

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

899



NICE du 16 au 20 MAI 1983

COMPARAISON EXPERIMENTALE DES METHODES PARAMETRIQUES D'ANALYSE SPECTRALE
APPLIQUEES AUX SIGNAUX DE TELEMESURES SPATIALES

F. CASTANIE - P. SOULE

G.A.P.S.E. (Groupe d'Analyse des Processus Stochastiques en Electronique)
INP-ENSEEIH, 2, rue Ch. Camichel, 31071 TOULOUSE Cedex

RESUME

Le développement des méthodes de modélisation paramétrique des processus discrets permet l'analyse spectrale de signaux sur des échantillons courts avec des performances en général meilleures que la Transformée Discrète de Fourier. Les méthodes présentées ici (AR, ARMA, Prony étendue, Prony harmonique) ont été retenues pour les résultats intéressants obtenus dans le traitement des signaux de télémesures spatiales. Leur comparaison expérimentale sur différents types de signaux est commentée et un tableau en résumé caractéristiques et performances.

SUMMARY

The increasing use of modelization of discrete processes allows spectral analysis on short samples, with generally better performances than Discrete Fourier Transform based methods. The methods dealt with in the paper (AR, ARMA, Extended and Harmonic Prony's) have been chosen for the good results they exhibit in the processing of spatial telemetry signals. The experimental comparisons on several kinds of signals are commented and the main characteristics and results are summarized.



COMPARAISON EXPERIMENTALE DES METHODES PARAMETRIQUES D'ANALYSE SPECTRALE
APPLIQUEES AUX SIGNAUX DE TELEMEASURES SPATIALES

INTRODUCTION

L'estimation de caractéristiques spectrales de signaux discrets déterministes ou stochastiques est généralement basée sur l'utilisation de la FFT. Cette approche de l'analyse spectrale se révèle intéressante du point de vue calculabilité et donne des résultats satisfaisants pour une large classe de signaux. Cependant plusieurs inconvénients inhérents à la méthode en limitent ses performances : la résolution en fréquence inverse du nombre d'échantillons et l'effet de fenêtre qui peut se manifester dans le domaine spectral par une perte importante d'information (distorsion et masquage des motifs spectraux présents). L'utilisation de fenêtres appropriées peut réduire ces inconvénients mais au prix d'une perte de résolution, et surtout représente une approche "par tâtonnements".

Ces limitations de la FFT se révèlent particulièrement pénalisantes lors de l'analyse de processus localement stationnaires, où les intervalles "raisonnables" de stationnarité sont courts, ce qui se rencontre fréquemment dans les signaux de télémesures. L'utilisation de méthodes d'estimation spectrale plus performantes sur de courts échantillons telles les méthodes paramétriques représentent alors une alternative intéressante.

L'objet de cette présentation est la comparaison expérimentale de quelques-unes d'entre elles sélectionnées pour leurs performances obtenues sur la classe des signaux de télémesures (produit BT faible). Une brève description des méthodes proposées (AR, ARMA, Prony "étendu", Prony harmonique) sera suivie de leur application à des signaux tests permettant de comparer les performances de chacune pour les différents types de signaux rencontrés dans les télémesures spatiales. Un tableau récapitulatif résumera ensuite les résultats obtenus. (*)

1 - MODELISATION AR

Tout signal à temps discret aléatoire et stationnaire peut se représenter au moins par ses propriétés du second ordre par un modèle AR d'ordre p suffisamment élevé. Soit :

$$x_n = \bar{a}^T \bar{x}_n + u_n \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \bar{a}^T &= [a_1, \dots, a_p] \\ \bar{x}_n^T &= [x_{n-1}, \dots, x_{n-p}] \\ u_n &= \text{bruit blanc discret} \\ &\text{centré de variance } \sigma_u^2 \end{aligned}$$

La dimension optimum p des vecteurs \bar{a} et \bar{x}_n est obtenue par l'utilisation d'un critère approprié (Akaike [1], FPE [2], ...)

