

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

UN ALGORITHME SEQUENTIEL DE DETECTION DES RUPTURES DE DYNAMIQUES  
D'UN MODELE ARMA.

SEQUENTIAL DETECTION OF ABRUPT CHANGES IN ARMA MODELS.

C. DONCARLI - Professeur

Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M. ERA 134  
1, rue de la Noë - 44072 NANTES CEDEX Tel.(40) 74.79.76

E.N.S.M. Automatic control laboratory  
1, rue de la Noë 44072 NANTES CEDEX

## RESUME

Le problème de la détection des changements de dynamiques d'un signal susceptible d'une modélisation autoregressive à moyenne mouvante est assez fréquent en poursuite multisenseurs ou en détection de pannes. On propose une méthode originale basée sur un filtrage autoadaptatif du signal permettant d'élaborer une variable de décision sur laquelle il s'agira simplement de détecter un changement de niveau. Le filtrage autoadaptatif est constitué par une procédure d'identification récursive (version du filtrage de Kalman étendu particulièrement adaptée au problème). La pseudo-innovation ainsi élaborée est une séquence blanche quand le filtre est accordé et toute rupture de dynamique du signal se traduit par une coloration de la pseudo-innovation, détectée de manière séquentielle. Après détection, les coefficients du modèle ARMA sont à nouveau estimés grâce à une re-initialisation automatique de la procédure d'identification. On envisage l'étude statistique du comportement du détecteur et on présente enfin une étude en simulation de l'algorithme.

## SUMMARY

The sequential detection of abrupt changes in ARMA models is an important question in multi-sensor/multi-target tracking, or similar problems (failure detection, biological signal analysis...).

This detection is usually performed by a test on the order of the model, but the theoretical sequential character of this type of method is weakened by the quantity of computation needed by each iteration.

The authors propose an original method based on a constant order hypothesis, with abrupt changes within the parameters of the ARMA model. This realistic hypothesis is a consequence of the experimental capability of a low order ARMA model to represent correctly any Markovian process.

The method can be roughly decomposed into two parts: A self tuning filter provides a decision variable, so that any change in the ARMA model parameters involves a change in the mean value (level) of the decision variable. This variable is then processed by a detector of level changes using two receding horizon filters.

With more details, one can say that the self tuning filter is a recursive identification algorithm based on a special version of the Extended Kalman Filter (EKF). The pseudo-innovation of the EKF is then used to elaborate the decision variable (as a quadratic function of the pseudo-innovation). As the identification procedure converges the pseudo-innovation is a white sequence and any product of this sequence by itself, with a time-shift, is a zero-mean variable. When an abrupt change occurs this mean value (level) is different from zero, and the question is actually to detect a change in level, using any traditional method, or an original one (based on the comparison of the outputs of two receding horizon filters) suggested in this paper.

After the detection of a change, the identification method is updated, and the detector is inhibited automatically for a few iterations, to prevent false alarms.

The theoretical computation of the statistical characteristics of the decision variable permits one to know the probability of false alarms and that of non-detection, according to the triggering variables.

Numerical examples are given at the end of the paper.



UN ALGORITHME SEQUENTIEL DE DETECTION DES RUPTURES DE DYNAMIQUES D'UN MODELE ARMA.

SEQUENTIAL DETECTION OF ABRUPT CHANGES IN ARMA MODELS.

I - INTRODUCTION

La segmentation d'un signal en différentes plages présentant certaines caractéristiques statistiques stationnaires peut être abordée d'un point de vue structural par des tests sur l'ordre du modèle stochastique de ce signal. Le caractère séquentiel théorique de ce type de méthode est malheureusement tempéré par la complexité des calculs nécessaires à chaque itération et on propose ici une méthode basée sur une hypothèse d'ordre constant du modèle, avec de brusques variations de ses paramètres. Cette hypothèse (réaliste) est la conséquence de l'aptitude expérimentale d'un modèle ARMA d'ordre réduit à représenter tout signal Markovien.

