

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

---

## SUR L'UTILISATION DES TECHNIQUES D'IDENTIFICATION RECURSIVE EN TRAITEMENT DU SIGNAL

I.D. LANDAU

Laboratoire d'Automatique de Grenoble, E.N.S. d'Ingénieurs Electriciens de Grenoble,  
Domaine Universitaire, B.P. 46, 38402 - Saint-Martin- d'Hères, France

---

### RESUME

Des nombreux problèmes en traitement du signal peuvent être approchés en utilisant des modèles paramétriques de signal. Cette approche est particulièrement appropriée en traitement adaptatif du signal. En effet pour les signaux qui peuvent être modélisés sous la forme AR, ARMA ou ARMAX les techniques d'identification récursive développées en Automatique fournissent des algorithmes permettant une estimation en temps réel des paramètres du filtre générateur. Dans cette communication nous présentons l'algorithme d'erreur de sortie avec modèle d'estimation étendue, (O3EM) originellement développé dans le cadre des systèmes adaptatifs avec modèle. Les aspects théoriques concernant la convergence de cet algorithme seront discutés. L'application de cette technique pour la détection et l'analyse spectrale des vibrations des scies circulaires sera présentée. Les résultats obtenus seront comparés avec ceux obtenus par une analyse FFT et aussi à partir de données simulées.

### SUMMARY

An important number of signal processing problems can be approached using parametric signal models. This approach is particularly appealing in adaptive signal processing for signals which can be reasonably modelled by AR, ARMA or ARMAX models, the recursive identification techniques developed in the control field provide algorithms for real time estimation of these models.

In this paper we present the output error with extended estimation model algorithm (O3EM) originally developed in the field of Model Reference adaptive Systems. The theoretical aspects related to the convergence properties of this algorithm will be discussed. The application of this technique for detection and spectral analysis of vibrations of circular saws will be presented.



## I. INTRODUCTION

Ces dernières années les liens entre l'identification récursive des modèles AR, ARMA et ARMAX et divers problèmes de traitement adaptatif du signal (analyse spectrale adaptative, annulateurs de bruits, détection de vibrateurs, poursuite de raies spectrales etc), ont été mis en évidence.

En particulier les techniques d'identification récursive issues de l'approche "équation de l'erreur" ont été surtout utilisées. Nous mentionnerons l'algorithme récursif de maximum vraisemblance approché (RML) l'algorithme de variable instrumentale (V.I.) l'algorithme des moindres carrés étendu (ELS) ou moindres carrés étendus modifiés (AML). [1] [2]

Dans cette communication, nous présentons un algorithme d'identification récursive pour utilisation en traitement du signal qui est issu de l'approche "erreur de sortie" [3]. Cet algorithme appelé algorithme d'erreur de sortie avec modèle d'estimation étendu "(O3EM)" a été développé à l'origine dans le contexte des systèmes adaptatifs avec modèle opérant dans un environnement déterministe [4] mais ultérieurement ses propriétés dans un environnement stochastique ont été étudiées dans [5] [6] utilisant la méthode ODE et en [7] utilisant les martingales.

Nous présenterons dans le paragraphe 2 l'algorithme en liaison avec la réalisation des prédicteurs adaptatifs pour processus ARMA. Dans le paragraphe 3 nous analyserons les propriétés de cet algorithme et nous donnerons un bref aperçu des résultats théoriques disponibles.

Enfin dans le paragraphe 4, nous présentons les résultats expérimentaux et de simulation obtenus en liaison avec le problème de la mesure des fréquences de vibration des scies circulaires et nous indiquerons des applications en cours.