Le vecteur régression \bar{a} est calculé en fonction des mesures de corrélations par des expressions du type :

$$\begin{aligned} \bar{a} &= r^{-1} \bar{c} && \text{(Yule-Walker)} \\ \text{avec } \bar{c} &= E[x_n \bar{x}_n^T] && r = E[\bar{x}_n \bar{x}_n^T] \end{aligned}$$

Dans la pratique, les algorithmes s'inspirent de cette formulation pour estimer \bar{a} à partir des estimations de r [3] [4]. Le passage de u_n à x_n est alors un filtrage linéaire dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(z) = \left[1 - \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \right]^{-1}$$

La densité spectrale de x_n est alors :

$$S(f) = \sigma_u^2 |H(z)|^2 \quad z = e^{j2\pi f}$$

2 - MODELISATION ARMA

Le modèle a ici pour expression :

$$x_n = - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + \sum_{k=0}^q b_k u_{n-k}$$

avec $b_0 = 1$
 $u_n = \text{bruit blanc discret centré de variance } \sigma_u^2$

Il s'agit d'un filtrage par un filtre de transmittance

$$\frac{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

La fonction d'autocorrélation s'écrit alors :

$$R_{xx}(1) = - \sum_{k=1}^p a_k R_{xx}(1-k) + \sum_{k=0}^q b_k R_{ux}(1-k)$$

avec $R_{ux}(k) = 0$ pour $k > 0$

Cette équation obéit à une récurrence de Yule-Walker pour $k > q$ ce qui permet d'obtenir ainsi une première estimation $\hat{D}(z)$ du dénominateur de $H(z)$. En filtrant x_n par $\hat{D}(z)$ le spectre obtenu aura une fonction de transfert associée :

$$N(z) H(z) \hat{D}(z)$$

L'approximation sera probablement grossière, mais en estimant les zéros de $H(z) \hat{D}(z)$, on pourra obtenir une estimation initiale $\{\hat{b}_k\}$ des paramètres $\{b_k\}$. Un algorithme d'optimisation itératif (de type gradient par exemple) utilisé pour affiner le calcul des paramètres peut ne pas converger [5]. Il y a donc une complexité de calcul plus importante que pour le modèle AR, de plus le choix du nombre de paramètres $\{a_k\}$ et $\{b_k\}$ est assez arbitraire. Nous nous sommes limités à un modèle (5,5) qui s'est révélé en pratique suffisant pour les signaux que nous avons eu à traiter.

Le spectre ARMA s'écrit alors :

$$S(f) = \frac{\sigma_u^2 |N(z)|^2}{|D(z)|^2} = \frac{\sigma_u^2 \left| 1 + \sum_{k=1}^q b_k \exp(-j2\pi f k \Delta t) \right|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k \exp(-j2\pi f k \Delta t) \right|^2}$$

$z = e^{j2\pi f}$

3 - MODELISATION DE PRONY ETENDU

Le modèle du signal est ici un ensemble de p exponentielles d'amplitudes, fréquences, phases et coefficients d'amortissement appropriés :

$$\hat{x}_n = \sum_{m=1}^p b_m z_m^n \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} b_m &= A_m \exp(j\theta_m) \\ \text{avec } z_m &= \exp(\alpha_m + j2\pi f_m \Delta t) \end{aligned} \quad (2)$$

Il s'agit alors de trouver l'ensemble $\{A_m, \theta_m, \alpha_m, f_m\}$ et p qui minimise l'erreur quadratique :

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - \hat{x}_n|^2$$

La résolution de ce problème non linéaire s'effectue de façon itérative [6], cependant une résolution non itérative donnant des résultats satisfaisants est basée sur l'approche dite de Prony.

On reconnaît dans (1) la solution d'une équation polynomiale du type :

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^p (z - z_k) = \sum_{i=0}^p a_i z^{p-i} = 0 \quad \text{avec } a_0 = 1 \quad (3)$$

COMPARAISON EXPERIMENTALE DES METHODES PARAMETRIQUES D'ANALYSE SPECTRALE
APPLIQUEES AUX SIGNAUX DE TELEMESURES SPATIALES

où $\Psi(z)$ a pour racines les exponentielles complexes de (2).

On démontre alors que les coefficients a_i sont obtenus à partir de l'équation suivante [7] :

$$x_n = - \sum_{m=1}^p a_m x_{n-m} + \sum_{m=0}^p a_m e_{n-m} \quad p \leq n \leq N-1$$

avec $e_n = x_n - \hat{x}_n$

De telle façon que :

$$\sum_{n=p}^{N-1} |e_n|^2 \quad \text{soit minimale.}$$

Ceci conduit à un système non linéaire difficile à résoudre. L'approche de Prony consiste à changer le critère de minimisation. On définit alors :

$$\mathcal{E}_n = \sum_{m=0}^p a_m e_{n-m}$$

On minimise la quantité $\sum_{n=p}^{N-1} |\mathcal{E}_n|^2$

Ceci est bien sûr un artifice destiné à faciliter le calcul, cependant on peut noter que $\{\mathcal{E}_n\}$ représente l'erreur de prédiction qui résulterait de l'usage des coefficients $\{a_i\}$ décrits par (3) avec une excitation différente d'un bruit blanc.

