

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

951



NICE du 16 au 20 MAI 1983

---

ETUDE DES PREMIERES RESONANCES D'UNE SPHERE ELASTIQUE

C.GAZANHES, J.LEANDRE, J.P.SESSAREGO, J.P.HERAULT

LABORATOIRE DE MECANIQUE ET D'ACOUSTIQUE - C.N.R.S. - B.P. 71 - 13277 MARSEILLE Cedex 9.

---

## RESUME

On étudie les premières résonances d'une sphère d'aluminium, immergée dans l'eau, pour des fréquences acoustiques telles que  $3 < k\alpha < 30$  où  $\alpha$  est le rayon de la sphère et  $k = 2\pi/\lambda$  le nombre d'onde.

Ces résonances dépendent des dimensions et de la nature de la cible. La théorie modale permet d'écrire la pression acoustique diffractée par la sphère sous la forme d'une série de fonctions appelées fonctions de forme modales. On peut les représenter par la somme de deux termes ; un terme dit "rigide" et un terme dit "élastique". Si l'on représente ce dernier en fonction de  $k\alpha$ , on obtient des pics qui permettent d'estimer les fréquences et les largeurs des résonances. L'étude expérimentale donne des résultats en bon accord avec la théorie.

## SUMMARY

### STUDY OF THE LOWEST RESONANCES OF AN ELASTIC SPHERE

We have studied the lowest resonances of an aluminium sphere immersed in water for a frequency range such that  $3 < k\alpha < 30$ , where  $\alpha$  is the radius and  $k = 2\pi/\lambda$  the wave number.

The modal theory allows us to represent the acoustical scattered field of the sphere as a sum of functions called the modal form functions. These functions are given by a sum of two terms, the first one called the "rigid term", and the latter called the "elastic term".

If this "elastic term" is plotted versus  $k\alpha$  we obtain numerous peaks from which frequency and width of the resonances can be derived. Experimental study gives results in good agreement with theory.



## 1. INTRODUCTION

Les méthodes acoustiques de reconnaissance ou d'identification de formes connaissent un développement rapide dans de nombreux domaines d'applications tels que le contrôle non destructif des matériaux, l'échographie médicale, l'acoustique sous-marine, etc ... En particulier les techniques de reconnaissance cherchent à modéliser une cible déterminée par des paramètres caractéristiques, si possible faciles à mesurer. Parmi ces paramètres on peut choisir, par exemple, les résonances. Faure et al. [1] ont montré comment les utiliser pour identifier les fonctions de transfert de cylindres élastiques à l'aide d'un modèle auto-régressif. Pour ces cibles de forme simple cette modélisation est facilitée par la connaissance, a priori, des résonances propres.

L'étude des résonances propres n'est pas nouvelle en soi. Dès 1951, J.J.Faran [2] avait pu calculer les premières résonances d'un cylindre élastique de longueur infinie. Il avait également calculé les diagrammes de diffusion angulaire et fait des comparaisons avec des diagrammes expérimentaux. En 1962, R.Hickling [3] analyse la structure des échos réfléchis par des sphères élastiques immergées dans l'eau. Comme J.J.Faran il calcule la pression acoustique diffusée par la sphère à l'aide de la théorie modale. Depuis, H. Uberall et al. [4] ont considérablement perfectionné ce calcul, plus particulièrement en ce qui concerne la réponse de cylindres élastiques.

En France, A.Derem [5] A.Derem et J.L.Rousselot [6] ont appliqué le formalisme de la matrice S à l'étude des résonances de cylindres élastiques. Ils ont donné des tableaux complets de résonances et développé une véritable spectroscopie acoustique des cylindres élastiques. Parallèlement à ce travail théorique des recherches expérimentales sont menées par A.Faure, G.Maze et J.Ripoche [7].

A partir de la théorie modale il nous a semblé intéressant de reprendre ces calculs pour le cas de la sphère d'aluminium. Nous nous sommes limités à la détermination des premières résonances. Nous les avons également identifiées expérimentalement.

