

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

ESTIMATION D'ATTITUDE OPTIMALE D'UN SATELLITE ORBITE BASSE A DETECTION OPTICO-INERTIELLE

Stéphane GRODNER

MATRA S.A. - BP1 - 78146 VELIZY CEDEX - FRANCE

RESUME

L'objet de cette étude est le filtrage embarqué d'un satellite orbite basse en mode opérationnel. La détection se fait à court-terme par des gyromètres recalés à long terme par des détecteurs optiques.

On montre en premier lieu que les dépointages angulaires du satellite par rapport à un trièdre de référence orbitale ainsi que les dérives constantes des gyromètres, sont observables avec un modèle simplifié par variables d'état. Les erreurs des détecteurs sont décrites par des modèles statistiques : bruits blancs, dérives aléatoires etc..., ainsi que par des modèles pseudo-déterministes : sinusoides à fréquence orbitale d'amplitude aléatoire mais majorée

Deux approches d'optimisation du filtrage sont alors comparées :

- une analyse de covariance du type Kalman conduisant à un filtre à gains constants
- une approche fréquentielle basée sur un passage discret-continu des équations d'état (fonctionnant à des cadences différentes) permettant d'obtenir des fonctions de transfert entre les estimées d'état et les bruits d'état ou de mesure : les gains de recalage sont choisis après fixation de la bande passante d'estimation.

L'ordre de grandeur des phénomènes conduit à une optimisation fréquentielle plutôt que de type Kalman. Ce type de filtrage sera employé sur la famille de satellites issus de SPOT (tir prévu en 1984).

SUMMARY

The aim of this study is the on-board attitude estimation of a low-orbit satellite in operational mode. Short-term detection uses gyros, while optical sensors allow periodic updating.

One first shows that the angular deviations of the satellite w.r.t. an orbital reference frame, as well as the constant drifts of the gyros, are observable with a state variable representation. The sensors errors are described with statistical models : gaussian white noises, random drifts, and with pseudo-deterministic models : it means that some error terms vary as sine-shaped functions whose frequency is known and amplitude is random but bounded.

Two optimization approaches of the filtering process are then compared :

- a Kalman type analysis leading to a constant gains filter (steady state Kalman gains)
- a frequential approach based on a discrete → continuous transformation of the state equations (working at different cadences), permitting to obtain the transfer functions between the state estimates and the state variables or measurements noises : the updating gains are chosen after fixation of the estimation bandpass.

The order of magnitude of the phenomene leads to prefer the frequential optimization.

This type of filtering will be on-boarded on the satellites family derived from SPOT (launch foreseen for 1984).



1- INTRODUCTION

En mode opérationnel, le pilotage d'un satellite en orbite circulaire basse consiste à asservir à tout instant un trièdre lié au satellite, dit trièdre satellite : X, Y, Z à un trièdre lié à l'orbite, dit trièdre orbital local : T, R, L. Le trièdre orbital local, dépendant de la position sur l'orbite, est défini par la figure 1 ;

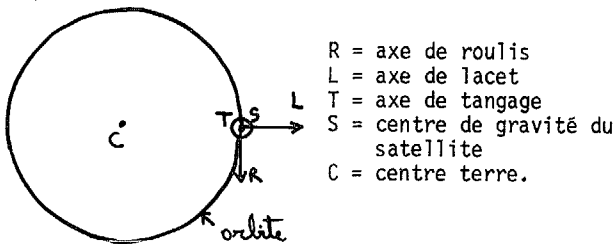


Figure 1

A tout instant, l'écart relatif entre le trièdre satellite et le trièdre orbital local définit les 3 "angles d'attitude" du satellite $\theta_R, \theta_L, \theta_T$:

- rotation θ_R autour de Y : X, Y, Z $\xrightarrow{\theta_R}$ X1, Y, Z1
- rotation θ_L autour de Z1 : X1, Y, Z1 $\xrightarrow{\theta_L}$ T, Y2, Z1
- rotation θ_T autour de T : T, Y2, Z1 \rightarrow T, R, L