La suite $\{e_n\}$ constitue par contre l'erreur de modèle liée à la modélisation de Prony. Ce critère semble arbitraire, néanmoins les résultats obtenus justifient ce choix. On se ramène donc à l'estimation de paramètres A_m pour obtenir les $\{a_i\}$. La recherche des racines de (3) donne alors les paramètres α_m et f_m .

L'expression (1) devient donc un système d'équation linéaire où le choix de $\{b_m\}$ se fera par minimisation quadratique : on obtient alors les paramètres A_m et θ_m .

Le problème du choix de l'ordre p du modèle est identique à celui de la détermination du nombre optimum de pôles du filtre AR.

Si l'on suppose que le processus $x(t)$ possède une enveloppe symétrique par rapport à l'origine on a pour $x(t)$ réel la fonction d'approximation suivante :

$$\sum_{m=1}^p A_m e^{\alpha_m |t|} \cos(2\pi f_m t + \theta_m)$$

Sa densité spectrale est alors donnée par :

$$S(f) = |X(f)|^2$$

$$\text{avec } X(f) = \sum_{m=1}^p A_m \alpha_m \left[\frac{e^{j\theta_m}}{\alpha_m^2 + 2\pi(f-f_m)^2} + \frac{e^{-j\theta_m}}{\alpha_m^2 + 2\pi(f+f_m)^2} \right]$$

Il faut noter que cette estimation donne des pics linéairement proportionnels à la puissance des termes périodiques, cependant le bruit agit de façon parfois importante sur la précision d'estimation des paramètres provoquant un lissage du spectre par l'obtention de coefficients d'amortissement trop grands.

4 -- METHODE DE PRONY HARMONIQUE

Pour un processus comportant des raies noyées dans du bruit le modèle utilisé devient :

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^p A_k \cos(2\pi f_k n \Delta t + \theta_k) = \sum_{k=1}^p [c_k z_k^n + c_k^* z_k^{*n}] \quad (4)$$

où :

$$c_k = A_k \exp(j\theta_k)$$

$$z_k = \exp(j2\pi f_k \Delta t)$$

Le polynôme $\prod_{k=1}^p (z-z_k) (z-z_k^*) = \sum_{k=0}^{2p} g_k z^{2p-k} = 0 \quad (5)$

possède alors les exponentielles complexes de (4) pour racines.

On démontre alors qu'une minimisation quadratique de la quantité :

$$R_p = \sum_{k=p+1}^{N-p} e_k^2 \quad \text{avec : } e_k = \sum_{k=0}^p g_k (x_{n+k} + x_{n-k}) \quad (6)$$

conduit aux équations suivantes :

$$\sum_{k=0}^p g_k S_p(k,l) = 0 \quad 1 \leq j \leq p \quad (7)$$

$$\text{où : } S_p(k,l) = \sum_{i=p+1}^{N-p} (x_{i-k} + x_{i+k}) (x_{i-1} + x_{i+1})$$

La solution de (7) permet d'obtenir les coefficients g_k puis de calculer les racines z_k du polynôme (5) et donc les paramètres f_k .

Une minimisation quadratique de l'équation (4) conduit au système d'équations suivant :

$$\sum_{i=1}^p \left[c_i \sum_{j=1}^N (z_k z_i)^j + c_i^* \sum_{j=1}^N (z_k^* z_i^*)^j \right] = \sum_{j=1}^N (2\text{Re } z_k^j) x_j$$

pour $k = 1, \dots, p$

La solution fournit les c_i et les paramètres phases et amplitudes des sinusoides θ_k et A_k .

Un algorithme rapide dû à J.R. MARPLE [8] a été utilisé pour le calcul des g_k dans l'équation (7).

Le choix du nombre p de sinusoides présentes dans le signal se fait en surveillant pour chaque valeur de p la quantité R_p dans l'équation (6) et en prenant l'ordre correspondant au premier minimum.

5 - COMPARAISON EXPERIMENTALE DES METHODES PROPOSEES

Nous avons utilisé comme séquences de test les cinq types de signaux les plus courants dans les télémessures.