## II. PREDICTION ET ESTIMATION ADAPTATIVE DES PARAMETRES AVEC L'ALGORITHME O3EM

Les problèmes auxquels on s'intéresse peuvent se formuler comme suit : le signal à traiter peut être modélisé comme étant la sortie d'un filtre générateur de type ARMA et décrit par :

$$x(k) = -\sum_{i=1}^n a_i x(k-i) + \sum_{i=1}^n c_i v(k-i) + v(k) \quad (1)$$

où  $x(k)$  est le signal de sortie de  $v(k)$  est une séquence de variable aléatoires normales  $(0, \sigma_v)$ . Le signal  $x(k)$  est en général affecté par un bruit d'observation modélisé par un processus M.A. Le signal observé  $y(k)$  est donné par.

$$y(k) = x(k) + \sum_{i=1}^n b_i w(k-i) + w(k) \quad (2)$$

où  $w(k)$  est aussi une séquence de variables aléatoires normales  $(0, \sigma_w)$ . Les équations (1) et (2) peuvent encore s'écrire sous la forme

$$A(q^{-1}) x(k) = C(q^{-1}) v(k) \quad (3)$$

$$y(k) = x(k) + B(q^{-1}) w(k) \quad (4)$$

où les polynômes  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$ ,  $C(q^{-1})$

sont donnés par

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n} \quad (5)$$

$$B(q^{-1}) = 1 + b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n} \quad (6)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n} \quad (7)$$

Des équations (3) et (4) on obtient :

$$A(q^{-1}) y(k) = C(q^{-1}) v(k) + B(q^{-1}) A(q^{-1}) w(k) \quad (8)$$

Mais le terme droit de l'équation (8) est un processus gaussien à spectre rationnel, et en utilisant le théorème de réalisation, on peut remplacer l'équation (8) par :

$$A(q^{-1}) y(k) = C(q^{-1}) e(k) \quad (9)$$

où  $e(k)$  est une séquence de variable aléatoires normales  $(0, \sigma_e)$  et

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n} \quad (10)$$

tel que les spectres des deux processus d'excitation dans (8) et (9) soient identiques. C'est-à-dire :

$$\sigma_e^2 C(z) C(z^{-1}) = \sigma_v^2 C'(z) C'(z^{-1}) + \sigma_w^2 B(z) B(z^{-1}) \quad (11)$$

Le prédicteur linéaire "optimal" classique (minimisation de l'erreur quadratique de prédiction) est donné par :

$$\hat{y}(k/k-1) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n c_i e(k-i) \quad (12)$$

est l'erreur de prédiction sera :

$$\epsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k/k-1) = e(k) \quad (13)$$

Ce qui permet de mettre en oeuvre le prédicteur sous la forme :

$$\hat{y}(k/k-1) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n c_i \epsilon(k-i) \quad (14)$$

Mais en tenant compte de l'équation (13) le prédicteur linéaire optimal peut s'écrire encore sous la forme (en remplaçant  $y(k)$  par  $\hat{y}(k/k-1) + \epsilon(k)$ ) :

$$\hat{y}(k/k-1) = -\sum_{i=1}^n a_i \hat{y}(k-i/k-i-1) + \sum_{i=1}^n d_i \epsilon(k-i) \quad (15)$$

où

$$d_i = c_i - a_i \quad (16)$$

Cette variante du prédicteur est de type "parallèle" (cf. terminologie des systèmes adaptatifs). car pour  $d_i = 0$   $i=1 \dots n$  la sortie prédite ne dépend

que des prédictions antérieures alors que dans le cas de l'équation (14) pour  $c_i=0$   $i=1 \dots n$ , la prédiction dépend des valeurs antérieures du processus (structure "série-parallèle"). En identification récursive : "parallèle" = erreur de sortie, "série-parallèle" = équation d'erreur. A noter que l'équation (15) correspond à la forme entrée-sortie d'un prédicteur de Kalman stationnaire pour le processus donné dans l'équation (9). Les coefficients  $d_i$  correspondent au gain de Kalman pour la représentation sous forme canonique observable du processus ARMA.