L'objet de cette étude est l'estimation précise des angles d'attitude et de leurs dérivées, qui entrent dans la loi de pilotage (en couple). Cette loi contient basiquement un terme proportionnel et dérivé :

$$C = -(Ke\hat{\theta} + Kv\dot{\hat{\theta}})$$

Ke = gain écart

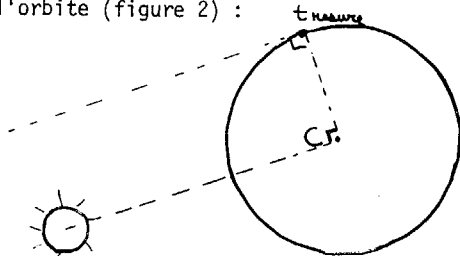
Kv = gain vitesse

ainsi que d'éventuels filtres de structure d'ordre plus ou moins élevé.

Plus précisément on s'intéresse au problème du pointage, c'est-à-dire à la minimisation des angles d'attitude $\theta_R, \theta_L, \theta_T$, idéalement égaux à 0.

On dispose pour ce faire de senseurs optiques (STD et SSD) et inertiels (gyromètres) :

- a) gyromètres : ils permettent à tout instant de restituer la vitesse angulaire du satellite par rapport à un repère inertiel.
- b) STD (senseur terrestre digital) : il mesure la position angulaire de 2 faisceaux lumineux qu'il envoie avec l'horizon infra-rouge de la terre. Des équations simples, embarquées, permettent d'en déduire en permanence les angles de roulis θ_R et de tangage θ_T .
- c) SSD (senseur solaire digital) : il mesure, une fois par orbite, l'angle de lacet. Cette mesure correspond à la comparaison sur une barrette fine à CCD de la position réelle du soleil par rapport à celle qu'il aurait si l'angle de lacet était nul. Cette mesure ne peut avoir lieu qu'à la perpendiculaire avec la direction du soleil, par exemple au Nord de l'orbite (figure 2) :



Enfinement, le problème d'estimation qui est posé s'exprime de la façon suivante : le satellite étant considéré comme rigide, estimation optimale des variables en s'appuyant sur un modèle continu du mouvement angulaire (dit "modèle cinématique") et sur les différentes mesures des senseurs aux instants d'échantillonnage, connaissant certaines caractéristiques des bruits de mesure.

2- APPROCHE KALMAN

2-1 Modèle continu

Modèle cinématique (équation d'évolution)

Il s'écrit classiquement (aux petits angles d'attitude)

$$\dot{\theta}_R = \omega_R - \omega_0 \theta_L$$

$$\dot{\theta}_L = \omega_L + \omega_0 \theta_R$$

$$\dot{\theta}_T = \omega_T + \omega_0$$

$(\omega_R, \omega_L, \omega_T)^T$ = vitesse angulaire inertielle du satellite

ω_0 = vitesse angulaire orbitale (vitesse du centre de masse du satellite)

Modèle de gyromètres

Dans l'approche Kalman les modèles de senseurs (gyromètres, STD, SSD) ne prennent en compte que les erreurs de type biais, bruit blanc, ou marche au hasard (bruit blanc intégré) :

$$\dot{\omega}_R = \omega_{Rm} + d_R + w_{11}$$

$$\dot{\omega}_L = \omega_{Lm} + d_L + w_{21}$$

$$\dot{\omega}_T = \omega_{Tm} + d_T + w_{31}$$

avec $d_R = w_{12}$

$$d_L = w_{22}$$

$$d_T = w_{32}$$

Les bruits w_i sont des bruits blancs définis par leur variance :

$$E(w_{ij}(t) w_{ij}(\tau)) = Q_{ij} (t-\tau)$$

et non corrélés : $E(w_{ij}(t) w_{kl}(t)) = 0$ pour $(i,j) \neq (k,l)$

Modèle de STD

$$Z_R = \theta_R + b_R = V_1$$

$$Z_T = \theta_T + b_T = V_3$$

b_R, b_T = biais constants

V_1, V_3 = bruits blancs non corrélés.