- signal déterministe
Il s'agit d'une exponentielle décroissante
- signal "tout pôles"
processus passe-bas ordre 6 généré par filtrage d'un bruit blanc gaussien de variance σ_u^2
- signal "ARMA"
signal obtenu par filtrage de Caueur 3e ordre (pôles et zéros) d'un bruit blanc discret gaussien de variance σ_u^2 .
- Raies pures
signal comprenant 3 sinusoides aux fréquences suivantes : $-f = 0,1f_E$; $f = 0,3f_E$; $f = 0,35f_E$; la raie $0,1f_E$ ayant une puissance de 17dB inférieure aux deux autres.
- Raies + bruit (gaussien, centré)
signal composé des 3 sinusoides suivantes :

$-f = 0,1f_E$	S/B = 9dB
$-f = 0,3f_E$	S/B = 17dB
$-f = 0,35f_E$	S/B = 17dB

6 - RESULTATS

L'estimation de la densité spectrale par chacune des méthodes proposées a été réalisée sur les mêmes séquences de chacun des processus décrits ci-dessus. Nous allons examiner pour chaque type de signal les remarques qu'appellent les résultats obtenus.



**COMPARAISON EXPERIMENTALE DES METHODES PARAMETRIQUES D'ANALYSE SPECTRALE
APPLIQUEES AUX SIGNAUX DE TELEMESURES SPATIALES**

- Signal déterministe

Toutes les méthodes donnent des résultats comparables. La modélisation de Prony étendue fournit cependant une dynamique plus élevée alors que Prony harmonique se révèle incapable de modéliser ce signal.

- Signal AR

Ici aussi toutes les méthodes donnent des résultats équivalents sauf Prony harmonique. Cette méthode, par principe, ne produit que des spectres de raies. La partie "continue" du spectre se trouve donc modélisée par des raies dont l'enveloppe reproduit l'allure du spectre.

Cependant, à performances égales on préférera dans ce cas la méthode AR car la complexité de calcul joue en défaveur des modélisations ARMA et Prony étendue.

- Signal ARMA

Le choix de l'ordre (p,q) optimum du modèle ARMA n'est pas théoriquement résolu, aussi, pour nous rapprocher des conditions réelles d'analyse où le signal est en général inconnu, nous nous sommes fixés l'ordre du modèle à 5 coefficients AR et 5 coefficients MA. Dans ce cas, la modélisation ARMA n'apporte pas d'avantages significatifs et la méthode de Prony étendue se révèle ici plus performante. Il faut aussi noter qu'un algorithme itératif pour affiner l'estimation des paramètres n'a pas produit d'amélioration sensible des résultats.

- Signal harmonique

La méthode de Prony étendue permet de gagner en résolution et en dynamique par rapport aux modélisations AR ou ARMA cependant les meilleures performances sont fournies par Prony harmonique : bonne résolution et représentation des pics à amplitude proportionnelle à leur puissance.

- Signal harmonique + bruit

Mêmes remarques que ci-dessus. Il faut cependant noter l'efficacité de la méthode de Prony harmonique qui se révèle capable de localiser et de représenter correctement la puissance d'une raie avec un rapport S/B de 0dB.

- La méthode AR reste la plus intéressante au niveau du rapport performance/complexité de calcul pour la plupart des signaux à spectre continu. Il faut aussi signaler que la modélisation AR ne concerne pas la linéarité dans la représentation de la puissance relative des raies [9] (alors que les modélisations de Prony en font une description correcte). La modélisation de Prony étendue apporte toutefois une amélioration sensible sur la dynamique du spectre et peut être utilisée pour les signaux comportant des raies noyées dans du bruit avec des performances supérieures à celles de la méthode AR. Les figures 1.a et 1.b montrent un exemple de représentation du spectre d'un signal ARMA (3,3) sur 64 échantillons par les méthodes AR, ARMA et Prony étendue.

- La méthode de Prony harmonique reste réservée à l'extraction de raies noyées dans du bruit où les performances (résolution, linéarité, ...) dépassent alors de loin celles des autres méthodes. Comme il s'agit d'un spectre de raies, cette modélisation est inadaptée à la restitution de spectres continus. De plus, il faut aussi noter que la difficulté de choix de l'ordre du modèle peut parfois conduire à des instabilités numériques lors du calcul. Pour des signaux "composites" (spectre continu + raies) il peut être intéressant d'utiliser cette méthode en association avec la modélisation AR ou Prony étendue : la modélisation de Prony harmonique localisera les raies alors que la modélisation AR ou Prony étendue donnera une bonne représentation de la partie continue du spectre.

