NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

APPLICATION DE LA THEORIE DES GROUPES DE LIE A LA RECONNAISSANCE DES FORMES

H. DEBART

SINTRA/ALCATEL 1, Avenue A. Briand 94117 ARCUEIL CEDEX

RESUME

RESUME

Pour classer un objet inconnu, une méthode classique consiste à la comparer à des masques fixes. Mais on peut aussi appliquer une série de transformations à l'objet pour l'appliquer au mieux sur un modèle donné.

La seule façon pratique d'opérer est d'appliquer des transformations appartenant à un groupe : groupe de LIE à un paramètre et de caractère cyclique. Un groupe à plusieurs paramètres n'est utilisable que s'il se décompose en groupes quotients successifs, chacun à un paramètre : on peut citer l'exemple de la division arithmétique ou on explore les groupes quotients successifs des nombres modulo 10^n, 10^{n-1}, 10^{n-2}, etc.

On montre qu'on peut interpoler une matrice de permutation par un groupe de LIE, lui-même approximé par un groupe fini qui réalise l'interpolation des objets d'une classe. Sur ce groupe à un paramètre, la théorie des algèbres de LIE permet de construire un groupe résoluble, donc formé de groupes quotients successifs.

Cette construction permet d'appliquer des transformations successives de façon fort simple à un objet pour le rapprocher d'un modèle ; ce qui entraîne la reconnaissance si le rapprochement est convergent.

SUMMARY

SUMMARY

In the field of pattern recognition, an old and classical method to classify an unknown object consists of a comparison with a given mask. But it is possible to transform sequentially the object so as to match it optimally to a given pattern. The only way to achieve this is using a group of transformations, and specially an one-parameter LIE group, of cyclical nature. A many-parameter LIE group is usable just if it splits in successive quotient groups (whose each is an one-parameter group). As simple example, let us take arithmetic (EUCLIDE) division, where the successive quotient groups of the integers modulo 10^n, 10^{n-1}, etc. are searched.

In this paper it is shown that any permutation matrix can be interpolated by a LIE group (itself approximated by a finite cyclical group) therefore the interpolation "pictures-to-movies" of a class of objects can be achieved.

From this one-parameter group, the theory of LIE algebras gives a way to construct a many-parameters solvable group, i.e. splitting in successive quotient groups.

This construction can be applied to an unknown object so as to match it to a given pattern.

1. INTRODUCTION

On s'efforce d'appliquer le principe suivant : pour reconnaître un objet inconnu, on lui applique une série de transformations linéaires pour essayer de le faire coïncider avec un objet type de la classe à reconnaître.
Pratiquement, ceci est possible si les transformations appartiennent à un groupe. En effet, le groupe a un élément primitif G et en appliquant les transformations successives.

$$G,\ G^2,\ G^3,\ \ldots\ G^n\ \ldots,$$

on explore tout le groupe.

La même remarque vaut pour un groupe continu de transformations, qu'on approximera par un groupe fini :

L'exemple le plus simple est bien sur celui des rotations du plan. Mais on remarque aussitôt qu'on ne peut explorer utilement qu'un groupe à un paramètre il faut de plus qu'il ait un caractère cyclique, sinon l'exploration n'a pas de fin.

Si on prend comme exemple la simple division numérique, on voit qu'on détermine successivement le chiffre des 10 000, des 1 000, des 100, des 10, des unités, par exemple c'est-à-dire, qu'on effectue une recherche dans des groupes quotients successifs définis à partir du groupe des nombres entiers.

Nous essayons d'appliquer le même principe à des objets quelconques, d'abord en parcourant la classe par un groupe de LIE à un paramètre comme il va être montré, puis en construisant des groupes quotients successifs, s'emboîtant les uns dans les autres, permettant de poursuivre la recherche de façon hiérarchisée.

2. RAPPEL DE QUELQUES PROPRIETES DES GROUPES

a) Groupes finis :
Un groupe fini a n éléments e, $g_2 \ldots, g_n$ (e élément unité) peut se représenter par des matrices (nxn) ; c'est la représentation REGULIERE du groupe.

Ces matrices sont des matrices de permutation : un élément est considéré comme un opérateur de permutation sur l'ensemble des éléments du groupe.

Leurs valeurs propres sont des racines d'ordre n de l'unité ; si l'élément du groupe est primitif les racines sont toutes distinctes.

EXEMPLE : $\left|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$ matrice de permutation (4x4) a pour valeurs propres 1,i,-1,-i

Les vecteurs propres associés sont :

$$(1)\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix} \quad (i)\begin{matrix}1\\i\\-1\\-i\end{matrix} \quad (-1)\begin{matrix}1\\-1\\1\\-1\end{matrix} \quad (-i)\begin{matrix}1\\-i\\-1\\i\end{matrix}$$

b) Groupes de LIE :

α) groupes à un paramètre :

Un groupe continu de transformations dans l'espace à n dimensions peut se définir par l'opérateur infinitésimal

$$I_n + \varepsilon M$$

M est le GENERATEUR du groupe.

