PREMIER COLLOQUE IMAGE

Traitement, Synthèse, Technologie et Applications

BIARRITZ – Mai 1984 –

LES FRACTALES: OBJETS MATHÉMATIQUES, MODÈLES PHYSIQUES ET CRÉATIONS ARTISTIQUES

Benoit B. MANDELBROT

IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY, 10598, USA

RESUME

La géométrie fractale de la nature fut conçue et développée par l'auteur de ce travail et présentée pour la première fois en 1975. Ses sources se trouvent dans deux découvertes inattendues, aux multiples effets cumulatifs. Les fractales ont contribué à redonné aux mathématiques et à la physique un côté visuel et presque sensuel, et elles ont posé des questions nouvelles concernant l'esthétique et de nombreux problèmes d'informatique et d'infographie.

Ma première découverte concerne le rôle des constructions dites "monstres mathématiques", qui avaient autrefois fait éclater le cadre philosophique de la mathématique et de la physique. J'ai montré que, parmi les variantes de ces constructions, il en est qui permettent enfin de représenter les montagnes, les nuages et les rivières, et d'attaquer d'autres problèmes géométriques immédiats que pose la nature.

Deuxième découverte: les fractales sont souvent belles. De ce fait, l'industrie du spectacle désire de plus en plus pouvoir les créer sur ordinateur de façon économique.

Le but principal de l'exposé oral sera de discuter l'état présent du problème de la synthèse d'images fractales. Mais l'exposé écrit doit se limiter à un but beaucoup plus modeste: il veut, à travers quelques fragments de texte, faire connaître les fractales à ceux des participants qui n'en étaient pas familiers.

SUMMARY

The fractal geometry of nature was conceived and developed by the author, beginning in 1975. It started with two unexpected discoveries, and has had manifold effects. Fractals have contributed to give back to mathematics and to physics the visual and almost sensual aspects that had become almost completely foreign to them. Fractals also raise many new questions concerning esthetics and many problems of computer graphics.

My first discovery concerned the role of the so-called "mathematical monsters", which are geometric constructions that arose around 1900 and threatened the philosophical framework of mathematics and physics. I showed that, among the kin of these monsters, one finds shapes that make it possible, at long last, to represent the mountains, the clouds and the rivers and to tackle diverse other geometric problems that nature raises in particularly immediate fashion.

Second discovery: many fractals are beautiful. Hence, the entertainment business experiences an increasing need to compute them economically.

The oral presentation will be principally devoted to discuss the present status of the problem of the synthesis and rendering of fractal pictures. But the written text has a much more modest goal: it is made of several brief texts that hope to make fractals known to those participants who were not familiar with them.

Benoit B. MANDELBROT

LES FRACTALES: OBJETS MATHÉMATIQUES, MODÈLES PHYSIQUES ET CRÉATIONS ARTISTIQUES

Premier fragment: L'art pour l'amour de la science

Il est souvent difficile de distinguer entre l'artiste et l'artisan: il y a d'innombrables intermédiaires entre l'art pour l'art et l'art commercial, et il arrive qu'un objet en principe utilitaire--dessin ou photographie de fleurs, d'arbres ou de tourbillons--se voit attribuer l'auréole d'oeuvre d'art.

Le poète nous dit, de plus, qu'Euclide a contemplé la Beauté toute nue. Mais il faut avouer que la beauté de la géométrie d'Euclide est surtout appréciée des géomètres. Pour le non-initié, elle est nue à l'excès, sèche et machinale, et de toute façon ne se compare en aucune façon à celle des "formes organiques" que l'on recontre dans la nature et dans les beaux-arts.

J'ai découvert, cependant, qu'il peut y avoir une géométrie de la nature autre que celle d'Euclide. Celle que j'ai conçue et développée, la géométrie fractale, incorpore de nombreuses "pièces détachées" dont des mathématiciens étaient plus ou moins familiers, mais elle tourne ces pièces vers des buts absolument inattendus. Le "tout" fractal a d'emblée dépassé ses parties.

En particulier, il n'y a pas que les mathématiciens pour trouver que les fractales sont souvent très belles, et leur beauté se trouve être--à mon avis--d'un genre tout nouveau. Arrêtons-nous sur ce point. Il ne s'agit ici ni d'art pour l'art, ni d'art commercial. Il ne s'agit pas non plus de la forme usuelle (déjà signalée) de l'art pour l'amour de la science celle des dessins ou des photographies de fleurs, d'arbres ou de tourbillons. Ce dernier contraste mérite d'être souligné. Comme il a déjà été sous-entendu, ceux qui exaltent la beauté de la nature la contrastent souvent avec le caractère sec et machinal de la géométrie et de la théorie. Eh bien, les images fractales nous prouvent qu'il existe aussi un art pour l'amour de la *théorie* scientifique et des mathématiques. Dans mon oeuvre, la théorie scientifique et les mathématiques se trouvent avoir un puissant aspect graphique, et c'est cet aspect qui est très largement perçu comme étant plastiquement beau. Comme tout art pour l'amour de la science, l'art fractal est à la fois tout à fait utilitaire et très pur. Tandis que l'art utilitaire usuel a le droit d'user de tous les trucs pour décorer, éduquer, flatter, amuser, impressionner ou convaincre, l'art scientifique se doit d'imiter le *donné* de la nature avec un minimum d'intervention de la part du réalisateur.