Les figures 2.a et 2.b montrent un exemple de représentation d'un signal composite (raies + signal passe-bas AR) par Prony étendue et Prony harmonique (64 éch.).

Le tableau ci-après résume les principales caractéristiques des méthodes proposées.

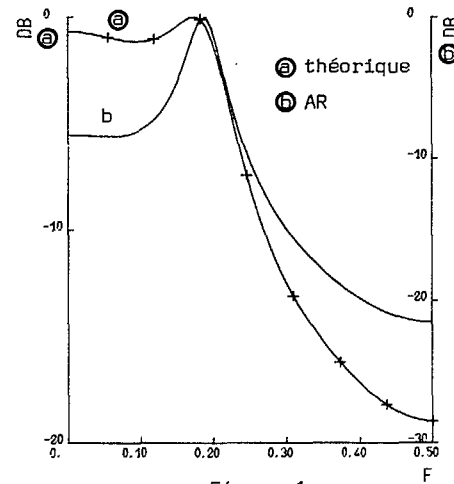


Figure 1a

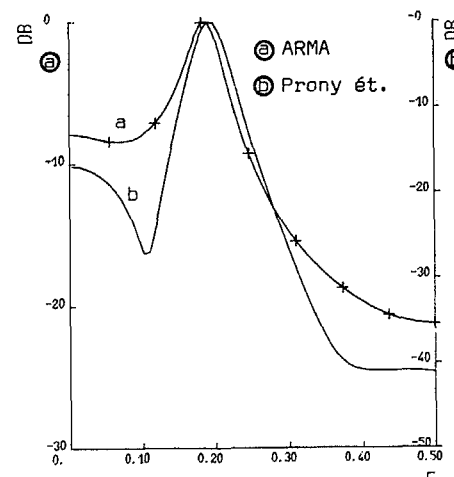


Figure 1b

7 - APPLICATION AUX SIGNAUX DE TELEMESURES SPATIALES

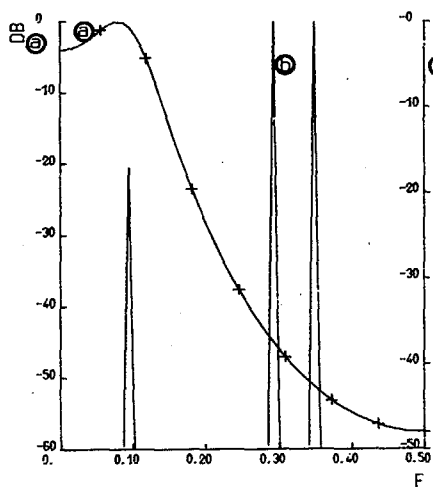
Les résultats obtenus se révèlent satisfaisants et, en général, meilleurs qu'avec la FFT. Les modélisations AR, ARMA et Prony étendue ont des performances comparables pour les spectres continus mais la présence de raies dans le signal (étude des modes par exemple) requiert l'emploi de Prony harmonique. Cependant la diversité des sources de signaux de télémesures (pressions, vibrations, champs EM, comptage de particules etc...) et leur nature en général inconnue nécessite souvent l'emploi simultané de deux méthodes : Prony harmonique pour localiser les éventuelles raies présentes et AR ou Prony étendue pour modéliser la partie continue du spectre.

8 - CONCLUSIONS

Ces résultats nous permettent de tirer les conclusions pratiques suivantes :

- La méthode ARMA, telle que nous l'avons utilisée (ordre (5,5), sans procédure itérative), n'apporte pas d'améliorations sensibles par rapport à la modélisation AR : un signal ARMA peut toujours en effet être représenté par un modèle AR d'ordre suffisant (en pratique : ordre 20 pour les signaux de télémesures, le plus souvent 6 ou 7)

