NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

COMMANDE SOUS-OPTIMALE LINEAIRE A GAINS CONSTANTS A PARTIR DU CONCEPT D'HORIZONS GLISSANTS

J. AGUILAR-MARTIN (*), M.O. TANTAWY (**)

(*) Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du C.N.R.S.; 7, av. du Colonel Roche 31400 Toulouse (France)
(**) Militari Technical College, Cairo (Egypte)

RESUME

Dans la commande de systèmes linéaires, la pratique de boucles à gain constant est fréquente, aussi bien dans la synthèse d'observateurs ou filtres que dans celle d'organes de commande proprement dite.

Nous montrons dans cet article que cette procédure correspond à des choix d'horizons temporels limités attachés à l'instant courant. Une utilisation de cette théorie consiste à ajuster ces horizons de manière à satisfaire au mieux un critère quadratique sur la durée totale du processus; ceci n'étant possible que lorsque le modèle exact est connu.

Dans le cas où il y a commutation entre les deux modèles, de façon observable mais inconnue a priori, on peut ajuster ces horizons à la durée moyenne espérée entre commutations. Cette procédure est illustrée dans cet article sur un problème de poursuite, et une évaluation de plusieurs politiques de commande est faite en fonction de l'instant réel de commutation.

SUMMARY

In control of linear systems, constant linear feedback gain is frequently used, as well in filters or observers as in regulators design.

We show in this paper that such a procedure corresponds to constant and limited horizons anchored to the running time. We can take advantage of this parametrization of filtering and control policies to obtain the best values of both horizons with respect to the overall quadratic cost. This calculation is only possible if the exact model is known.

With two models at observable but impredictible switching instants, one can adjust the horizons to the mean time between commutations.
An illustration of this procedure in a tracking problem gives rise to a comparison between the cost of several control policies as a function of the actual switching time.

COMMANDE SOUS-OPTIMALE LINEAIRE A GAINS CONSTANTS A PARTIR DU CONCEPT D'HORIZONS GLISSANTS

INTRODUCTION

Dans la commande de systèmes linéaires, la pratique de boucles à gain constant est fréquente, aussi bien dans la synthèse d'observateurs ou filtres que dans celle d'organes de commande proprement dite.

Nous montrons dans cet article que cette procédure correspond à des choix d'horizons temporels limités attachés à l'instant courant. Une utilisation de cette théorie consiste à ajuster ces horizons de manière à satisfaire au mieux un critère quadratique sur la durée totale du processus; ceci n'étant possible que lorsque le modèle exact est connu.

Dans le cas où il y a commutation entre les deux modèles, de façon observable mais inconnue a priori, on peut ajuster ces horizons à la durée moyenne espérée entre commutations. Cette procédure est illustrée dans cet article sur un problème de poursuite, et une évaluation de plusieurs politiques de commande est faite en fonction de l'instant réel de commutation.

I. RAPPELS DES RESULTATS DE LA COMMANDE OPTIMALE CLASSIQUE

Soit un système linéaire

$$\overset{\circ}{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$x\,(t_o) = x_o \qquad x \in R^n \qquad u \in R^r$$

et la durée de fonctionnement entre t_o et t_f (on notera $x = x(t)$, $u = u(t)$, $x_f = x\,(t_f)$).

La qualité de son fonctionnement est mesurée par un critère intégral.

$$V\,(t_o, t_f, u(t)) = \int_{t_o}^{t_f} \left[x^T Qx + u^T Ru\right] dt + x_f^T P\, x_f$$

La loi de commande $u^o(t)$ qui minimise ce critère est obtenue par :

$$u^o(t) = K(t)\, x \qquad t \in [t_o,\ t_f]$$

et

$$K(t) = -R^{-1} B^T P(T)$$

avec

$$-\overset{\circ}{P} = -\frac{dP}{dt} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q$$

$$P(t_f) = P_f \text{ condition finale } \quad (P = P(t))$$

II. COMMANDE A HORIZON ($h < t_f - t_o$) GLISSANT

Nous voulons remplacer la loi $u^o(t)$ par $u^h(t)$ obtenue grâce à un organe de contrôle qui, à chaque instant t, cherche à minimiser le critère V (t, t+h, u(t)).
Cet organe détermine une séquence u^h (s) pour $t < s \leq t+h$ et seule la valeur $u^h(t)$ est réellement appliquée.