Après avoir rappelé (§ II) quelques méthodes classiques et situé globalement le problème, on présente une méthode originale permettant la détection des ruptures de dynamique des modèles ARMA et l'estimation des paramètres inconnus. La méthode peut, en gros, être séparée en deux parties :

Tout d'abord un filtre auto-adaptatif (§ III) fournit une variable de décision telle que tout changement de paramètres du modèle ARMA entraîne un changement du niveau moyen de cette variable. D'une manière plus précise, le filtre auto-adaptatif est constitué par un algorithme d'identification récurrente (version spéciale du filtrage de Kalman étendu). La pseudo-innovation de ce filtre et alors utilisée pour élaborer la variable de décision qui est traitée dans la deuxième partie (§ IV) consacrée à la détection. Quand la procédure d'identification a convergé, la pseudo-innovation est une séquence blanche et tout produit de cette séquence par elle-même (avec un décalage temporel) est une variable aléatoire centrée; quand un changement de dynamiques se produit, la valeur moyenne de cette variable est différente de zéro et la question est réellement de détecter un changement de niveau. On peut alors utiliser toute méthode classique adaptée à ce problème. On peut aussi choisir de manière plus originale, la comparaison des sorties de deux filtres à horizon exponentiel.

Après la détection d'un changement, la procédure d'identification est re-initialisée, et de détecteur est inhibé automatiquement pendant un certain nombre d'itérations pour éviter tout déclenchement à répétition.

On présente enfin (§V) quelques essais de simulation montrant le comportement de la méthode et on indique en conclusion les questions ouvertes et l'orientation envisagée.

II - POSITION DU PROBLEME

La détection des ruptures de signaux mono-dimensionnels a fait l'objet de nombreuses études dont on pourra trouver une revue en [1] ou [2]. On peut brièvement classer ces méthodes en deux catégories.

- Détection de l'instant de rupture par choix entre deux (ou plusieurs) hypothèses, grâce à un test statistique. On peut classer dans cette catégorie les méthodes de Hinkley [3], Hines [4], les filtres dérivateurs triangulaires [0], les tests séquentiels cumulatifs de Shiryaev [5] etc...

- Détection de l'instant de rupture et évaluation de la rupture. Ces méthodes consistent à filtrer le signal par un filtre adapté (mais non auto-adaptatif) dont on teste les innovations. On citera Mehra et Pechon [6], Willsky [7] ainsi que toutes les méthodes issues de la théorie du rapport de vraisemblance généralisé.

Ces derniers algorithmes sont généralement d'une mise en oeuvre très lourde, et on présente ici une méthode séquentielle réalisant simultanément le test d'hypothèse et l'estimation des paramètres du modèle, tout en étant d'une mise en oeuvre relativement simple.

III - ALGORITHME D'ESTIMATION (filtrage auto-adaptatif)

III.1. Position du problème et principe de la méthode

On considère un signal  $\{y_k\}$  susceptible d'être décrit par un modèle ARMA suivant :

$$y_k \leftarrow \left[ \frac{C(Z)}{A(Z)} \right] v_k \rightarrow$$

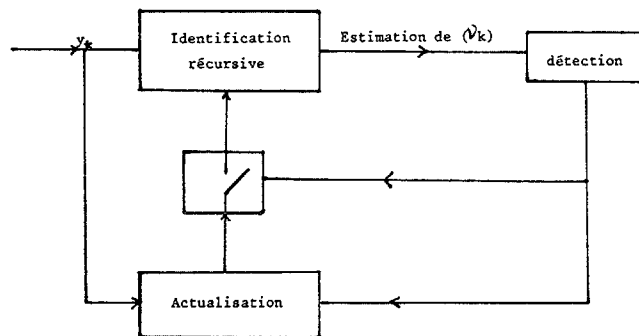
$$\text{où } \begin{cases} C(Z) = 1 + C_1 Z^{-1} + C_2 Z^{-2} + \dots + C_n Z^{-n} \\ A(Z) = 1 - a_1 Z^{-1} - a_2 Z^{-2} - \dots - a_n Z^{-n} \end{cases}$$

Les polynômes  $A(Z)$  et  $C(Z)$  sont des polynômes stables, et  $\{v_k\}$  est une séquence blanche, centrée de variance  $R$  inconnue. Enfin, les coefficients  $a_i$  et  $C_i$  ainsi que la variance  $R$  peuvent varier brutalement à des instants inconnus. La finalité de ce travail sera donc d'une part d'estimer sur une même plage les coefficients ( $a_i$ ,  $C_i$ , et  $R$ ) (identification du modèle), et d'autre part, de détecter si le point courant ( $k$ ) est, ou non, un point de contour.