Dans les problèmes de traitement de signal adaptatif, le modèle du signal  $y(k)$  est inconnu et on souhaite estimer les paramètres  $a_i$  et  $c_i$  respectivement  $a_i$  et  $d_i$ . L'estimation des paramètres  $a_i$  et  $d_i$  se fera à travers l'utilisation d'un prédicteur ajustable dont les paramètres vont être pilotés par un algorithme d'adaptation paramétrique. L'une des entrées de l'algorithme, sera l'erreur de prédiction.

Nous présenterons maintenant l'algorithme d'erreur de sortie avec modèle d'estimation étendu (O3EM). Nous précisons d'abord les concepts d'erreur de prédiction "a priori" et "a posteriori".

Nous définissons la sortie "a priori" du prédicteur ajustable comme suit :

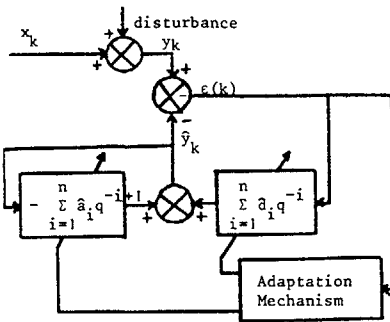


Figure 1

$$\hat{y}^{\circ}(k) = \hat{y}(k/k-1, \hat{\theta}(k-1)) = - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(k-1) \hat{y}(k-i) + \sum_{i=1}^n \hat{d}_i(k-1) \epsilon(k-i) = \hat{\theta}^T(k-1) \vartheta(k-1) \quad (17)$$

ou

$$\hat{\theta}^T(k) = [\hat{a}_1(k) \dots \hat{a}_n(k), \hat{d}_1(k) \dots \hat{d}_n(k)] \quad (18)$$

$$\vartheta(k-1) = [-\hat{y}(k-1) \dots -\hat{y}(k-n), \epsilon(k-1) \dots \epsilon(k-n)] \quad (19)$$

et  $\epsilon(k)$  étant l'erreur d'adaptation "à posteriori" (ou résidu) qui va être définie plus loin. Nous définissons la sortie "à posteriori" du prédicteur ajustable comme suit :

$$\hat{y}(k) = \hat{y}(k/k-1, \hat{\theta}(k)) = - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(k) \hat{y}(k-i) + \sum_{i=1}^n \hat{d}_i(k) \epsilon(k-i) = \hat{\theta}^T(k) \vartheta(k-1) \quad (20)$$

L'erreur d'adaptation "à postérieure" (résidu) est définie par :

$$\epsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k) \vartheta(k-1) \quad (21)$$

et l'erreur de prédiction (d'adaptation) "à priori" est définie par :

$$\epsilon^{\circ}(k) = y(k) - \hat{y}^{\circ}(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k-1) \vartheta(k-1) \quad (22)$$

Avec ces notations, l'algorithme d'adaptation paramétrique sous sa forme générale est donné par :

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + f(k) \vartheta(k) \epsilon(k+1) \quad (23)$$

$$\epsilon(k+1) = \frac{\epsilon^{\circ}(k+1)}{1 + \vartheta(k)^T F(k) \vartheta(k)} \quad (24)$$

$$F(k+1)^{-1} = \lambda_1(k) F(k)^{-1} + \lambda_2(k) \vartheta^T(k) ; F(0) > 0, \quad 0 < \lambda_1(k) \leq 1 ; 0 \leq \lambda_2(k) < 2 \quad (25)$$

Dans l'équation (23)  $F(k)$  est appelé "gain d'adaptation" et il peut se calculer récursivement à partir de l'équation (25) sans inversion matricielle en utilisant un lemme d'inversion matricielle (MIL- [3]).

On obtient :

$$F(k+1) = \frac{1}{\lambda_1(k)} \left[ F(k) - \frac{F(k) \vartheta(k) \vartheta^T(k) F(k)}{\lambda_1(k) + \vartheta^T(k) F(k) \vartheta(k)} \right] \quad (25)$$

Le schéma bloc du prédicteur adaptatif est donné fig. 1.