La loi $u^h(s)$ s'obtient donc par

$$u^h(s) = K^h(s)\, x(s)$$

avec

$$K^h(s) = -R^{-1} B^T P^h(s)$$

et

$$-\frac{dP^h}{ds} = A^T P^h + P^h A - P^h B R^{-1} P^h + Q$$

$$P^h\,(t+h) = P_f \text{ condition finale.}$$

On constate aisément que dans ces conditions, pour $s = t$ $\quad P^h(t) = P\,(t_f - h)$.

On a donc :

$$u^h(T) = K^h(t)\, x(t)$$

avec $K^h(t) = -R^{-1} B^T P^h (t_f - h) = K_h$

K_h ne dépend donc pas de t et on aura :

$$u^h(t) = K_h\, x(t)$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

THEOREME 1

La commande sous-optimale à horizon glissant h est une commande par retour d'état à gain constant. La valeur de ce gain est celle que prend le gain variable associé à la commande optimale à l'instant t_6 - h.

III. CHOIX DU MEILLEUR HORIZON GLISSANT h

On peut s'interroger sur l'existence d'un horizon glissant qui, compte tenu du critère global V (t_o, t_f, u(t)), fournisse le meilleur fonctionnement.

En remplaçant dans l'expression du critère

$$u(t) \text{ par } K_h\, x(t)$$

et en calculant la solution du système commandé

$$x(t) = \exp\left[(A + L_h B)\,(t-t_o)\right] .\, x_o$$

on aboutit à :

$$V\,(t_o\ t_f,\ u^h(t)) = x_o^T\ M(h)\ x_o$$

où la matrice de pondération est :

$$M(h) = \int_{t_o}^{t_f} \phi_h^T(t-t_o)\ (Q+K_h^T R\, K_h)\ \phi_h(t-t_o)\ dt + \phi_h\ (t_f-t_o)\ P_f\ \phi_h\ (t_f - t_o)$$

La valeur optimale h_o s'obtient en résolvant :

$$x_o^T\ \frac{dM(h)}{dh}\ x_o = 0$$

En général donc la valeur de h_o dépendra du sous-espace engendré par x_o. Elle sera indépendante de x_o uniquement si $\frac{dM(h)^o}{dh} = 0$ a une solution.

Dans le cas où x_o est une variable aléatoire telle que $E\,x_o = 0$ et $E\,x_o x_o^T = X_o$

Le critère à minimiser sera :

$$E\quad V(t_o\ t_f,\ u^h(t)) = E\left[x_o^T\ M(h)\ x_o\right] = \text{trace}\left[M(h)\ X_o\right]$$

Si nous prenons $X_o = \lambda I_n$ on voit que la valeur optimale ne dépendra pas de λ et on aura à résoudre l'équation

$$\frac{d}{dh}\ (\text{trace } [M(h)]) = 0$$

IV. APPLICATION A DES SYSTEMES STOCHASTIQUES IMPARFAITEMENT OBSERVES

Dans le cas où les équations du système sont remplacées par :

$$\overset{\circ}{x} = Ax + Bu + w$$
$$y = Hx + v \tag{1}$$

où w et v sont des bruits blancs gaussiens indépendants de variances respectives W et V, il est normal de séparer le problème de commande de celui de filtrage de façon à remplacer la commande par retour d'état par une commande par retour d'estimation d'état.

$$u(t) = K(t)\ \hat{x}(t) \tag{2}$$

où $\hat{x}$ est l'estimation de x, c'est-à-dire l'état du filtre optimal.

Dans une communication à ce même colloque [2] en 1979, nous avons proposé un résultat quasi-dual du précédent concernant l'utilisation de filtres linéaires à gain constant, associés à une mémoire limitée ℓ. Nous proposons donc, dans ce cas, d'associer à un problème de commande de système stochastique un doublet horizon-mémoire (h,ℓ) lié à l'instant courant t.