Pour cela, entre deux sauts successifs, on identifie les paramètres à l'aide d'une méthode E.K.F. (filtre de Kalman étendu) qui par la même occasion fournit après convergence une reconstruction de la séquence blanche d'entrée  $\{v_k/k-1\}$  [on a donc  $E(v_k \cdot v_{k-1}) = 0$ ].

Toutefois, lorsqu'une rupture se produit, la convergence de l'algorithme cesse et la séquence  $\{v_k/k-1\}$  n'a plus aucune chance d'être blanche. Par conséquent,  $E(v_k \cdot v_{k-1})$  sera prise comme variable de décision.

Le schéma général de la méthode proposée est donc le suivant :



III.2. Identification récurrente et estimation.

III.2.1. Représentation sous forme d'équations d'Etat et de mesure.

On se place entre deux ruptures successives du signal. L'équation de modélisation du signal est donc :

$$(1) y_k = \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + v_k + \sum_{i=1}^n C_i v_{k-i}, \text{ où } (a_i, C_i \text{ et } R) \text{ sont constants.}$$

On considère le vecteur d'état défini par :  $X_k^t = [a_1, a_2, \dots, a_n, C_1, C_2, \dots, C_n, v_{k-1}, v_{k-2}, \dots, v_{k-n}]$   $X_k$  vérifie l'équation d'état :

$$(2) X_{k+1} = F X_k + G v_k, \text{ où } F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \begin{matrix} 2n \\ n \end{matrix}$$

$$G^t = [0 \dots 0 \mid 1 \ 0 \dots 0]$$

L'équation vérifiée par le vecteur d'état est linéaire. Par contre, l'équation de modélisation du signal quant à elle n'est pas linéaire (et sera considérée comme équation de mesure) à cause des produits  $C_i v_{k-i}$  où  $C_i$  et  $v_{k-i}$  ne peuvent être connus que par identification.

UN ALGORITHME SEQUENTIEL DE DETECTION DES RUPTURES DE DYNAMIQUES  
D'UN MODELE ARMA.

SEQUENTIAL DETECTION OF ABRUPT CHANGES IN ARMA MODELS.

On se propose donc de linéariser cette équation de modélisation au premier ordre afin d'appliquer les formules de filtrage linéaire de Kalman au système linéarisé et d'identifier le modèle (méthode E.K.F.). Ainsi, en désignant par  $\{\hat{C}_i, \hat{v}_{k-i}\}$  les composantes de l'estimation  $\hat{X}_{k/k-1}$  de l'état étendu, on linéarise l'équation (1) autour de ce point. On pose alors :

$$C_i = \hat{C}_i + C'_i$$

$v_{k-i} = \hat{v}_{k-i} + v'_{k-i}$  où  $C'_i$  et  $v'_{k-i}$  sont les erreurs des estimations de  $\hat{C}_i$  et de  $\hat{v}_{k-i}$ .

$C_i v_{k-i} = -\hat{C}_i \hat{v}_{k-i} + C_i \hat{v}_{k-i} + \hat{C}_i v'_{k-i} + C'_i v'_{k-i}$  et, si on se limite au premier ordre, du fait que  $C'_i v'_{k-i}$  est un infiniment petit du second ordre, on peut écrire :  $C_i v_{k-i} \approx -\hat{C}_i \hat{v}_{k-i} + C_i \hat{v}_{k-i} + \hat{C}_i v'_{k-i}$

Au premier ordre, on a donc :

$$y_k = \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} - \sum_{i=1}^n \hat{C}_i \hat{v}_{k-i} + \sum_{i=1}^n C_i \hat{v}_{k-i} + \sum_{i=1}^n \hat{C}_i v'_{k-i} + v_k \quad \text{soit}$$

$$(3) \quad z_k = H_k X_k + v_k, \quad \text{avec}$$

$$z_k = y_k + \sum_{i=1}^n \hat{C}_i / k-1 \hat{v}_{k-i} / k-1$$

$$H_k = [y_{k-1}, \dots, y_{k-n}, \hat{v}_{k-1}, \dots, \hat{v}_{k-n}, \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_n]$$