L'application répétée de cet opérateur fournit l'opérateur $(I_n + \varepsilon M)^n$.
Si ε tend vers 0 avec nε = K, l'opérateur finiprend la forme e^{KM}.

La fonction matricielle e^{KM} a les propriétés suivantes :
- si la matrice M peut se diagonaliser sous la forme :

$$H \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix} H^{-1}$$ ($m_1 \ldots m_n$ sont les valeurs propres)

La matrice e^{KM} peut se diagonaliser sous la forme

$$H \begin{bmatrix} e^{Km_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{Km_n} \end{bmatrix} H^{-1}$$

- si m subit une transformation par similitude $K^{-1}MK$ la fonction e^{KM} subit la même transformation :

$$K^{-1}e^{KM}K$$

ce qui est une conséquence immédiate de la propriété précédente.

β) Groupes à plusieurs paramètres

Ils sont caractérisés par les générateurs $M_1 \ldots M_j$ si le groupe comprend j paramètres.

Ces générateurs ne sont pas quelconques, le commutateur $\{M_a, M_b\} = M_a M_b - M_b M_a$ est aussi un générateur donc :

$$\{M_a, M_b\} = \sum_i^j C^c_{ab} M_c$$

Les constantes C^c_{ab} sont les CONSTANTES DE STRUCTURE.

Les générateurs $M_1 \ldots M_j$ définissent une algèbre linéaire de LIE à j dimensions avec la loi de composition ci-dessus définie.

Cette loi n'est pas associative mais obéit à l'identité de JACOBI :

$$\{\{M_a,M_b\},M_c\}+\{\{M_b,M_c\},M_a\}+\{\{M_c,M_a\},M_b\} = 0$$

L'étude des groupes de LIE peut être ramenée à l'étude de l'algèbre des générateurs.

On trouve deux catégories principales d'algèbres.

On considère l'ensemble L des générateurs $M_1 \ldots M_j$ puis l'ensemble des commutateurs (L,L) = L' ou algèbre dérivée, puis l'ensemble (L', L") = L" ... etc.

1. L' a le même nombre de dimensions que L.

   Il en est alors de même de toutes les algèbres dérivées successives. L est dit "SEMI SIMPLE".

EXEMPLE : rotations dans l'espace :

$(M_a, M_b) = M_c$

$(M_b, M_c) = M_a$

$(M_c, M_a) = M_b$

2. L' a moins de dimensions que L, puis L" moins de dimensions que L'... on arrive ainsi à un espace nul. L est dit "RESOLUBLE".

EXEMPLE : Algèbre quelconque à deux dimensions

$(M_a, M_b) = \alpha M_a + \beta M_b$

L' est alors formé d'un seul commutateur et L" est nul.

A une algèbre donnée quelconque correspond alors un sous-groupe invariant.
On prend comme base de l'espace à j dimensions une base comprenant les générateurs du sous-groupe. Les autres définissent alors le groupe quotient correspondant.

3. <u>INTERPOLATION D'UNE CLASSE PAR UN GROUPE DE LIE A I DIMENSION</u>

Considérons une matrice de permutation telle que :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & - & - & - & - & - & - & - \\ \hline \\ \hline \\ 1 & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

(nxn) : Comme on l'a vue, on peut la diagonaliser sous la forme :

$$S \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & e^{\frac{2i\pi}{n}} & & \\ & & e^{\frac{4i\pi}{n}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} \end{bmatrix} S^{-1}$$

S est la matrice ayant pour colonnes les vecteurs propres.

On peut donc la considérer comme la matrice de transformation d'un groupe de LIE à un paramètre dont le générateur est :

$$S \quad 2i\pi \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (n-1) \end{bmatrix} S^{-1} \qquad = M$$

Ce groupe de LIE peut être approximé par l'opérateur :

$(I + \varepsilon M)^n$

si ε est assez petit, $(I + \varepsilon M)$ est alors un opérateur d'interpolation.

Considérons alors une classe d'objets définie par n échantillons, vecteurs $V_1 \ldots V_n$.

On peut interpoler la permutation $V_1 \to \ldots V_n \to V_1$ par l'opérateur :

$K(I+\varepsilon M)K^{-1} = I+\varepsilon KMK^{-1}$

Si K est la matrice formée avec les vecteurs colonnes : $K = (V_1 \ldots V_n)$.