L'équation du filtre est :

$$\mathring{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\ell)\ (y - H\hat{x}) \qquad (3)$$

Le gain constant $L(\ell)$ est $L(\ell) = - E^{-1}(\ell)\ H^T\ V^{-1}$ (4)

où $E(\ell)$ est la valeur prise par E(s) pour $s = \ell$ calculé par l'équation

$$\frac{dE}{ds} = A^T E + E\ A^T - E\ W\ E + H^T\ V^{-1}\ H$$

$$E(0) = 0$$

D'après (1), (2), (3) et (4), on aboutit aisément au système suivant :

$$\mathring{x} = Ax + B\ K\ \hat{x} + w$$

$$\mathring{\hat{x}} = (A + B\ K - L\ H)\ \hat{x} + L\ H\ x + Lv$$

où K et L sont des gains constants associés à h et ℓ.

L'état de ce système est $z^T = [x^T,\ \hat{x}^T]$ et on a :

$$\mathring{z} = Dz + \mathcal{E} \qquad E\,[\mathcal{E}\ \mathcal{E}^T] = \mathcal{U}$$

où les matrices D et $\mathcal{U}$ sont facilement calculables et la matrice de transition de ce système sera notée

$$\Phi(t-t_o) = \exp\,[D.\ (t-t_o)]$$

Le critère s'écrit donc (ici $P_f = 0$)

$$V\ (t_o\ t_f,\ u_{\ell h}(t)) = \int_{t_o}^{t_f} [x^T Q x + \hat{x}^T K^T R K \hat{x}]\ dt$$

$$= \int_{t_o}^{t_f} z^T\ C\ z\ dt$$

Ce qui définit la matrice C.

Donc :

$$EV\ (t_o t_f,\ u_{\ell h}(t)) = \int_{t_o}^{t_f} \text{trace}\,[\emptyset^T(t-t_o)\ C\ \emptyset\ (t-t_o).Z_o]$$

$$+ \int_{t_o}^{t_f} \int_{t_o}^{t} \text{trace}\,[\emptyset^T(t-s)\ C\ \emptyset(t-s).\mathcal{U}]\ ds\ dt$$

$$Z_o = \begin{bmatrix} X_o & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & L\ V\ L^T \end{bmatrix}$$

La minimisation de cette expression en fonction du doublet de scalaires positifs h et ℓ se fait par un algorithme de programmation non linéaire simple puisque h et ℓ sont des réels positifs.

V. APPLICATION A UN SYSTEME A PARAMETRES COMMUTABLES

Considérons ici l'éventualité de commutation de la matrice A entre deux valeurs A_I et A_{II}. Les instants de commutation sont inconnus a priori mais la commutation est supposée détectable immédiatement. Plusieurs politiques de commande peuvent entre envisagées :

Politique 1 :

Nous supposons avoir prédéterminé deux régulateurs optimaux, l'un pour le système (I), l'autre pour le système (II); chaque régulateur est calculé en imaginant que le système correspondant va durer sur tout l'intervalle. Quand le modèle bascule du système (I) au système (II), ou inversement, la régulation est commutée, aussi, du régulateur (I) au régulateur (II) ou inversement.

Politique 2 :

On suppose la même politique précédente mais en utilisant les régulateurs avec filtre optimal indépendant de l'état initial (variance initiale infinie).

Politique 3 :

Nous déterminons a priori les deux régulateurs sous-optimaux à gains constants, l'un pour le système (I) et l'autre pour le système (II); chaque régulateur est le meilleur parmi l'ensemble des régulateurs sous-optimaux à gains constants (c'est-à-dire à horizons limites glissants) en imaginant que le système correspondant va durer sur tout l'intervalle. Quand le modèle bascule du système (I) au système (II) la régulation est commutée, aussi, du régulateur (I) au régulateur (II), ou vice-versa.

Politique 4 :

Nous supposons que le temps moyen entre deux commutations entre le système (I) et le système (II) est connu et égal à la moitié de l'intervalle total; nous pouvons donc trouver deux régulateurs sous-optimaux à gains constants comme suit :

Régulateur (I) : c'est le meilleur régulateur sous-optimal à gains constants choisi parmi l'ensemble des régulateurs sous-optimaux pour le système (I) en supposant que l'horizon est égal à la moitié de l'intervalle total et que la covariance de l'état initial est donnée.

Régulateur (II) : c'est le meilleur régulateur, conditionnel sous-optimal à gains constants pour le système (II) dans la deuxième moitié de l'intervalle et la covariance de l'état initial de ce deuxième intervalle est calculée à partir de l'état initial.