Revenons à l'utilité des fractales. On sait que la beauté d'une fleur est utile--voire indispensable--à la survie de l'espèce, car la fleur doit être belle pour attirer l'insecte qui va recueillir et propager son pollen. Et de même, c'est très souvent la beauté des images fractales qui a d'abord attiré vers elles l'attention de ceux qui ont ensuite repris et propagé les idées ainsi illustrées.

Plus précisément, le but initial de mes images avait été pédagogique. Pour m'expliquer, remontons à la fin des années soixante. J'avais déjà en main des théories fractales (avant le mot, qui ne remonte qu'à 1975), que j'avais conçues pour des phénomènes tels que la turbulence, la persistence des crues du Nil et l'amassement des galaxies, lequel se manifeste par l'existence de grands vides intergalactiques. Or, les ambitions de mes théories étant inhabituelles, elles étaient perçues comme étant condamnées à l'échec. Comme de plus mes techniques paraissaient étranges, et non pas simplement nouvelles, ceux que je cherchais à toucher se sentaient à l'avance certains que l'effort de me comprendre allait être inutile, et ils ne s'y risquaient pas autant que je l'espérais. Pour contourner ce mur d'hostilité, j'eus l'idée, là où les mots et les formules avaient failli, de tenter la pédogogie par l'image. Supposons qu'un spécialiste trouve impossible de distinguer entre la realité et la "contrefaçon" uniquement basée sur une de mes théories: ce spécialiste ne saurait refuser de me lire.

Nul ne peut s'abandonner à dessiner des images fractales sans aussitôt s'entourer de formes qui rappellent le vivant. Quel paradoxe, que cette nouvelle géométrie enfin "organique" doive sa naissance à l'aide d'un outil qui est pour beaucoup le symbole même de l'inhumain et du technique. Pour réaliser à la main le moindre de mes dessins prendrait des siècles; la tâche n'aurait donc pas été entreprise avant d'en connaître le résultat, et le résultat n'aurait même pas pu être soupçonné avant que la tâche ait été entreprise. Toutefois, l'art fractal ne devrait pas être considéré comme faisant partie de "l'art par ordinateur", que ce soit sous la forme de l'art pour l'art ou de l'art commercial.

Benoit B. MANDELBROT

LES FRACTALES: OBJETS MATHÉMATIQUES, MODÈLES PHYSIQUES ET CRÉATIONS ARTISTIQUES

Deuxième fragment: Présentation d'images

Cette présentation étant inextricablement liée aux images projetées, un effort a été fait pour que chaque alinéa marque la projection d'une nouvelle images.

Beaucoup d'entre vous ont pour métier de créer des belles images. Dans mon travail, tout au contraire, l'image est en quelque sorte accidentelle. Chaque fois qu'une belle image paraît, je m'empresse, bien sûr, de la noter et de lui chercher des cousines, mais les images fractales que je me propose de vous présenter n'ont pas été créés dans un but esthétique, mais dans un but scientifique. Sans plus tarder, je passe aux projections.

Cette première image, tout le monde l'appelle "Dragon", que ce soit en Europe, en Amérique, ou au Japon. Or, je n'ai pas cherché un beau Dragon; ce Dragon fractal est venu de lui-même vers moi, quand je faisais l'étude de certains processus mathématiques.

Voici une image très différente; elle a un but scientifique évident: imiter un lever de Planète vu de la Lune, en utilisant des équations que j'ai formulées dans ce but. Mais qu'a-t-elle donc de commun avec le Dragon? Le Dragon est extrêmement schématique et le Lever de Planète ne l'est pas. Les différences entre ces deux image sont très évidentes et très nombreuses, mais derrière elles il y a une ressemblance essentielle: chacune des figures que je vous montre contient en elle-même des éléments de toutes tailles. Dans l'image devant vous il y a la taille de la planète, la taille de la grande montagne vers la droite, la taille du cratère qu'on voit au milieu. En plus de cela, la Planète a un relief irrégulier, la montagne lunaire est irrégulière, et il y a beaucoup de petits cratères. Dans chaque ordre de tailles, il y a quelque chose d'intéressant à examiner. De ce fait, cette image illustre, de façon extrêmement claire, une idée très ancienne: l'idée de symétrie au sens "prémathématique", idée qui exprime une harmonie entre les parties et le tout. Une autre forme de la même symétrie est présente dans le Dragon de tout à l'heure.

Voici une autre image fractale, également systématique, mais de façon différente.

Et en voici une autre encore, d'apparence très différente. J'ai voulu introduire mon exposé à travers plusieurs images plates et plusieurs images spatiales.