## 2. LA THEORIE MODALE ET LES FONCTIONS DE FORME

Le calcul de la pression acoustique diffractée par une sphère élastique de rayon  $a$  est désormais classique [8]. Dans le cas d'une onde plane incidente, de pulsation  $\omega = 2\pi f$ , de nombre d'onde  $\kappa = 2\pi/\lambda$ , la pression acoustique diffractée en un point  $M(r, \theta)$  (Fig. 1) s'écrit :

$$(1) \quad p = p_0 \frac{a}{2r} \exp [i(\omega t - kr)] f_{\infty}.$$

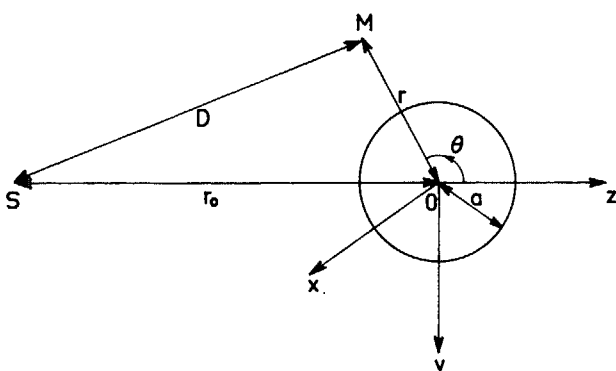


Figure 1

La fonction  $f_{\infty}$  appelée fonction de forme est constituée par une somme discrète de fonctions de forme modales  $f_n$  telles que :

$$f_{\infty} = -\frac{2}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Avec :

$$(2) \quad f_n = (2n+1) P_n(\cos \theta) \sin \eta_n \exp(i \eta_n),$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \eta_n = -\frac{a_n}{b_n},$$

$$(4) \quad \begin{cases} a_n = \zeta_n j_n(ka) - (ka) j_n'(ka), \\ b_n = \zeta_n y_n(ka) - (ka) y_n'(ka), \end{cases}$$

$$(5) \quad \zeta_n = \frac{\rho_0 [(k_2 a)^2 / 2] [(A_n/B_n) - (C_n/D_n)]}{\rho (E_n/B_n) - (F_n/D_n)}.$$

On trouvera en annexe les expressions complètes nécessaires au calcul de  $f_{\infty}$  et de  $f_n$ .

$\rho_0$  et  $\rho$  sont les masses volumiques de l'eau et du matériau constituant la sphère.

$j_n$  et  $y_n$  représentent les fonctions de Bessel sphériques de première et deuxième espèce ;  $j_n'$  et  $y_n'$  sont les dérivées premières par rapport à l'argument. Ces fonctions ne dépendent que de la fréquence par l'intermédiaire de la variable réduite  $ka$ .

$P_n(\cos \theta)$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ , il ne dépend que de l'angle d'observation  $\theta$ . La valeur  $\theta = \pi$  entraîne :

$$P_n(\cos \theta) = (-1)^n$$

et correspond au cas de la rétrodiffusion (Emetteur et Récepteur situés au même point).

La valeur de  $\zeta_n = 0$  dans les expressions (4) correspondant au cas de la sphère rigide.

Pour une sphère d'aluminium et dans l'hypothèse de la rétrodiffusion nous avons calculé le module de  $f_{\infty}$  en fonction de  $ka$ . Les valeurs ont été obtenues sur l'ordinateur Digital-PDP 11/60 avec les paramètres suivants :

- masse volumique de l'aluminium : 2,7 ;
- vitesse des ondes de compression : 6420 m.s<sup>-1</sup> ;
- vitesse des ondes de cisaillement : 3040 m.s<sup>-1</sup> ;
- vitesse du son dans l'eau : 1493 m.s<sup>-1</sup>.

Valeurs moyennes adoptées dans la plupart des publications relatives à ce sujet.

La figure 2 montre les variations du module de  $f_{\infty}$  pour  $ka$  variant de 0,2 à 28 avec un pas de 0,2.

Ce n'est pas assez fin pour mettre en évidence la structure fine de la courbe, structure fine due aux résonances de la sphère, toutefois nous remarquons la présence de nombreux maximums et minimums successifs séparés par un intervalle moyen  $\Delta ka \approx 2,4$ .