L'interpolation sera réalisée en pratique, par un élément fini du groupe, c'est-à-dire :

$$K \quad S \begin{bmatrix} 1 & & \\ & e^{\frac{2i\pi}{n}\frac{1}{M}} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\frac{(n-1)2\pi}{n}\frac{1}{M}} \end{bmatrix} S^{-1}K^{-1}$$

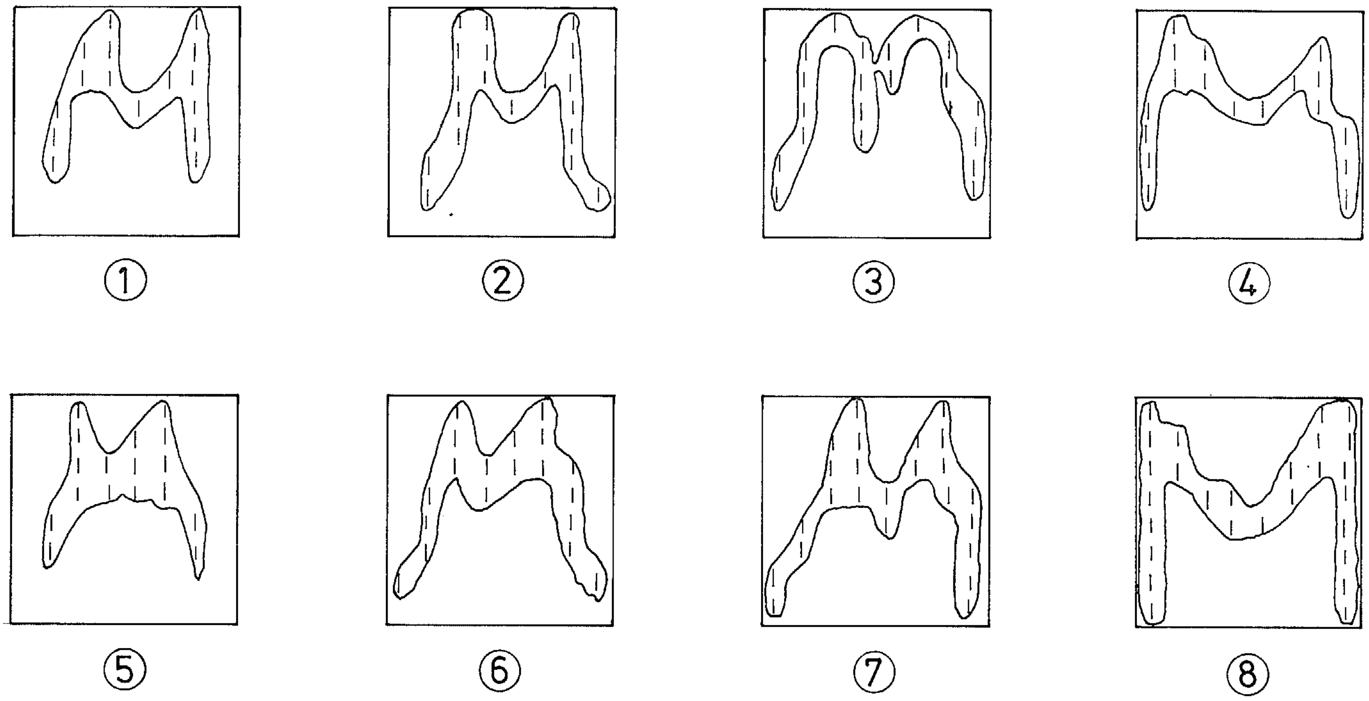
d'autant plus fine que M sera plus grand.

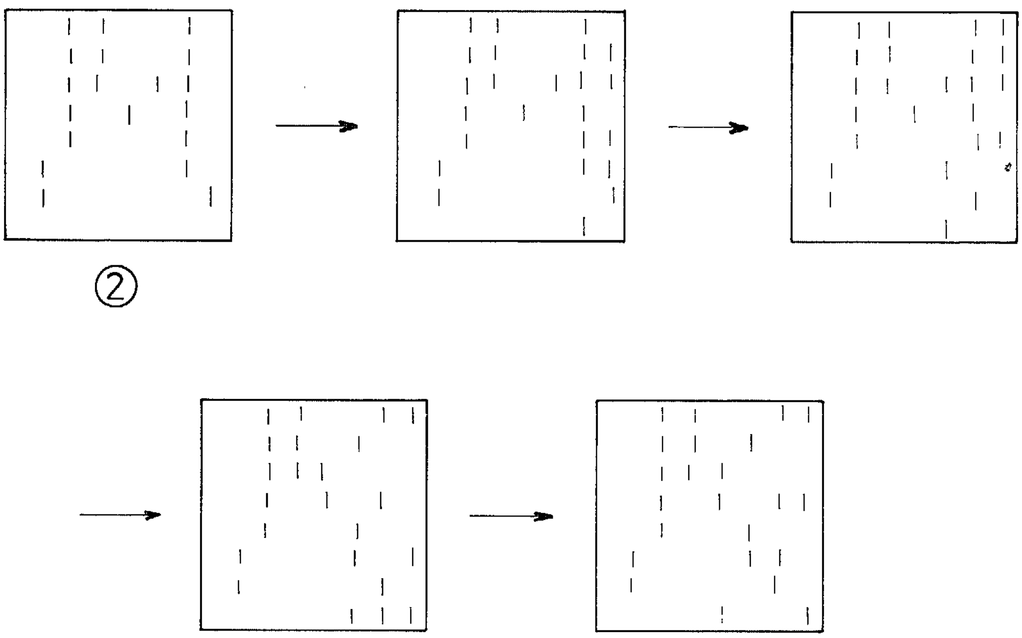
On réalise donc ainsi l'opération qui permet de transformer n vues fixes en cinéma : par exemple, on peut imaginer un dessin animé avec n dessins et l'interpolation de LIE permettant de reconstituer les dessins intermédiaires <u>par application répétée d'une transformation unique</u>.