Par conséquent, au premier ordre, l'évolution des paramètres peut être représentée par les équations d'état (2) et de mesure (3) que l'on rappelle

$$\begin{cases} X_{k+1} = F X_k + G v_k \\ z_k = H_k X_k + v_k \end{cases}$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à appliquer la théorie du filtrage linéaire au système (2),(3). Cependant, on rappelle que cette théorie fait appel à la résolution d'une équation de Riccati matricielle type discret dont la stabilité numérique n'est généralement pas assurée sous sa forme originale.

Afin de pouvoir mettre en oeuvre un algorithme numériquement stable, il est nécessaire de procéder à une transformation technique du système (2),(3) auquel on applique les équations du filtre de Kalman sous une forme numériquement stable.

III.2.2. Filtre de Kalman étendu.

Puisque  $v_k = z_k - H_k X_k$ , le système (2),(3) peut s'écrire de manière équivalente :

$$\begin{cases} X_{k+1} = F_k X_k + G z_k \\ z_k = H_k X_k + v_k \end{cases} \quad (4), \quad \text{avec}$$

$$F_k = F - G H_k$$

Les équations du filtre de Kalman appliquées à (4) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} X_{k+1/k} = F_k X_{k/k-1} + G z_k + L_k (z_k - H_k X_{k/k-1}) \\ L_k = (F_k P_k / k-1 H_k^t) (H_k P_k / k-1 H_k^t + R_k)^{-1} \\ P_{k+1/k} = F_k P_k / k-1 F_k^t - L_k (F_k P_k / k-1 H_k^t)^t \end{cases}$$

où  $X_{k/k-1}$  est la prédiction du vecteur d'état,  $L_k$  le gain du filtre,  $P_k / k-1$  la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation du vecteur d'état et  $R_k$  la variance de  $v_k$  à l'instant  $k$ .

Le filtre tel qu'il est écrit ci-dessus ne peut fonctionner que si d'une part il est initialisé (initialisation de  $X_1/0$  et  $P_1/0$  et que si d'autre part  $R_k$  est connu à tout instant  $k$ . Pour cela, il est nécessaire d'introduire le filtre suivant :

$$R_{k+1} = (1-\alpha) R_k + \alpha (z_k - H_k X_{k/k-1})^2$$

où  $R_1$  est donné et où  $\alpha$  est un paramètre d'oubli exponentiel. Cette méthode séquentielle d'identification du vecteur d'état est numériquement instable. C'est pourquoi, on a utilisé la forme numérique de Potter qui est stable.

III.2.3. Forme numérique : forme factorisée de Potter.

Afin de s'assurer que la matrice  $P_k / k-1$  reste symétrique, définie positive au cours du temps, on pose

$$P_k / k-1 = S_k \cdot S_k^t$$

On trouve alors une relation de récurrence entre  $S_{k+1}$  et  $S_k$  à savoir :

$$S_{k+1} = K_k S_k \left[ \mathbf{1} - \frac{v_k v_k^t}{\sqrt{D_k} (\sqrt{D_k} + \sqrt{R_k})} \right]$$

$$\text{avec } \begin{cases} v_k = S_k^t H_k^t \\ D_k = v_k^t \cdot v_k + R_k \end{cases}$$

Et, dans ce cas, le gain du filtre de Kalman s'écrit :

$$L_k = \frac{F_k S_k v_k}{D_k}$$

Par conséquent, l'algorithme tel qu'il sera programmé est le suivant :