COMPARAISON EXPERIMENTALE DES METHODES PARAMETRIQUES D'ANALYSE SPECTRALE
APPLIQUEES AUX SIGNAUX DE TELEMESURES SPATIALES



Spectre Théorique

Figure 2a

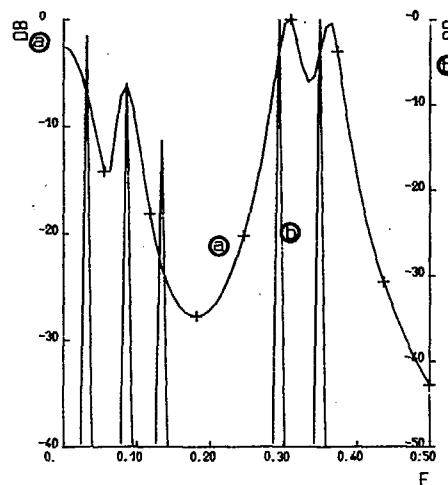


Figure 2b

MODELISATION	AR	ARMA	PRONY ETENDUE	PRONY HARMONIQUE
Type de spectre	continu	continu	continu	discret
Modèle	Autorégressif (tout pôle) Yule-Walker	Fonction de transfert rationnelle (pôles et zéros)	Somme d'exponentielles amorties non-harmoniques ARMA avec coefficients AR et MA égaux	Somme de sinusoides non amorties non nécessairement harmoniques AR et MA égaux
Avantages et Inconvénients	<ul style="list-style-type: none"> - Simplicité - Meilleure résolution que la FFT - sensibilité au bruit - pics non proportionnels à la puissance des termes périodiques - phénomène de dédoublement des raies (line splitting) dans certaines situations [10] 	<ul style="list-style-type: none"> - difficulté du choix du nombre de paramètres AR et MA - complexité de calcul - la méthode itérative d'estimation des paramètres MA ne converge pas toujours vers la solution correcte - résultats pratiques très comparables avec AR 	<ul style="list-style-type: none"> - Représentation proportionnelle à la puissance - résolution aussi bonne que AR, souvent meilleure - complexité de calcul 	<ul style="list-style-type: none"> - choix de l'ordre assez délicat - représentation proportionnelle à la puissance des raies - bonne résolution - représentation de l'enveloppe d'un spectre continu - complexité de calcul
Remarques	<ul style="list-style-type: none"> - stabilité inconditionnelle du modèle - possibilité d'analyse adaptative 	<ul style="list-style-type: none"> - Nécessite une bonne précision des coefficients de corrélation et une méthode itérative d'estimation des paramètres MA pour avoir de bons résultats 	<ul style="list-style-type: none"> - la première étape de la méthode est identique à l'estimation des paramètres AR 	<ul style="list-style-type: none"> - utilise deux étapes de minimisation quadratique.
Utilisation	Tout type de signal à spectre continu	Signaux à spectres continus	Signaux à spectres continus. Eventuellement signaux harmoniques	Raies + bruit

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. AKAIKE : "A new look at statistical model identification" IEEE Trans. Autom. Contr., Vol 19 Dec 74

[2] H. AKAIKE : Fitting autoregressive models for prediction" Ann. Inst. Stat. Math. Vol. 21 1969

[3] J. DURBIN : "The Fitting of time series models" Rev. Inst. Statis. Int. Vol. 28 n°3 pp 233, 243 1960

[4] J.P. BURG : "The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra" Geophysics vol. 37, n°2 Apr. 1972

[5] J. MAKHOUL : "Linear Prediction : a tutorial review" Proc. IEEE vol. 63, n°4 Apr. 1975

[6] H. HOLTZ : "Prony's method and related approaches to exponential approximation" Aerospace Corp., Rep. ATR-73(9990)-5, June 1973

[7] S.M. KAY - S.L. MARPLE JR : "Spectrum Analysis : a modern perspective" Proc. IEEE vol. 69 n°11 Nov. 1981

[8] S.L. MARPLE JR : "Spectral line Analysis via a fast Prony algorithm" Proc. IEEE ICASSP vol. 3 pp 1375-1378 May 1982

[9] R.T. LACOSS : "Data adaptative spectral analysis methods" Geophysics, vol. 36, pp 661-675 Aug. 1971

[10] P.F. FOUGERE, E.J. ZAWALICK, H.R. RADOSKI : "Spontaneous line splitting in maximum entropy power spectrum analysis" Phys. Earth Planetary Int. vol. 12, pp 201-207, Aug. 1976

(*) Ce travail a été réalisé pour le Centre de Traitement des Télémessures du Centre National d'Etudes Spatiales de Toulouse.

[11] F. CASTANIE - P. SOULE : Rapport final SCANSA II Déc. 82 Contrat CNES n° 81/0534