Modèle de SSD

$$Z_L = \theta_L + b_L + V_2$$

b_L = biais constant

V_2 = bruit blanc

Le modèle d'évolution ne rend pas compte de l'ensemble du mouvement, qui est décrit rigoureusement par des équations du 2ème ordre. Afin de s'affranchir de cette diffi-

ESTIMATION D'ATTITUDE OPTIMALE D'UN SATELLITE ORBITE BASSE A DETECTION OPTICO-INERTIELLE

culté on considère les mesures des gyromètres comme des entrées déterministes. De plus, on s'aperçoit aisément que le problème du tangage est découplé du problème roulis/lacet.

2-2 Filtre tangage

2-2-1 Filtre continu

Modèle continu

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_T \\ \dot{d}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_T \\ d_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{31} \\ w_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{TM} + \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mesures

$$Z = [1, 0] X + V_3$$

soit :

$$\dot{X} = FX + W + U$$

bruit
déterministe

$$Z = HX + V_3$$

avec

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = (1 \quad 0)$$

$$X = \begin{bmatrix} \theta_T \\ d_T \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} w_{TM} + w_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{bruits : } E(W W^T) = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = Q_C$$

$$E(V_3 V_3^T) = R$$

2-2-2 Filtre discret

La discrétisation classique conduit au modèle :

$$X_n = \phi X_{n-1} + W_n + U_n$$

$$Z_n = HX_n + V_n$$

avec

$$\phi = e^{FT} \quad (\text{matrice de transition})$$

$$Q = E(W_n W_n^T) = \int_0^T e^{-Ft} Q_C e^{-F^T t} dt$$

$$U_n = \phi \int_{t_n}^{t_{n+1}} U_T(t) dt \quad (t_n = nT)$$

où T est la période d'échantillonnage des mesures STD

Matrices F et Q :

au 1er ordre $\begin{cases} \phi = I + FT \\ Q = Q_C T \end{cases}$

au 2ème ordre $\begin{cases} \phi = I + FT + \frac{F^2 T^2}{2} \\ Q = \int_0^T (I - Ft) Q_C (I - F^T t) dt \end{cases}$

on calcule :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 + \frac{Q_2 T^3}{3} & -\frac{T^2}{2} Q_2 \\ -\frac{T^2}{2} Q_2 & Q_2 T \end{bmatrix}$$

Vecteur Un

Au premier ordre l'intégrale qui donne Un vaut :

$$U_n = \phi U_T = \begin{pmatrix} T & T^2 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{TM} + \omega_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T (w_{TM} + \omega_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

on conserve finalement les développements au 1er ordre de F et Un, et au 2ème ordre de Q :

Modèle discrétisé tangage (8Hz)

$$\text{Modèle : } \theta_n = \theta_{n-1} + T (w_{TM} + w_0 + d_{n-1}) + W_{31n}$$

$$d_n = d_{n-1} + w_{32n}$$

$$\text{avec } E(w_n w_n^T) = Q = \begin{pmatrix} Q_1 T + \frac{Q_2 T^3}{3} & -\frac{T^2}{2} Q_2 \\ -\frac{T^2}{2} Q_2 & Q_2 T \end{pmatrix}$$

$$\text{mesures : } Z_k = \theta_k + V_{3k}$$

2-2-3 Observabilité

L'observabilité d'un système linéaire à coefficients constants est assurée si la matrice :

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

est de rang n (n = dimension du vecteur d'état)

Les matrices considérées sont celles du modèle continu : ici n = 2, avec :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = (1, 0)$$

$$\text{donc } HF = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \quad 1)$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} H \\ HF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{est de rang 2}$$

la chaîne tangage est donc observable.