Disposant de  $X_{k/k-1}$ , et de  $S_k$  :

$$\begin{cases} F_k = F - G H_k \\ v_k = S_k^t \cdot H_k^t \\ D_k = v_k^t \cdot v_k + R_k \\ L_k = \frac{F_k \cdot S_k \cdot v_k}{D_k} \end{cases}$$

$$X_{k+1/k} = F_k X_{k/k-1} + G z_k + L_k (z_k - H_k X_{k/k-1})$$

$$S_{k+1} = F_k S_k \left[ \mathbf{1} - \frac{v_k \cdot v_k^t}{\sqrt{D_k} (\sqrt{D_k} + \sqrt{R_k})} \right]$$

$$R_{k+1} = (1-\alpha) R_k + \alpha (z_k - H_k X_{k/k-1})^2$$

IV - DETECTION

IV.1. Description du détecteur

Le détecteur proposé est élaboré à partir de la variable  $\hat{v}_k \cdot \hat{v}_{k-1}$  où  $\hat{v}_k$  est l'estimation du bruit blanc  $v_k$  à l'instant  $k$ . La valeur moyenne de cette variable peut être calculée par deux filtres différents :

- filtre à horizon long :

$$T(k+1) = (1-\alpha) T(k) + \alpha \hat{v}_k \cdot \hat{v}_{k-1}$$

On choisit  $\alpha$  voisin de 0 de manière à ne prendre en compte que faiblement le poids de  $\hat{v}_k \cdot \hat{v}_{k-1}$ . Ainsi, la courbe  $T(k)$  sera fortement lissée

- filtre à horizon court :

$$U(k+1) = (1-\beta) U(k) + \beta \hat{v}_k \cdot \hat{v}_{k-1}$$

Cette fois ci,  $\beta$  ne sera pas choisi trop faible mais plutôt proche de 0.5 de manière à obtenir l'effet inverse de celui désiré avec  $T$ .

Ainsi, lorsqu'il n'y a pas de saut au niveau du signal et après convergence des équations du filtre de Kalman,  $v_k$  est un bruit blanc et par conséquent,  $T(k)$  comme  $U(k)$  sont tous deux nuls ou très voisins de 0.

Par contre, dès l'instant où une rupture a lieu,  $v_k$  n'est momentanément plus un bruit blanc et les deux variables  $T$  et  $U$  vont s'éloigner fortement de 0,  $U$  divergeant plus rapidement que  $T$  par le fait même de sa construction. Les considérations conduisent à adopter le détecteur suivant :

quand le filtre de sortie  $U(k)$  a convergé ( $N$  itérations d'inhibition du détecteur) on compare les valeurs de  $|U(k)|$  et  $|T(k)|$ .

si  $|U(k)| > \lambda |T(k)|$  on décide qu'il y a un saut (avec  $\lambda > 1$ ). Sinon on itère.

IV.2. Actualisation de l'algorithme

Une fois la détection faite, il est nécessaire d'actualiser l'algorithme d'estimation et de détection afin de lui permettre de s'adapter au saut et d'estimer correctement les nouveaux paramètres.

A cet effet, on laisse inchangé le vecteur d'état qui a la meilleure valeur qu'on puisse lui donner a priori. Par contre, il est indispensable d'actualiser la matrice  $S$  (par exemple en majorant ses termes diagonaux).

IV.3. Choix des paramètres de décision ( $N$  et  $\lambda$ )

Ces deux paramètres doivent être choisis de manière à satisfaire les exigences contradictoires qui suivent :

-  $N$  doit être relativement petit afin de ne pas oublier des sauts, mais aussi pas trop petit pour que la convergence ait pu se faire.



-  $\lambda$  ne doit pas être trop grand pour pouvoir détecter toutes les ruptures. Mais, il ne doit pas être trop faible afin d'éviter les fausses alarmes.

Pour les essais réalisés jusqu'à maintenant (cf.V),  $N$  et  $\lambda$  ont été choisis en fonction des résultats obtenus avec un saut sans détecteur.

Cependant, sur un plan théorique,  $N$  et  $\lambda$  ne seront connus qu'une fois l'étude du comportement statistique du détecteur faite.