### III. PROPRIETES DE L'ALGORITHME O3EM

Nous allons tout d'abord mentionner les différences par rapport aux algorithmes ELS et AML qui ont une complexité comparable. Les différences principales sont les suivantes.

- Le prédicteur ajustable à une structure différente
- (Conséquence) le vecteur des observation  $\vartheta(k)$  a une structure différente
- Le vecteur  $\vartheta(k)$  contient les erreurs d'adaptation "à postérieure" antérieures au lieu des erreurs de prédiction "à priori" antérieures. (similaire au AML mais différent du ELS)
- La loi des variations des gains d'adaptation à une structure plus générale. En plus du facteur d'oubli ( $\lambda_1$ ) utilisé pour les problèmes de poursuite des paramètres et l'amélioration du transitoire (son effet est d'augmenter le gain si  $\lambda_1 < 1$ ), la loi d'évolution des gains contient aussi le facteur  $\lambda_2$  qui joue sur la vitesse de décroissance du gain (pour  $\lambda_2 \neq 0$ ). Les divers choix possibles pour  $\lambda_1(k)$  et  $\lambda_2(k)$  permettent d'obtenir des comportements différents de l'algorithme et surtout de contrôler la trace de  $F(k)$  (ceci permet d'éviter "l'emballement" du gain qui peut se produire des fois pour des  $\lambda_1 < 1$ ).

Nous donnerons maintenant les résultats de l'analyse théorique des propriétés de l'algorithme O3EM.



a) Cas déterministe. [3] [4]

Dans le cas déterministe, le système est globalement asymptotiquement stable ( $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}(k) = \theta$  pour tout  $\varepsilon^0(0)$  et  $\hat{\theta}(0)$ ).

b) Cas stochastique [5] [6][7]

L'analyse par la méthode de l'équation différentielle moyenne (ODE) conduit aux résultats suivants : Pour le cas du modèle (9) on a :

$$\text{Prob. } \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}(k) \in D_c \right\} = 1 \quad (26)$$

ou

$$D_c = \{ \hat{\theta} : [\hat{\theta} - \theta]^T \varphi(k) = 0 \} \quad (27)$$

$$\hat{\theta}^T = [a_1 - a_n, c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n]$$

sous la condition suffisante que

$$H(z^{-1}) = \frac{1}{C(z^{-1})} - \frac{\lambda_2}{2} \quad (28)$$

est une fonction de transfert strictement réelle positive.

L'analyse est valable pour le cas  $\lambda_1(k)=1$  (gain décroissant) et  $\lambda_2(k) = \lambda_2$  pour  $k > k_0$ .

Cette condition de stricte réelle positivité peut-être affaiblie en filtrant le vecteur  $\varphi(k)$  [6] ou par sur-paramétrisation du prédicteur ajustable [9]. Si on utilise dans l'algorithme d'adaptation le vecteur filtré  $\varphi^T(k)$  :

$$\varphi^T(k) = \frac{1}{L(q^{-1})} \varphi(k) \quad (29)$$

ou  $L(q^{-1})$  est un filtre asymptotiquement stable la condition (28) devient que

$$H(z^{-1}) = \frac{L(z^{-1})}{C(z^{-1})} - \frac{\lambda_2}{2} \quad (30)$$

En utilisant le théorème de convergence des martingales il a été montré que pour  $\lambda_1(k) = 1$  et  $\lambda_2(k)$  variable mais  $> 0$ , que la condition (28) où  $\lambda_2$  correspond maintenant  $[\lambda_2(k)]_{\max}$  assure

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(\hat{\theta} - \hat{\theta}(k+1))^T \varphi(k)]^2 = 0 \quad \text{p.s.} \quad (31)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\varepsilon(k) - e(k)]^2 = 0 \quad \text{p.s.} \quad (32)$$

Il a été aussi montré que même si la condition (28) n'est pas satisfaite l'algorithme conserve les propriétés de bornitude à savoir :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^2(k) < \infty \quad (33)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(k)^T \varphi(k) < \infty \quad (34)$$