R.Hickling [3] a montré que cet intervalle dépendait de la vitesse de cisaillement des ondes ultrasonores dans le matériau constituant la sphère. A partir de cette remarque il pensait pouvoir caractériser le matériau. Soulignons que cette caractérisation nécessite la connaissance, a priori, du rayon de la sphère et que, réciproquement, pour calculer ce dernier il est nécessaire de connaître, a priori, la nature du matériau.

ETUDE DES PREMIERES RESONANCES D'UNE SPHERE ELASTIQUE

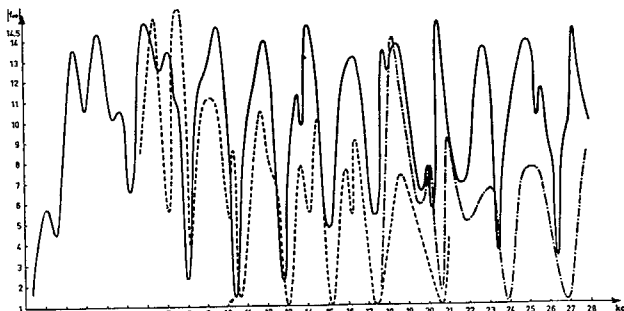


Figure 2

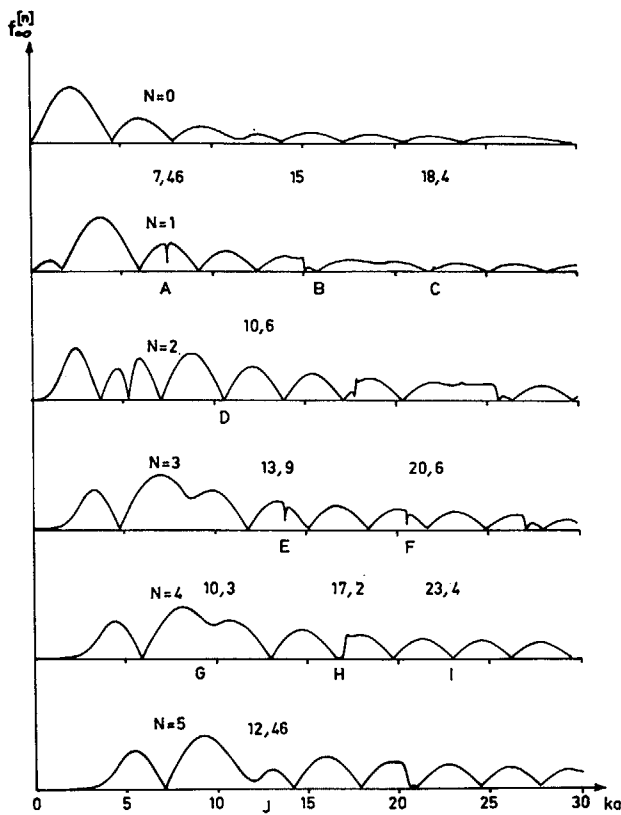


Figure 3

Nous avons également tracé sur la figure 3 les variations des cinq premières fonctions de forme modales  $f_n^E$  dans le même intervalle de  $ka$ .

Les résonances apparaissent mieux ; d'après leurs formes on distingue trois types de structures : crevasses, pics, structures intermédiaires. Nous verrons, dans la partie expérimentale, quel est le rôle de ces trois types de résonances sur la structure de l'écho renvoyé par la sphère.

3. LE FILTRAGE DES RESONANCES

Uberall et al. [4] d'une part, A.Derem [5] d'autre part ont montré que l'on pouvait associer au comportement résonnant de la sphère, un comportement non résonnant correspondant à la sphère rigide. Nous pouvons alors considérer que la fonction de forme modale est la somme d'un terme  $f_n^R$  décrivant le comportement rigide et d'un terme  $f_n^E$  décrivant le comportement élastique, donc les résonances.

