^{n}\sum_{j=0}^{h} d_j \Delta r_i(k) f^u_{i+j-h}(k) - \sum_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{j} d_j \Delta r_i(k) f^u_{i+j-h}(k)$$

c) $$\sum_{h=0}^{n-1} z^{-h} u_b^h(k) = \left[1 + \sum_{j=1}^{n} d_j z^{-j}\right]\left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - b_i(k)) f_i^{uy}(k)\right) - u(k-n) \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_i(k-n))y(k-i) \qquad (11)$$

où pour $0 \leqslant h \leqslant n-1$

$$u_b^h(k) = \sum_{j=h}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_h \Delta b_i(k-j) f_i^{uy}(k)$$

d) $$\sum_{h=0}^{n-1} z^{-h} u_v^h(k) = \left[1 + \sum_{j=1}^{n} d_j z^{-j}\right]\left(\sum_{i=1}^{n} (v_i - v_i(k)) f_i^{u2}(k)\right) - u(k-n) \sum_{i=2}^{n} (v_i - v_i(k-i))u(k-i) \qquad (12)$$

où pour $0 \leqslant h \leqslant n-1$

$$u_v^h(k) = \sum_{j=h}^{n-1}\sum_{i=2}^{n} d_h \Delta v_i(k-j) f_i^{u2}(k)$$

Alors, en comparant l'eq. (8) avec l'eq. (7) , et prenant en compte (9), (10), (11) et (12) nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(k-i) + \sum_{i=2}^{n} \delta_i(k-n,k,w_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(u_a^i(k-i) + u_b^i(k-i) + u_r^i(k-i) + u_v^i(k-i)\right) + \sum_{i=1}^{n-1} (r_i(k-i) - r_i(k-n,k))u(k-i)$$
$$+ u(k-n) \sum_{i=2}^{n} (v_i(k-i) - v_i(k-n,k))u(k-i) + u(k-n) \sum_{i=1}^{n} b_i(k-n)\varepsilon(k-i) \qquad (13)$$

Considérant les vecteurs

$$\Phi(k)^T = \left[f_1^{\hat{y}},..,f_n^{\hat{y}}(k), f_1^u(k),...,f_n^u(k), f_1^{uy}(k),...,f_n^{uy}(k), f_2^{u2}(k),..,f_n^{u2}(k)\right]$$

$$\rho(k)^T = \left[a_1 - a_1(k),..,a_n - a_n(k), r_1 - r_1(k),..., r_n - r_n(k), b_1 - b_1(k),..,b_n - b_n(k), v_2 - v_2(k)\ v_n - v_n(k)\right]$$

$$p(k)^T = \left[a_1(k),..,a_n(k), r_1(k),..,r_n(k), b_1(k),.. , b_n(k), v_1(k),..,v_n(k)\right]$$

et considérant l'algorithme d'estimation des paramètres de la forme :

$$p(k+1) = p(k) + F(k)\Phi(k+1)\varepsilon(k+1) \qquad (14)$$

avec $$F^{-1}(k+1) = \lambda_1(k)F^{-1}(k) + \lambda_2(k)\Phi(k+1)\Phi^T(k+1) \qquad (15)$$

Remarque: pour eviter le problème de causalité résul - tant de la dependance de l'erreur $\varepsilon(k)$ par rapport à $p(k)$, on utilise à l'implémentation l'expression :

$$\varepsilon(k) = \frac{y(k) - \hat{x}_2(k-1) - c_1(k-1)u(k-1) - w_1^\circ(k)}{1 + \Phi(k)F(k-1)\Phi(k)}$$

où $w_1^\circ = w_1(k) - (p(k)-p(k-1))\Phi(k)$

Le système global, exprimé par les eq. (8) et (14) , peut être mis sous la forme du système d'équations d'état équivalent :

$$e(k+1) = Ae(k) + b\,\alpha(k)$$

$$\varepsilon(k) = (d^T + a^T)e(k) + \alpha(k)$$

où $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & & & & 1 \\ & & a^T & & \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a^T = \left[a_1,.....,a_n\right] \qquad d^T = \left[d_1,....,d_n\right]$$