2-2-4 Filtre de Kalman

Equations de prédiction (8 Hz)

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + T (w_{TM} + \omega_0 + \hat{d}_{n-1})$$

$$\hat{d}_n = \hat{d}_{n-1}$$

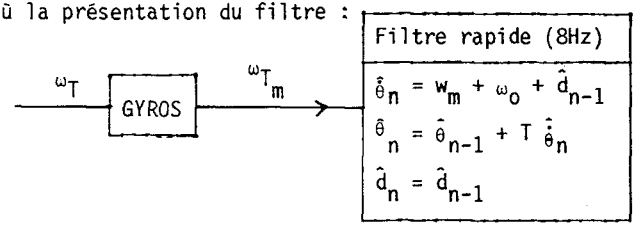
Equations de recalage (128 sec.)

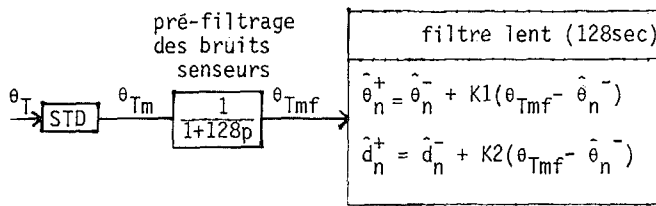
$$\hat{\theta}_n^+ = \hat{\theta}_n^- + K_1 (\theta_m - \hat{\theta}_n^-)$$

$$\hat{d}_n^+ = \hat{d}_n^- + K_2 (\theta_m - \hat{\theta}_n^-)$$

Le choix des périodes d'échantillonnage est déduite de nombreuses considérations (spécification en écart, en vitesse, en réponse à des entrées données, etc...) $w_{TM} + \omega_0 + d_{n-1}$ est une estimée de la vitesse: $\dot{\theta}_n$

d'où la présentation du filtre :





2-2-5 Calcul des gains optimaux limite en discret

Vu que les recalages ne sont pas introduits à la même période que celle des équations de prédiction il est difficile de calculer les gains optimaux limites en discret.

2-2-6 Calcul des gains optimaux limite en continu

On suppose qu'on a un Kalman continu bâti sur le modèle continu du filtre tangage soit :

$$X = (\theta_T, dt)^T$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \omega_{Tm} + \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{31} \\ w_{32} \end{bmatrix} \quad E(w w^T) = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = Q$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H \end{bmatrix} X + V_3 \quad E(V_3 V_3^T) = R$$

Le régime permanent du filtre est donné par l'équation de Ricatti continue :

$$\dot{P} = FP + PF^T - PH^T R^{-1} HP + Q = 0$$

$$K = PH^T R^{-1}$$

on note :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$$

Le développement de l'équation de Ricatti donne :

$$\begin{cases} -\frac{P_1^2}{R} + P_2 + P_3 + Q_1 = 0 \\ P_4 - \frac{P_1 P_2}{R} = 0 \\ P_4 - \frac{P_1 P_3}{R} = 0 \\ -\frac{P_2 P_3}{R} + Q_2 = 0 \end{cases}$$

D'où on déduit aisément :

$$P_1 = \sqrt{R} \sqrt{2 \sqrt{R Q_2} + Q_1}$$

$$P_2 = P_3 = \sqrt{R Q_2}$$

$$P_4 = \sqrt{Q_2} \sqrt{2 \sqrt{R Q_2} + Q_1}$$

et K :

$$K = PH^T R^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{R} = \begin{pmatrix} P_1/R \\ P_3/R \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \frac{P_1}{R} = \left(\frac{Q_1 + 2 \sqrt{R Q_2}}{R} \right)^{1/2}$$

$$K_2 = \frac{P_3}{R} = \left(\frac{Q_2}{R} \right)^{1/2}$$

Les gains pseudo-optimaux discrets s'en déduisent par multiplication par la période d'échantillonnage T :