Nous écrivons :

(6) 
$$f_n = f_n^R + f_n^E$$

La théorie modale permet de calculer le terme  $f_n^R$ . Pour cela il suffit de prendre  $\zeta_n = 0$  dans l'expression (4).

Nous obtenons ensuite facilement le terme résonnant à partir de l'expression (6) en écrivant :

(7) 
$$f_n^E = f_n - f_n^R$$

La figure 4 représente les variations du module de  $f_n^E$  pour les six premiers modes de vibration d'une sphère élastique en aluminium.

Pour certaines valeurs de la variable  $ka$  les courbes présentent des pics importants : pour d'autres valeurs l'amplitude de ces pics est si faible qu'il sont à peine discernables. Nous pouvons déjà penser que la détermination expérimentale des résonances correspondant à ces valeurs sera très difficile, voire impossible.

Nous avons déterminé les valeurs de  $ka$  pour lesquelles les fonctions  $|f_n^E|$  passent par un maximum.

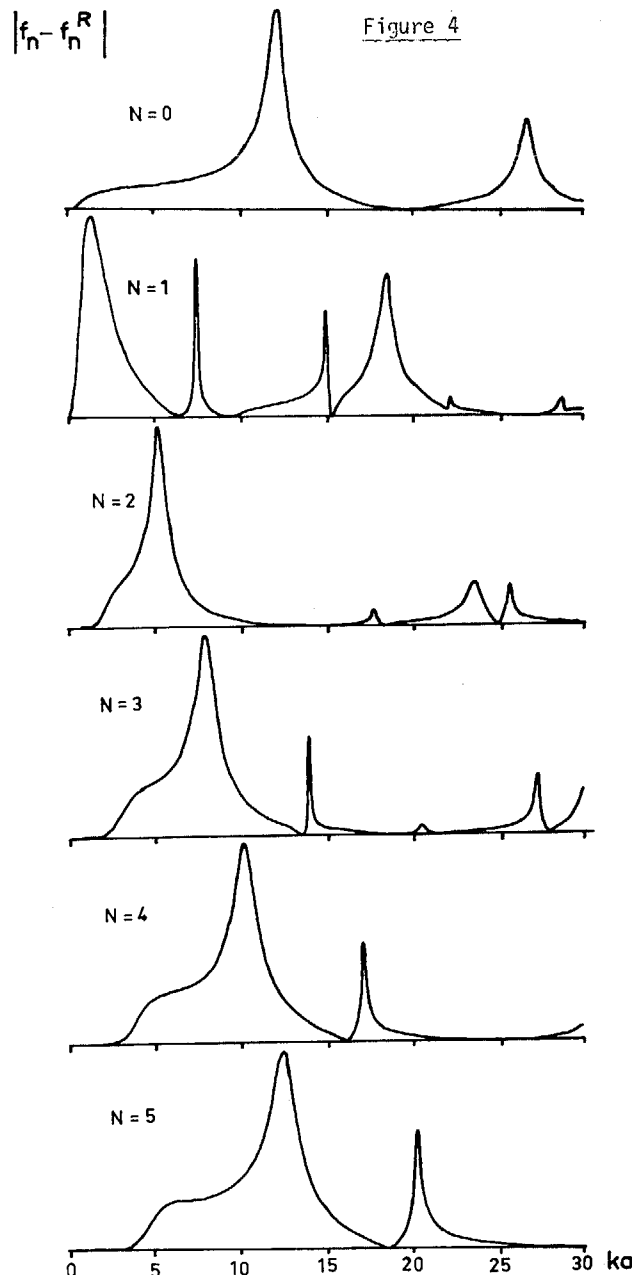
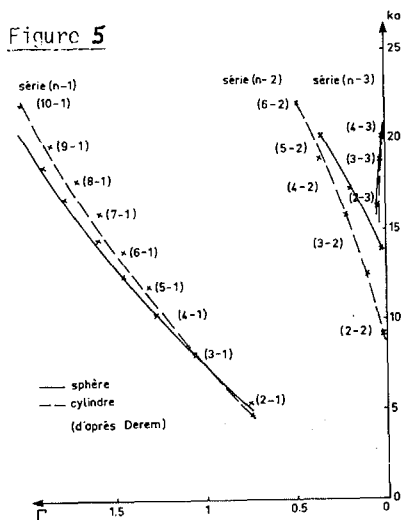




Figure 5



Chaque fois que cela a été possible nous avons également calculé la quantité  $r$  appelée largeur de résonance.