$$\gamma(k+1) = \gamma(k) + F(k-1)\,\Phi(k)\varepsilon(k)$$

$$-\alpha(k) = \Phi^T(k)\gamma(k) + \Phi^T(k)F(k-1)\,\Phi(k)\varepsilon(k)$$

où $\gamma(k) = \rho(k-1)$

Dans [3], [4] les conditions nécessaires à la convergence asymptotique de e(k) et $\gamma(k)$ vers zéro sont établies de la façon suivante :

a) F(k) est une matrice symétrique, positive, définie par l'eq. (15) où

$$0 < \lambda_1(k) < 1$$

$$0 < \lambda_2(k) < 2$$

b) La fonction de transfert $H(z^{-1}) - \lambda/2$ est strictement reelle positive, où

$$H(z^{-1}) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{n} d_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}}$$

et λ tel que $\lambda_2(k) < \lambda < 2$

c) Le vecteur $\Phi(k)$ reste borné

Si ces conditions sont assurées nous aurons :

$$\lim_{k\to\infty} e(k) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \rho(k) = 0$$

IV - SIMULATION

Nous présentons ici un exemple qui illustre l'algorithme. Le système est décrit par une équation d'etat de la forme :

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -.79 & 1.77 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} .1 \\ .2 \end{bmatrix} u(k) + u(k) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ .05 & -.1 \end{bmatrix} x(k)$$

Les paramètres $a_i(k)$, $b_i(k)$ et $c_i(k)$ de l'observateur partent de zéro. Sur la figure 2 nous pouvons voir le comportement de la distance parametrique :

$$D_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i(k))^2 + (b_i - b_i(k))^2 + (c_i - c_i(k))^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)}}$$

La figure 3 montre le comportement de la distance d'état :

$$D_e = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} (x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2}$$

V - CONCLUSION

Dans cet article un observateur adaptatif pour une classe de systèmes bilinéaires a été presenté. La démarche utilisée dans la synthèse de l'observateur est celle employée par LANDAU pour la synthèse des systèmes adaptatifs linéaires, dans le cadre de la théorie de l'hyperstabilité.

Une extension à des classes plus générales de systèmes bilinéaires peut être envisagée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.S.KUBRUSLY, "Identification of discrete-time stochastic bilinear system," Int.J.Contr.,vol 33 , n°2,pp. 291-309,1981.

[2] M.INAGAKI,"On-line parameter identification of bilinear system," IEEE Trans.Automat.Contr.,vol AC-27,pp. 984-986,1982.

[3] H.M.SILVEIRA,"Contributions à la synthèse des systèmes adaptatifs sans accès aux variables d'état Thèse de Docteur ès Sciences, Grenoble,mars, 1978.

[4] I.D.LANDAU.Adapative Control: The Model Reference Approach. New York: Dekker , 1979.

[5] T.IONESCU et R.MONOPOLI,"Discrete model reference adaptive control with an augmented error signal," Automatica,vol 13,pp. 507-517,sept. 1977

[6] T.GOKA, J.TARN et J.ZABORSZKY,"On the controlability of a class of discrete bilinear systems,"Automatica vol 9, pp. 615-622,1973