$$Kd_1 = TK_1$$

$$Kd_2 = TK_2$$

2-3 Filtre gyro-compas roulis-lacet

2-3-1 filtre continu

Modèle continu

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \\ \dot{d}_R \\ \dot{d}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & 1 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_R \\ \theta_L \\ d_R \\ d_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{Rm} \\ \omega_{Lm} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modèle de mesures STD

$$Z = (1, 0, 0, 0) X + V_1$$

soit :

modèle continu d'état

$$\dot{X} = F X + \frac{W + U}{\text{bruits déterministe}}$$

$$Z = H X + V_1$$

avec

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & 1 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = (1, 0, 0, 0)$$

$$X = (\theta_R, \theta_L, d_R, d_L)^T$$

$$U = (\omega_{Rm}, \omega_{Lm}, 0, 0)^T$$

bruits :

$$E(w w^T) = \begin{pmatrix} Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q$$

$$E(V_1 V_1^T) = R$$

2-3-2 Observabilité

On montre qu'à travers la seule mesure du STD le système n'est pas observable.

Pour cela on forme :

$$A = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ HF^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 0 & -\omega_0 \\ 0 & \omega_0^3 & -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

La 2ème et la 4ème ligne de A sont proportionnelles. Il n'y a donc pas observabilité.

2-3-3 Réduction à un système observable

$$\text{On pose : } \theta'_L = \theta_L - \frac{d_R}{\omega_0}$$

on transforme les équations du modèle continu qui deviennent :

$$\dot{\theta}_R = \omega_{Rm} - \omega_0 \theta'_L + w_{11}$$

$$\dot{\theta}'_L = \theta_L - \frac{dR}{\omega_0} = \omega_{Lm} + \omega_0 \theta_R + d_L + w_{21} - \frac{w_{12}}{\omega_0}$$

$$\dot{d}'_L = w_{22}$$

On pose : $X' = (\theta_R, \theta'_L, d'_L)^T$

D'où le modèle d'état

$$\dot{X}' = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X' + \begin{bmatrix} \omega_{Rm} \\ \omega_{Lm} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} - w_{12}/\omega_0 \\ w_{22} \end{bmatrix}$$

$$Z_R = (1, 0, 0)X' + V_1$$

En formant la matrice $A' = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix}$ on montre aisément qu'elle est de rang 3 et donc que le système réduit est observable.

2-3-4 Discretisation

$$X_n = \phi X_{n-1} + W_n + U_n$$

$$Z_n = H X_n + V_{1n}$$

la matrice de transition ϕ vaut e^{FT} , on démontre :

$$\phi = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 T & -\sin\omega_0 T & \frac{1}{\omega_0}(\cos\omega_0 T - 1) \\ \sin\omega_0 T & \cos\omega_0 T & \frac{\sin\omega_0 T}{\omega_0} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le calculateur de bord ne possède pas les fonctions transcendentes câblées. Compte-tenu de la grandeur de la fréquence d'échantillonnage on peut développer ϕ au 1er ordre en T , d'où :

$$\phi \approx \begin{pmatrix} 1 & -\omega_0 T & 0 \\ \omega_0 T & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de covariance des bruits est obtenue à partir d'une approximation du 1er ordre :

$$Q_d = QT$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} \theta_{Rn} \\ \theta'_{Ln} \\ d_{Ln} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega_0 T & 0 \\ \omega_0 T & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{Rn-1} + T\omega_{Rm} \\ \theta'_{Ln-1} + T\omega_{Lm} \\ d_{Ln-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11n} \\ b_{12n} \\ b_{13n} \end{pmatrix}$$

$$\theta_{Rn} = \theta_{Rn-1} + T\omega_{Rm} - \omega_0 T(\theta'_{Ln-1} + T\omega_{Lm}) + b_{11n}$$