Les valeurs de  $ka$  sont en bon accord avec celles calculées par W.G. Neubauer [9]. Les valeurs de  $r$  n'ont pas été calculées par cet auteur.

Il nous a semblé intéressant de comparer nos valeurs à celles que A. Derem [5] a obtenues dans le cas du cylindre d'aluminium infiniment long, de rayon  $a$ . Pour faciliter cette comparaison nous avons représenté les résultats dans le plan complexe  $(r, ka)$ . Il apparaît sur la figure 5 que les résonances de la sphère et du cylindre sont situées sur des trajectoires voisines ; les largeurs de résonance étant du même ordre de grandeur dans les deux cas.

#### 4. L'ETUDE EXPERIMENTALE ET LES STRUCTURES D'ECHOS

Nous avons mené l'étude expérimentale sur deux sphères d'aluminium (AU 4 G), de 26 et 59 mm de diamètre, immergées dans une cuve acoustique remplie d'eau. Les différents réglages mécaniques ont été réalisés grâce à un banc de mesures composé de la façon suivante :

une poutre métallique de 3m de longueur, mobile dans un plan horizontal au-dessus de la cuve, équipée de deux chariots indépendants se déplaçant sur deux rails de section cylindrique en acier inoxydable trempé et rectifié à  $\pm 0,005$  mm ;

deux transducteurs à large bande, émetteur et récepteur d'ultrasons, placés côte à côte sur l'un des deux chariots mobile de la poutre, chacun des transducteurs est monté sur une tourelle permettant un pointage précis ;

la sphère à étudier est portée par l'autre chariot de la poutre. Elle est suspendue à une tourelle qui permet un réglage vertical. La distance sphère-transducteur est réglable de 0 à 3m.

Le signal train d'ondes appliqué au transducteur émetteur est obtenu à partir d'un synthétiseur de fréquences. Cette technique assure une grande stabilité à la fréquence porteuse ainsi qu'à la cadence de répétition des trains d'ondes.

Leur durée est de  $500\mu s$ , la fréquence porteuse peut varier de 100 à 600 kHz et, dans ces conditions les  $ka$  de 5 à 30. La période de récurrence, égale à 6 ms, a été choisie de façon à pouvoir bien séparer l'écho renvoyé par la sphère des échos para-

sites dus aux réflexions éventuelles sur les parois de la cuve.

Le signal reçu aux bornes du transducteur récepteur est amplifié puis filtré afin d'éliminer les composantes basses fréquences (vibrations des supports en particulier) et d'améliorer le rapport signal sur bruit.

La mesure de l'amplitude de crête du signal se fait sur l'écran d'un oscilloscope préalablement étalonné. La lecture est faite dans la partie centrale comprise entre les transitoires de début et de fin du signal. Elle est particulièrement difficile pour les échos dont la fréquence d'émission coïncide avec une fréquence de résonance de la sphère.

D'une manière générale nous avons constaté que la perturbation subie par l'écho augmente, quand la crevasse se déplace à partir d'un maximum de la fonction de forme modale vers un zéro de celle-ci, la perturbation étant maximale pour une structure intermédiaire.

Toutefois nous avons pu localiser les différentes résonances prévues par la théorie, pour certaines d'entre elles, nous avons pu estimer la valeur de  $r$ .

C'est la largeur de la résonance pour laquelle l'amplitude maximale est diminuée dans le rapport

$1/\sqrt{2}$ . Nous l'avons déterminée à partir de la mesure de la décroissance de l'amplitude du signal qui suit le deuxième transitoire. Cette zone correspond aux oscillations libres de la sphère, on écrira que :

$$p_1/p_0 = \exp\left[-\pi N \frac{r}{(ka)_0}\right],$$

$p_0$  étant l'amplitude du signal au début de la décroissance,  $p_1$  l'amplitude  $N$  périodes plus loin, et  $(ka)_0$  la valeur de la variable réduite correspondant à la résonance.