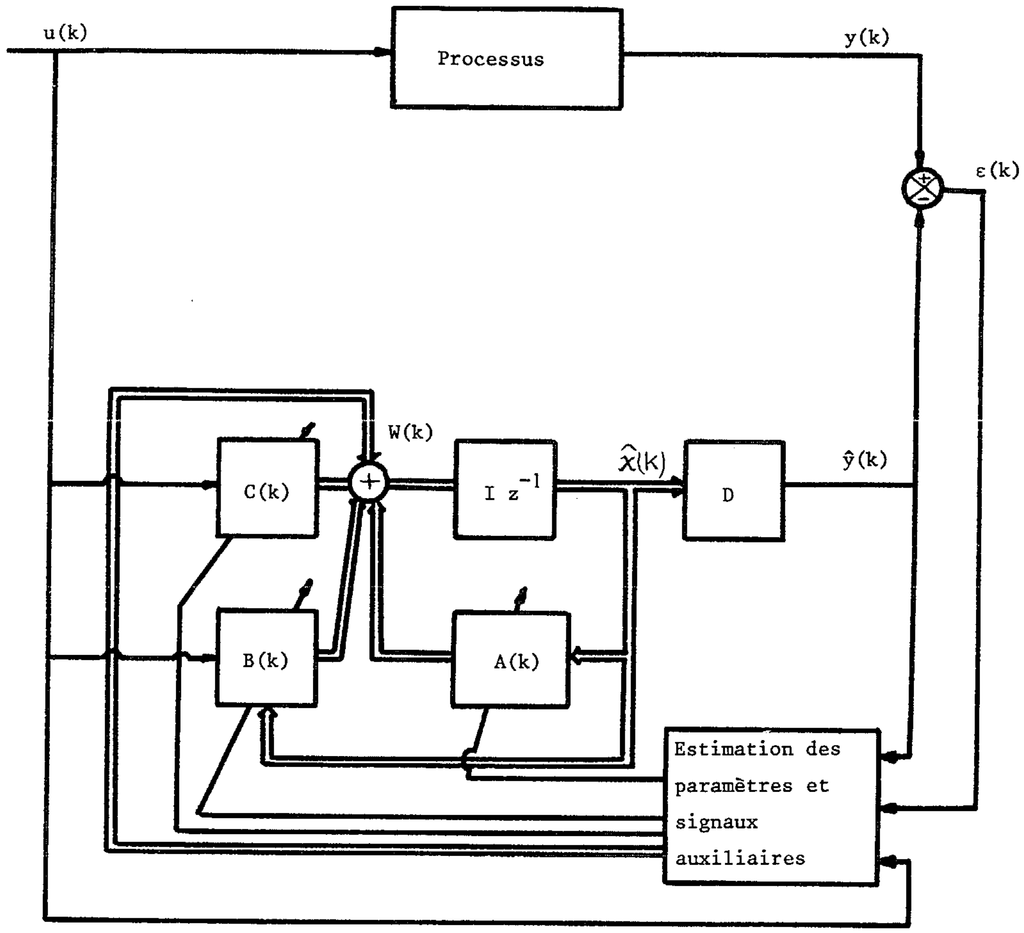

Fig. 1 - Schéma-bloc de l'observateur adaptatif bilinéaire

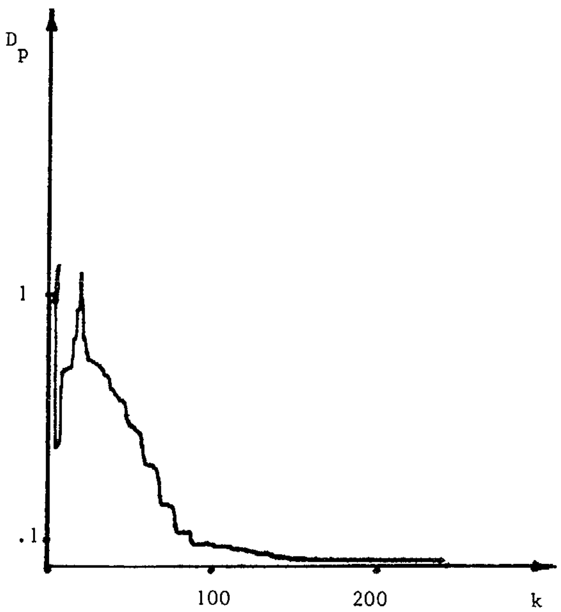

Fig. 2 - Distance paramétrique

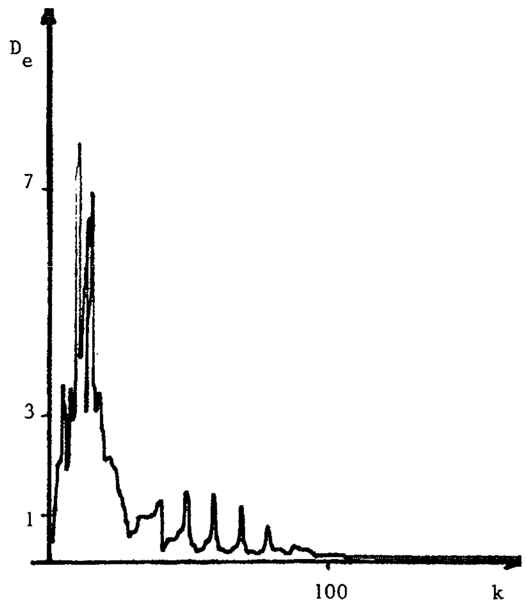

Fig. 3 - Distance d'état