V - SIMULATION

On utilise un modèle ARMA d'ordre 2 pour la simulation. Le saut se produit à la 351<sup>ème</sup> itération et se caractérise par une modification brutale des coefficients de  $A(Z)$  et  $C(Z)$  alors que la variance de  $v_k$  reste inchangée ( $3 \cdot 10^{-3}$ )

Ainsi, entre la 1<sup>ère</sup> et la 350<sup>ème</sup> itération :

$$A(Z) = 1 - 1.5 Z^{-1} + 0.56 Z^{-2}$$

$$C(Z) = 1 + 1.1 Z^{-1} + 0.36 Z^{-2}$$

et, à partir de la 351<sup>ème</sup> itération :

$$A(Z) = 1 - 1. Z^{-1} + 0.25 Z^{-2}$$

$$C(Z) = 1 + 0.5 Z^{-1} + 0.8 Z^{-2}$$

$R(K)$  et  $T(K)$  sont calculés pour  $\alpha = 0.04$  et  $U(K)$  pour  $\beta = 0.6$

On présente le fonctionnement de l'algorithme sur les figures suivantes :

Fig. 1 : Signal mesuré  $y$

Fig. 2 et 3 : Variables de décision  $T$  et  $U$

Fig. 4 à 8 : Paramètres estimés ( $a_1$   $a_2$   $c_1$   $c_2$  et  $R$ )

On constate donc le succès de la méthode présentée :

Pas de fausse alarme ni de manque à la détection - retard à la détection acceptable (3 points) - Bonne estimation des paramètres inconnus.