Nous avons pu localiser avec certitude les résonances, par contre l'estimation correcte de  $r$  n'a pas toujours été possible. Nous avons également tracé sur la figure 2 les valeurs expérimentales correspondant à la mesure de  $|f_{\text{mod}}|$  pour les deux sphères précédentes. Le léger décalage que l'on observe est sans doute dû au fait que les valeurs des paramètres physiques des sphères utilisées diffèrent légèrement des paramètres que nous avons introduits dans le calcul théorique.

#### 5. CONCLUSION

La théorie modale permet de déterminer avec précision les premières fréquences de résonance d'une sphère élastique immergée. Nos résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par G. Neubauer et al, [9] que nous avons complétés par la mesure des valeurs des largeurs de résonance.

Le filtrage des fonctions modales fait apparaître des pointes de résonance dont il est facile de déterminer les caractéristiques. Tracées dans le plan complexe  $(r, x)$  les trois premières séries de résonances se placent sur des trajectoires qui tendent à devenir parallèles à l'axe vertical lorsque l'ordre des résonances augmente.

Nous avons pu également détecter les premières résonances de deux sphères d'aluminium et dans quelques cas mesurer les largeurs  $r$ .

La structure des échos diffusés dépend de la position de la résonance par rapport à la fonction modale.

ANNEXE

$$\begin{aligned}
 A_n &= (k_1 a) j'_n(k_1 a), \\
 B_n &= (k_1 a) j'_n(k_1 a) - j_n(k_1 a), \\
 C_n &= 2n(n+1) j_n(k_2 a), \\
 D_n &= (k_2 a)^2 j''_n(k_2 a) + (n-1)(n+2) j_n(k_2 a), \\
 E_n &= (k_1 a)^2 \left[ \left( \frac{\sigma}{1-2\sigma} \right) j_n(k_1 a) - j'_n(k_1 a) \right], \\
 F_n &= 2n(n+1) [j_n(k_2 a) - (k_2 a) j'_n(k_2 a)], \\
 \sigma &= \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{2(c_1^2 - c_2^2)},
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- {1} A. FAURE et M. FOUBERT, Modélisation d'Objets Résonnants, Revue du CETHEDC, N° 66, p. 41-61, 1981.
- {2} J.J. FARAN, Sound Scattering by Solid Cylinders and Spheres, J. Acoust. Soc. Am., Vol 23, n° 4, p. 405-418, 1951.
- {3} R. HICKLING, An analysis of Echoes from a Solid Elastic Sphere in Water, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 34, n° 2, p. 1582-1592, 1962.
- {4} L. FLAX, L.R. DRAGONETTE et H. UBERALL, Theory of elastic Resonance Excitation by Sound Scattering, J. Acoust. Soc. Am., Vol 63, n° 3, p. 723-731, 1978.
- {5} A. DEREM, Relation entre la Formation des Ondes de Surface et l'Apparition de Résonances dans la Diffusion Acoustique, Revue du CETHEDC, n° 58, p. 43-79, 1979.
- {6} A. DEREM et J.L. ROUSSELOT, Résonances Acoustiques du Cylindre Elastique Infini et leur Relation avec les Ondes de Surface, Revue du CETHEDC, n° 67, p. 1-34, 1981.
- {7} A. FAURE, G. MAZE et J. RIPOCHE, Etude Expérimentale des Modes Normaux d'un cylindre Métallique Plein, Revue du CETHEDC, n° 60, p. 175-188, 1979.
- {8} J.J. BOWMAN, T.B.A. SENIOR et P.L.E. USLENGHI, Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969.
- {9} W.G. NEUBAUER, R.M. VOGT et L.R. DRAGONETTE, Acoustic Reflection from Elastic Spheres, Part I and II, J. Acoust. Soc. Am., Vol 55, n° 6, p. 1123-1137, 1974.