$$\theta'_{Ln} = \omega_0 T(\theta_{Rn-1} + T\omega_{Rm}) + \theta'_{Ln-1} + T\omega_{Lm} + Td_{Ln-1} + b_{12n}$$

$$d_{Ln} = d_{Ln-1} + b_{13n}$$

On néglige les termes en T^2 . D'où le modèle :

$$\theta_{Rn} = \theta_{Rn-1} + T(\omega_{Rm}) - \omega_0 T \theta'_{Ln-1} + b_{11n}$$

$$\theta'_{Ln} = \theta'_{Ln-1} + T(\omega_{Lm} + d_{Ln-1}) + \omega_0 T \theta_{Rn-1} + b_{12n}$$

$$d_{Ln} = d_{Ln-1} + b_{13n}$$

En repassant à θ_L , $\theta_L = \theta'_L + \frac{dR}{\omega_0}$, dR étant supposé

connu (entrée du filtre) :

Modélise discrétisé R/L (8Hz)

Modèle :

$$\theta_{Rn} = \theta_{Rn-1} + T(\omega_{Rm} + d_R) - \omega_0 T \theta_{Ln-1} + b_{11n}$$

$$\theta_{Ln} = \theta_{Ln-1} + T(\omega_{Lm} + d_L) + \omega_0 T \theta_{Rn-1} + b_{12n}$$

$$d_{Ln} = d_{Ln-1} + b_{13n}$$

Mesures : $Z_R = \theta_R + V_1$

2-3-5 Filtre de Kalman

Equations de prédiction (8 Hz)

$$\hat{\theta}_{Rn} = \hat{\theta}_{Rn-1} + T(\omega_{Rm} + \hat{d}_R) - \omega_0 T \hat{\theta}_{Ln-1}$$

$$\hat{\theta}_{Ln} = \hat{\theta}_{Ln-1} + T(\omega_{Lm} + \hat{d}_L) + \omega_0 T \hat{\theta}_{Rn-1}$$

$$\hat{d}_{Ln} = \hat{d}_{Ln-1}$$

Equations de recalage (128 sec)

$$\hat{\theta}_{Rn}^+ = \hat{\theta}_{Rn}^- + K_1(\theta_{Rmf} - \hat{\theta}_{Rn}^-)$$

$$\hat{\theta}_{Ln}^+ = \hat{\theta}_{Ln}^- + K_2(\theta_{Rmf} - \hat{\theta}_{Rn}^-)$$

$$\hat{d}_{Ln}^+ = \hat{d}_{Ln}^- + K_3(\theta_{Rmf} - \hat{\theta}_{Rn}^-)$$

2-3-6 Effet gyro-compas

On a montré en 2-3-2 et 2-3-3 que la dérive roulis était inobservable au moyen des seules mesures du STD.

Les équations :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_R &= \omega_R - \omega_0 \theta_L \\ \omega_R &= \omega_{Rm} + d_R + w_{21} \end{aligned} \right\} \dot{\theta}_R = \omega_{Rm} + w_{21} + d_R - \omega_0 \theta_L$$

montrent que le roulis étant piloté à zéro, la dérive roulis crée une erreur lacet.

$$\theta_L = \frac{dR}{\omega_0}$$

L'observation du lacet, une fois par orbite, permet donc d'estimer la dérive roulis, rendant par là-même l'ensemble de la chaîne roulis-lacet observable. C'est l'effet "gyro-compas" : l'observation du lacet permet d'estimer la dérive roulis.

L'équation de recalage est : $d_{Rn} = d_{Rn-1} + K(\theta_{Lm} - \hat{\theta}_L)$

où θ_{Lm} est la mesure du SSD.