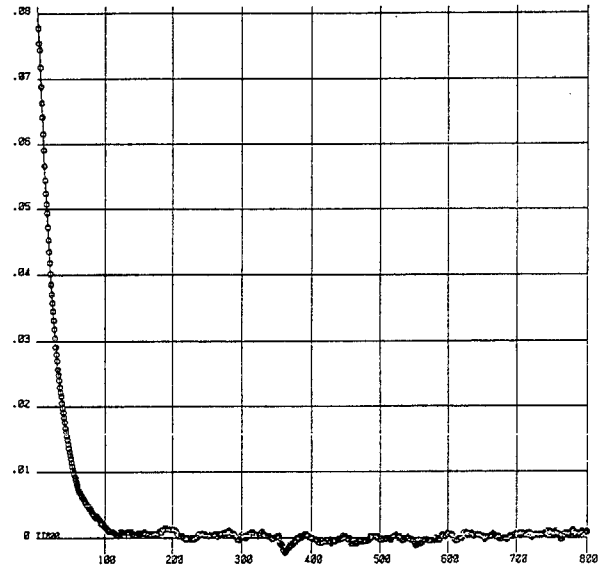


Figure 2

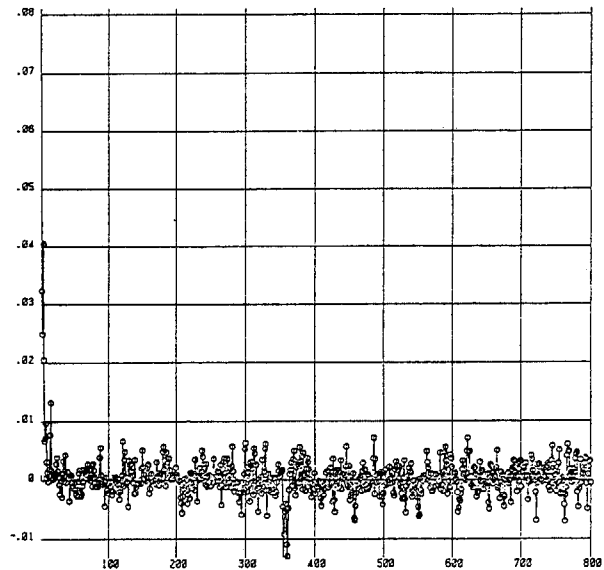


Figure 3

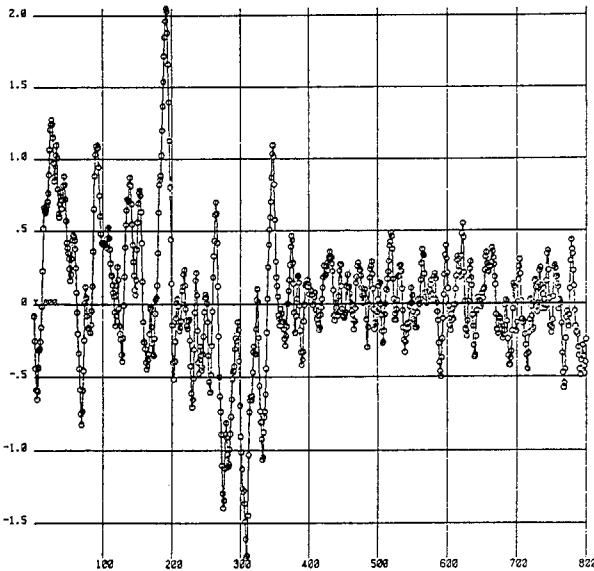


Figure 1

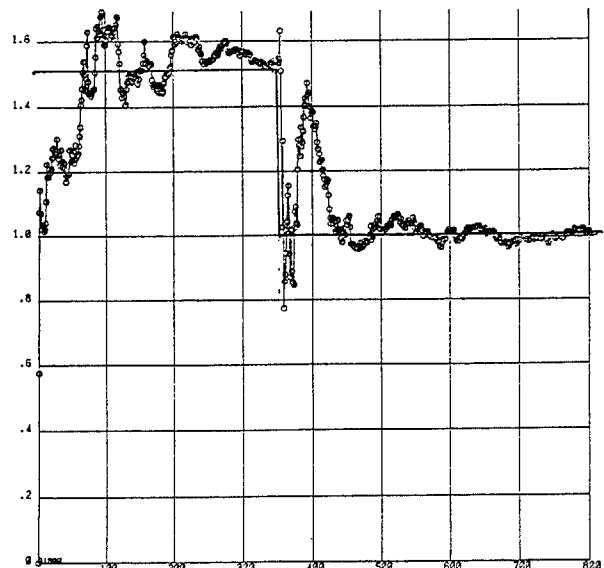


Figure 4

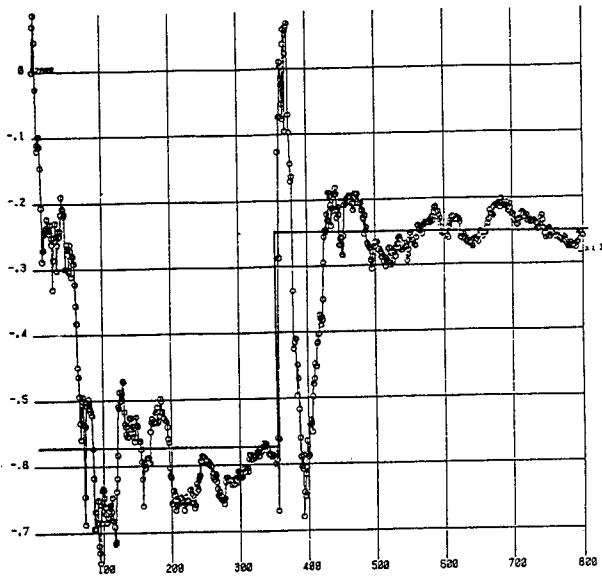


Figure 5

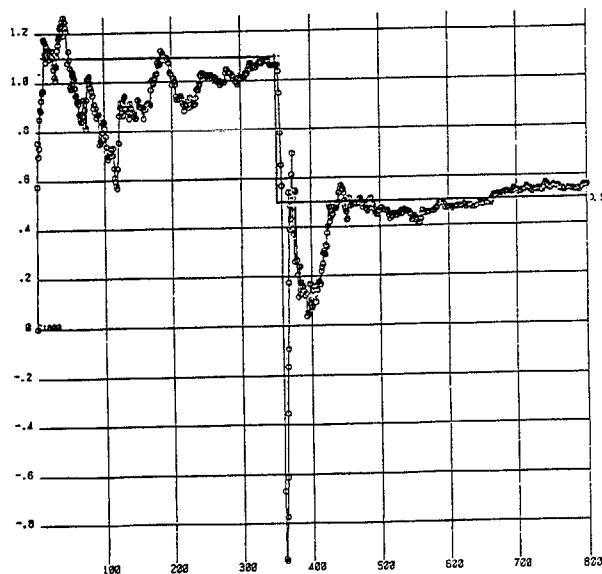


Figure 6

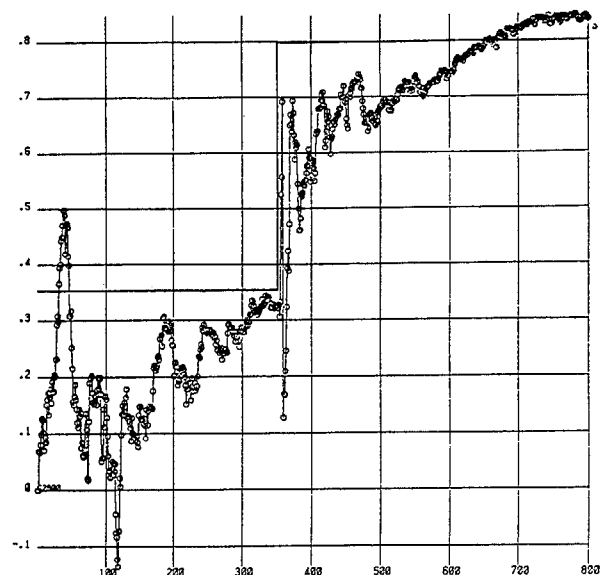


Figure 7

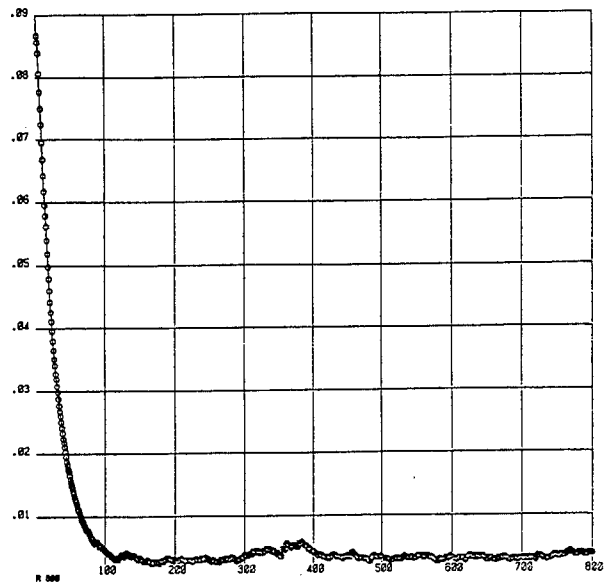


Figure 8

VI - CONCLUSION

La méthode présentée ici permet une détection séquentielle des ruptures de dynamiques d'un modèle ARMA tout en comportant un volume de calcul compatible avec son aspect temps réel. Il faut maintenant envisager l'étude statistique de son comportement, de manière à ajuster les variables de détection aux taux admis de fausse alarme et de manque.

- 1 M. BASSEVILLE  
"Edge detection using sequential methods for change in level". Part. II ; Sequential detection of change in mean. IEEE Trans. A.S.S.P. vol ASSP 29 N°1, pp 32-50, Feb. 81.
- 2 A.S. WILLSKY, E.Y. CHOW, S.B. GERSHWIN, C.S. GREENE, P.K. HOUPY, A.K. KURKJIAN  
"Dynamic model-based techniques for the detection of insidents on freeways". IEEE Trans. A.C. Vol. AC25, n°3, pp 347-360, June 80.
- 3 D.V. HINKLEY  
"Inference about the change-point from cumulative-sum tests". Biometrika 1971, vol.58,n°3, pp 509-523.
- 4 W.G.S.HINES  
"A simple monitor of a system with sudden parameter changes" IEEE Trans. I.T. vol. I.T. 22, n°2, pp 210-216 ; March 76
- 5 B. CHALMOND  
"Rupture de modèles pour des processus auto-régressifs Thèse 3ème Cycle, ORSAY ; Nov. 79
- 6 R.K. MEHRA, J. PEESCHON  
"An innovations approach to fault detection and diagnosis in dynamics systems" Automatica 1971, vol.7 - pp 637-640.
- 7 A.S. WILLSKY - H.L. JONES  
"A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems". IEEE Trans. A.C. vol. A.C. 21, n°1 - pp. 108-112. Feb. 76.