A noter que les propriétés (26) et (31) correspondent à une convergence vers un modèle qui assure un comportement entrée sortie identique au modèle original. Sous la condition de richesse de

$e(k)$  qui est naturelle étant donné qu'il s'agit d'un bruit blanc l'équation (27) à une seule solution  $\hat{\theta}=0$  et on a dans ce cas

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}(k) = 0 \quad \text{p.s.} \quad (35)$$

#### IV RESULTATS EXPERIMENTAUX

L'algorithme présenté a été testé en détail en simulation sur un signal constitué par deux sinusoïde et noyé dans le bruit. Les résultats de ces essais se trouvent dans [8].

Ici nous présentons les conclusions des essais expérimentaux sur les signaux vibratoires obtenus à partir d'une scie circulaire.

Les signaux ont été obtenus à partir de capteurs électro-magnétiques dans le Dept. of Mechanical Eng. Univ. of California Berkeley (Prof. C.D. MOTE)

Quatre séries de données ont été traitées dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Essais	Nb. points	Fréq. Ech.(Hz)
DA11	400	400
DA12	400	600
DA13	400	600
DA14	300	500

A titre d'illustration les données du fichier DA11 sont représentées dans la fig. 2.

La fig. 3. donne à titre de comparaison. La d.s.p. du signal DA11 en utilisant la FFT.

La fig. 4. donne les résultats de la d.s.p. obtenus avec l'algorithme O3EM (partie AR.). Le spectre a été tracé à partir de l'estimation des paramètres en utilisant la relation.

$$\varphi(w) = \frac{1}{\hat{A}(e^{iwt}) \hat{A}(e^{-iwt})}$$

On constate que les raies du signal sont estimées à l'exception de la raie située à 78 Hz. Ce phénomène ayant apparu à plusieurs reprises nous donnons l'explication suivante.

Les résultats de simulations et sur signaux réels on montre la convergence des paramètres estimés de  $C(q^{-1})$  vers des valeurs proches de  $A(q^{-1})$ . Comme les racines de  $A(q^{-1})$  se trouvent sur le cercle unité (processus ascillant stationnaire) il résulte que  $\hat{C}(q^{-1})$  va avoir ses racines aussi près du cercle unité, ce qui implique que la condition de convergence (28) va être violée. De ce fait certains paramètres peuvent ne pas converger.

Pour pallier à ce phénomène, il convient de surparamétriser le modèle d'estimation ajustable ou de filtrer le vecteur des information.

SUR L'UTILISATION DES TECHNIQUES D'IDENTIFICATION RECURSIVE EN TRAITEMENT DU SIGNAL

La deuxième explication valable dans certain cas tient au fait que le pouvoir de résolution des méthodes récursives dépend de la fréquence d'échantillonnage. Ceci a été analysé dans [8].

Néanmoins l'intérêt de l'algorithme (bien que des améliorations sont à considérer) tient à la rapidité d'estimation des raies, la possibilité de poursuite des raies. (Très important pour le contrôle des vibrations) et le fait qu'on obtient une d.s.p. lissée mettant en évidence les zones de haute puissance du spectre.

Notons que l'algorithme présenté a été utilisé dans [10] pour le contrôle actif adaptatif des vibrations des scies circulaires.

Remerciements

L'auteur remercie le Prof. MOTE et le Dr RAHIMI qui lui ont fourni les données et MM. CABRERA ET ALCANTARA pour le travail de programmation.