2-3-7 Gains optimaux

On peut essayer de résoudre, comme dans le cas du tangage l'équation de Riccati continue :

$$FP + PF^T - P H^T R^{-1} H P + Q = 0$$

avec : $P = \begin{pmatrix} P1 & P2 & P3 \\ P4 & P5 & P6 \\ P7 & P8 & P9 \end{pmatrix}$

Le système de 9 équations à 9 inconnues qui s'en déduit n'est pas résoluble analytiquement. On peut cependant en trouver la solution au moyen de programmes de résolution de systèmes d'équations implicites, pour des entrées données (valeurs des bruits).

Les gains continus limites s'en déduisent alors directement, ainsi que les gains pseudo-optimaux discrets, par multiplication par la période d'échantillonnage.



3- APPROCHE FREQUENTIELLE

L'approche Kalman permet de définir le filtre qui est effectivement implanté. Par contre, l'optimisation des gains est basée sur des modèles de bruits senseurs où ne figurent pas des erreurs "pseudo-déterministes" prépondérantes, d'origine essentiellement thermiques (dues au passage alternatif du satellite dans le jour et la nuit). Ces erreurs peuvent être modélisées sous la forme :

$$E(t) = A \cos(\omega_0 t + \gamma) \quad \omega_0 = \text{pulsation orbitale}$$

où A et γ sont des variables aléatoires, A étant majoré. Afin d'étudier leur effet, on doit disposer d'une représentation par fonctions de transfert du filtre à gains constants utilisé. Le principe de l'optimisation est exposé dans le cas de la chaîne tangage.

3-1 Fonctions de transfert de la chaîne tangage

Le filtre se décompose en 2 d'après les cadences de calcul :

Filtre rapide (8 Hz)

$$\hat{\theta}_n = \omega_m + \omega_0 + \hat{d}_{n-1}$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + T \dot{\hat{\theta}}_n$$

$$\hat{d}_n = \hat{d}_{n-1}$$

Filtre lent (128 sec)

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + K_1(\theta_{Tmf} - \hat{\theta}_{n-1})$$

$$\hat{d}_n = \hat{d}_{n-1} + K_2(\theta_{Tmf} - \hat{\theta}_{n-1})$$

Pour écrire des fonctions de transfert, il faut effectuer une transformation continu \rightarrow discret de ces équations.

On pose

$$K'1 = \frac{K1}{T} \quad K'2 = \frac{K2}{T} \quad K'1, K'2 = \text{gains continus}$$

d'où (avec p = variable de Laplace) :

$$\hat{\theta} = \omega_m + \omega_0 + \hat{d}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta} &= \frac{\hat{\theta}}{p} + \frac{\Delta\theta'}{Tp} \\ \Delta\theta' &= K1(\theta_{Tmf} - \hat{\theta}) \end{aligned} \right\} \theta = \frac{\hat{\theta}}{p} + \frac{K'1}{p}(\theta_{Tmf} - \hat{\theta})$$

$$\hat{d} = \frac{1}{p} \frac{K2}{T}(\theta_{Tmf} - \hat{\theta}) = \frac{K'2}{p}(\theta_{Tmf} - \hat{\theta})$$

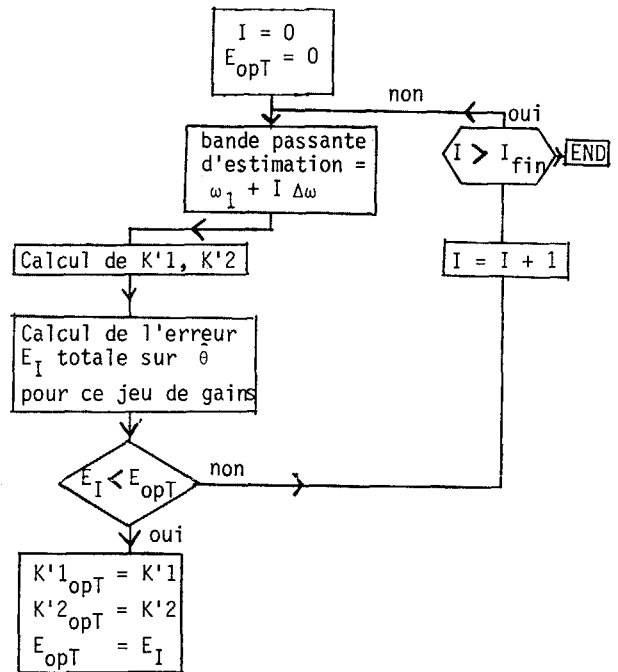
On déduit aisément de ses équations les fonctions de transfert en p entre les estimées et les mesures :