Nous appliquons le régulateur (I) tant que le système (I) ne change pas et quand le modèle bascule du système (I) au système (II) la régulation aussi change du régulateur (I) au régulateur (II).

VI. ILLUSTRATION SUR UN PROBLEME DE POURSUITE

La modélisation d'un missile poursuivant une cible nous amène à l'équation d'état suivante [4] où le terme a représente l'accélération normale de la cible que l'on suppose prendre deux valeurs extrêmes normalisées à +1 et -1 à des instants de commutation inconnus mais observables exactement.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathring{Y}_d \\ Y_d \\ a_c \\ a_{t_y} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -0.02277 & 0 & 25{,}05 \\ 0 & 0 & 0 & -3{,}012 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5467 & 0 & -0{,}8653 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{Y}_d \\ Y_d \\ a_c \\ a_{t_y} \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7{,}249 \\ -0{,}165 \\ 0 \\ -29{,}68 \end{bmatrix} u(t)+w(t)$$

avec la covariance de l'état initial x_o donnée par

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

et celle du bruit de dynamique du système w(t) par

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.62\text{x}10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation de mesure est donnée par

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0{,}75.10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_d \\ Y_d \\ a_c \\ a_{ty} \\ q \end{bmatrix} + v(t)$$

où la covariance du bruit est :

$$V = \begin{bmatrix} 9.4\text{x}10^{-6} & 0 \\ 0 & 31.4\text{x}10^{-6} \end{bmatrix}$$

Cette application a été conduite en calcul hybride selon le schéma suivant (figure 1)

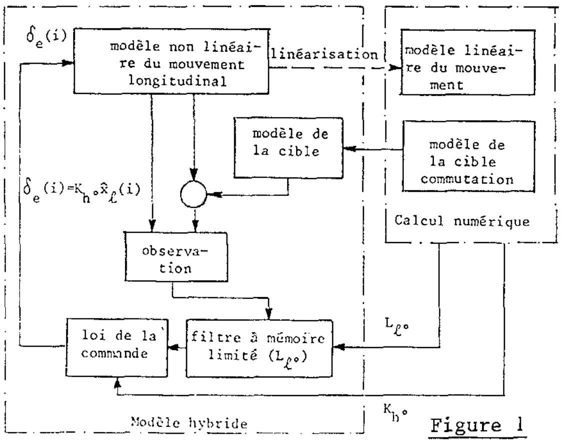

Figure 1

et a donné lieu aux courbes de la Figure 2 où est calculée la valeur du critère V (t_o t_f, u(t)) pour chacune des politiques ici décrites et pour une situation où une seule commutation a lieu à l'instant $i_c \in [t_o, t_f]$

REFERENCES

1 J. AGUILAR-MARTIN et O. TANTAWY
Optimizacio amb horitzons passati futur, mobils i limitats.
Questiio, 1979, vol. 3, n° 1

2 J. AGUILAR-MARTIN et O. TANTAWY
Filtre linéaire optimal à horizon passé glissant (vraiment) limité.
7ème Colloque sur le Traitement du Signal et ses Applications. Nice, Mai-Juin 1979.

3 O. TANTAWY
Commande optimale a horizons limités avec application au guidage.
Thèse de Docteur-Ingénieur, U.P.S. Toulouse, Octobre 1980.

4 B.J. EULRICH, K.S. GOVINSDARAJ
Identification of the aerodynamic stability and control parameters of the E 106 from flight Test Data.
T.I.F.S. Memo. N° 837, 1978.

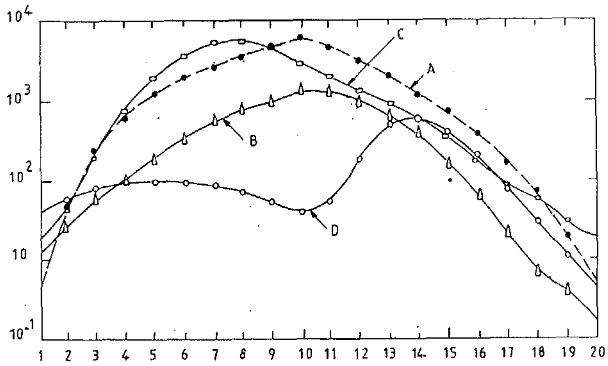

Figure 2 : A Politique 1,
B Politique 2,
C Politique 3,
D Politique 4,