4. <u>EXEMPLE</u>

On a défini une classe de lettres M par huit échantillons. On analyse chaque lettre par 8x8 points (binaires). On forme des vecteurs colonnes à 8 dimensions en représentant l'image de chaque ligne par un nombre binaire. On effectue l'opération définie ci-dessus en insérant 100 images entre chaque couple d'images données.

La figure représente les quatre premières interpolations quand on va de l'image (2) à l'image (3).


1
2
3
4
5
6
7
8


2

5. CONSTRUCTION D'UN GROUPE DE LIE A 2n PARAMETRES

L'idée est celle-ci : construire un groupe de LIE à plusieurs paramètres, appuyé sur le groupe à 1 paramètre défini ci-dessus et constitué de groupes quotient successifs, c'est-à-dire, RESOLUBLE.

L'algèbre de LIE est susceptible d'une représentation matricielle ; on dispose de la matrice de représentation du premier générateur :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & 0 \\ & & & 3 & \\ 0 & & & & 4 \end{bmatrix}$$

à une similitude près, qui ne change pas les relations de commutation, donc les autres générateurs peuvent être cherchés sous cette forme.

Pour les construire, il faut se rappeler un théorème de LIE :

- quand une algèbre est résoluble, les matrices de représentation des éléments des algèbres dérivées sont NILPOTENTES, c'est-à-dire qu'il existe toujours une puissance entière de chaque matrice qui est identiquement nulle,
- on en déduit que les matrices de représentation se ramènent à la forme triangulaire supérieur :

$$\begin{bmatrix} 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

par exemple.
On remarque alors que :

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & 0 \\ 0 & & & 3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & a & & \\ & & b & \\ 0 & & & c \\ & & & \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & a & & \\ & & b & \\ & & & c \\ & & & \end{bmatrix}$$

de même pour toutes les matrices qui se réduisent à une diagonale du triangle supérieur.

Il existe alors une solution générale de construction des générateurs du groupe.

Représentons les premiers pour n = 8

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 2 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 4 & & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 6 & \\ & & & & & & & 7 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

On constitue ainsi un groupe de LIE à 2n paramètres: $\{M_i, M_j\}$ ne comprend que des matrices d'un indice supérieur à Max (i,j) le groupe est alors résoluble.

Les groupes quotients définis par $M_2 \ldots M_p$ sont NILPOTENTS.

L'opération de transformation peut alors se dérouler autrement :

Par exemple : $M_2^7 = 0$

donc : $e^{KM_2} = 1 + \frac{K^2 M_2}{1\,!} + \ldots + \frac{K^6 M^6}{6\,!}$

C'est un simple polynome qu'on peut construire facilement.

Si on prend $K = 1 - e^{i\varphi}$
le groupe est cyclique et peut être exploré ; il en est de même des suivants.

6. PROCEDE DE RECONNAISSANCE

La matrice M_1 étant construite, on explore le premier groupe quotient, jusqu'à se rapprocher au mieux d'un modèle prédéterminé faisant partie de la classe.

On forme alors les matrices $M_2 M_3 \ldots$ en appliquant aux matrices ci-dessus la similitude $KSM_i S^{-1} K^{-1}$ qui a déjà été utilisée et on explore les groupes quotients de façon à converger vers le modèle, si la convergence atteint un certain degré, l'objet est reconnu.

Les calculs numériques sont simples ; il suffit d'inverser la matrice K, les autres calculs sont triviaux.

7. CONCLUSION

Il parait probable que la théorie des groupes de LIE est utile dans le domaine de la reconnaissance de formes ; si on admet le principe d'une transformation de l'objet à reconnaître, le groupe est le seul moyen d'aborder numériquement cette transformation.