$$\hat{\theta} = \frac{p}{p^2 + K'1_p + K'2} (\omega_{Tm} + \omega_0) + \frac{K'1_p + K'2}{p^2 + K'1_p + K'2} \theta_{Tmf}$$

$$\hat{\theta} = \frac{p^2 + K'1_p}{(p^2 + K'1_p + K'2)} (\omega_{Tm} + \omega_0) + \frac{K'2_p}{p^2 + K'1_p + K'2} \theta_{Tmf}$$

3-2 Optimisation des gains

L'optimisation des gains est effectuée par un programme décrivant l'organigramme suivant :



Autrement dit : on se fixe 2 bornes ω_1 et ω_2 pour la bande passante du système. Ces bornes définissent le temps de convergence des filtres. On discrétise l'intervalle (ω_1, ω_2) . Pour chaque pulsation ω_i on peut calculer les gains $K'1$ et $K'2$, en imposant un amortissement de 0.7 :

$$p^2 + 2\xi_i \omega_i p + \omega_i^2 = p^2 + K'1_p + K'2$$

$$\xi_i = 0.7$$

$$K'2 = \omega_i^2$$

$$K'1 = 1.4 \omega_i$$

Pour ce jeu de gains on calcule le "bilan de pointage" associé, c'est-à-dire qu'on calcule l'effet maximal de chaque erreur senseur sur l'estimé $\hat{\theta}$

Exemple : effet d'un bruit blanc du STD

on a :

$$\frac{\hat{\theta}}{\theta_{Tmf}} = \frac{K'1_p + K'2}{p^2 + K'1_p + K'2} = F(p)$$

Si θ_{Tmf} est un bruit blanc d'écart-type δ_1 , l'erreur correspondante est un bruit blanc d'écart δ_2 type δ_2 défini par :

$$\frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} F(p) F(-p) dp$$

Effet d'une erreur orbitale des gyromètres

On a :

$$\frac{\hat{\theta}}{\omega_{Tm}} = G(p)$$

Lorsque ω_{Tm} est une erreur orbitale d'amplitude A, $\hat{\theta}$ est une erreur orbitale d'amplitude B avec :

$$B = A |G(j\omega_0)|$$

La somme des différentes erreurs constitue le bilan de pointage pour le jeu de gains considéré. On choisit finalement le jeu de gains qui donne le bilan minimal.

ESTIMATION D'ATTITUDE OPTIMALE D'UN SATELLITE ORBITE BASSE A DETECTION
OPTICO-INERTIELLE

4- CONCLUSION

L'approche Kalman a permis de définir la structure des algorithmes embarqués, ainsi que d'étudier l'observabilité du système considéré. L'originalité de la méthode d'optimisation a alors résidé dans la formalisation par fonctions de transfert continues en p du filtre numérique obtenu (passage discret \rightarrow continu) alors que ce filtre était lui-même le résultat d'un passage continu \rightarrow discret des équations d'évolution et de mesure.

Les fonctions de transfert en p ont alors été un moyen très commode d'étudier l'impact d'erreurs de mesure modélisées de façon complexe, que la méthode de recherche des gains optimaux limite de Kalman n'aurait pu prendre en compte.

Les résultats théoriques de cette méthode ont été validés par simulation. Ce type de filtre sera embarqué sur le Satellite Probatoire d'Observation de la Terre (SPOT), en 84, ainsi que sur la famille des satellites d'orbite basse qui en dériveront.