Bibliographie

- [1] B. Friedlander "Application of recursive parameter estimation algorithms to adaptive signal processing". Proceedings of the Adaptive Control Workshop, Yale, pp.63-68, mai 1981
- [2] B. Friedlander. System Identification Techniques for adaptive signal processing IEEE Trans. on ASSP Vol. ASSP-30 pp.240-246, avril 1982
- [3] Y.D. Landau "Adaptive Control-the Model Reference Approach", Dekker, N.Y. 1979
- [4] I.D. Landau "Elimination of the real positivity condition in the design of parallel MRAS" IEEE TAC 23, pp.1015-1020, Déc. 78.
- [5] L. Dugard, I.D. Landau "Recursive output error identification algorithms-Theory and evaluation" Automatica, Vol. 16. pp.443-462. Sept. 80.
- [6] L. Dugard, I.D. Landau, H.M. Silveira "Adaptive state estimation using MRAS techniques-Convergence analysis and evaluation" IEEE-TAC 25, pp. 1169-1182. Déc. 80.
- [7] I.D. Landau "Near supermartingales for convergence analysis of recursive identification and adaptive control schemes" Int. J. of Control. Vol. 35 n° 2, pp.197-226 1982.
- [8] I.D. Landau, L. Dugard, S. Calbrera "Applications of output error recursive estimation algorithms for adaptive signal processing". Proc. I CASSP 82, pp.639-642. Mai 82 Paris.
- [9] S. Shah, G.F. Franklin "On satisfying strict positive real condition for convergence by over-parametrization". IEEE. Trans. A. C. Vol. A.C. 27 n° 3. pp.715-716, juin 82
- [10] A. Rahimi "On-line spectral control of rotating circular discs using thermal membrane stresses" Ph. D. Thesis Univ. of Calif. Dept. of Mech. Eng. Berkeley, June 1982.

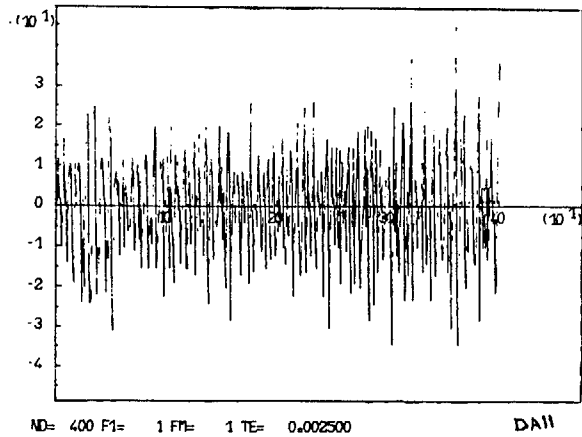


Fig.2

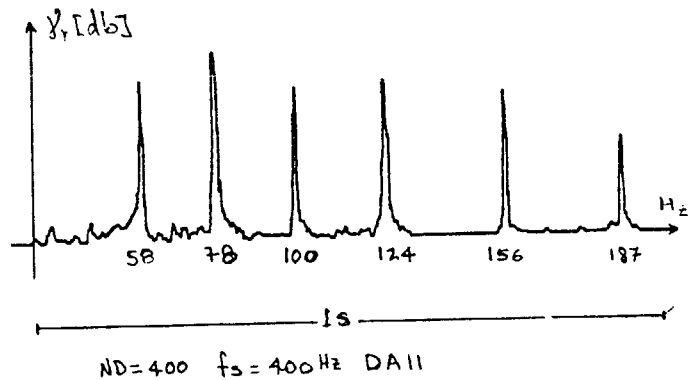


Fig.3

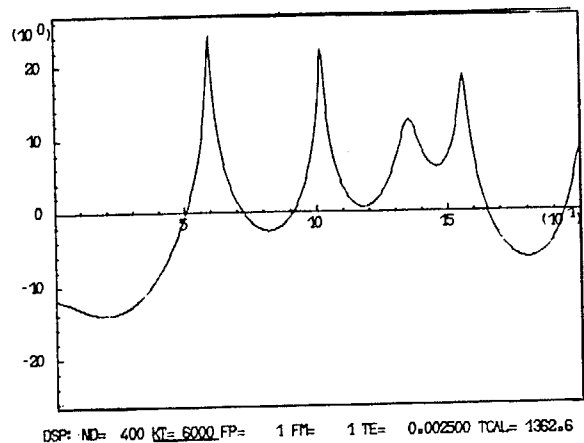


Fig.4