Maintenant, nous voici revenus sur la Lune fractale; nous passons devant d'autres planètes... Toutes sont entièrement artificielles. (Nous avons surtout utilisé un système graphique qui donne des images ayant 1,000 lignes en hauteur et 1,200 en largeur).

Nous nous approchons maintenant de la Terre, et nous abordons une vallée fractale... Nous y voilà... Je connais maintenant des artistes qui partent d'un vrai relief, par exemple une montagne, qu'ensuite ils "fractalisent" (un terme que je ne connaissais pas, bien que je connaisse "fractal", puisque je l'ai inventé). Mais la montagne que vous voyez ici n'a pas été "fractalisée"; cette montagne était fractale de naissance.

Voici la même avec des couleurs différentes. Je m'empresse de dire que les couleurs sont "peintes" par l'ordinateur, d'après un algorithme séparé: quand c'est très haut et que le relief est très en pente, il n'y a pas de neige, mais c'est quand c'est haut et pas très en pente, il y a de la neige.

Voici d'autres montagnes, fractales, dont le relief est moins brutal.

Ici, il l'est encore moins. J'insiste sur le fait que l'harmonie pre-établie entre les parties et le tout peut prendre des formes très diverses. Il y a des montagnes fractales plutôt régulières, d'autres extrêmement irrégulières, et cette régularité ou cette irrégularité sont entièrement contrôlables. La théorie que j'ai élaborée pour engendrer ces surfaces permet de choisir le degré d'irrégularité que l'on veut. En jouant avec un petit nombre de paramètres caractéristiques, on a le choix entre une montagne de ce style-ci, ou de ce style-là: une montagne qui ressemble aux Rocheuses, ou aux Alpes de France, de Suisse, ou d'Italie. Comment ai-je été amené à faire ces paysages imaginaires? On me pose la question tout le temps. Il y a des années, j'avais élaboré une théorie des montagnes, mais personne ne voulait m'écouter; les gens se gaussaient de moi, disant que la tâche que je prétendais avoir résolue était de toute évidence impossible. "D'ailleurs, quelle montagne voulez-vous refaire?" me demandaient-ils, "Le Mont Everest ou le Mont Blanc?" En fait, il est évident que je cherchais l'équivalent d'un "Portrait de jeune homme florentin du XVème siecle," non pas du "Portrait de Prince Untel." Comme il était impossible de convaincre mes interlocuteurs par des mots ou des formules, je cherchai à le faire par des images. Il est bien évident que si, aidées par un petit peu de flou, mes images allaient faire illusion, on serait forcé de m'accorder que ma théorie devrait avoir du vrai. Mon collègue Richard Voss (IBM) a collaboré avec moi pour les montagnes que je vous montre; vous allez voir plus tard des montagnes faites avec d'autres de mes associés, mais c'est Voss qui fait les meilleures, et les plus variées. Je dois dire tout de suite que nous ne cherchons pas l'économie dans le calcul. Il ne s'agit pas de faire des montagnes en temps réel, bien sûr. Il ne s'agit pas de les faire massivement, mais de les faire bien, sans chercher de raccourcis, bien que j'en connaisse des bons.

Benoit B. MANDELBROT

LES FRACTALES: OBJETS MATHÉMATIQUES, MODÈLES PHYSIQUES ET CRÉATIONS ARTISTIQUES

Maintenant je vous montre la première montagne fractale, programmeé il y a 10 ans par Sig Handelman. La raison pour laquelle nous avons mis un lac dans beaucoup de mes paysages imaginaires est extrêmement simple: quand on voit côte-à-côte des reliefs sans lacs, il est très difficile de comparer leurs degrés de complication. Pour permettre la comparaison, j'ai ajouté un niveau de référence.

Voici notre premier petit film fractal, "La Création de la Terre." La Terre émerge des eaux... Ce film est très court et de très faible definition (64×64). Il date de 1976... Les eaux remontent...; il ne reste plus qu'un archipel...un semis d'ilots...le Mont Ararat — On voit très bien l'Arche de Noé sur le pic. Il s'agit bien sûr du pic de gauche — comme vous le savez tous, il y a deux Monts Ararat, et non pas un!

Revenons aux diapositives. Celle-ci est la couverture de mon livre de 1977. Le relief, vous le reconnaissez. À l'époque, on le faisait avec beaucoup moins de détails, beaucoup moins de finesse, et le rendu était beaucoup moins bon.

Cette vue, je l'ai empruntée à Loren Carpenter de Lucasfilm; elle est récente. Loren Carpenter a dit et a écrit que nos méthodes de calcul sont trop dispendieuses, que ses montagnes fractales sont moins chères. Et c'est vrai, quoique l'économie n'est pas considérable. Mais ce qu'on perd à cause de cette économie est très visible. Par exemple, bien que le film d'où c'est tiré affirme que la planète que voici vienne d'être découverte, on y voit déjà les autoroutes que voici!!... et il y a également des champs de couleurs différentes! La présence de tels effets de papier froissé et plié étaient parfaitement prévisible. Ce relief a été créé à partir de triangles, de tétraèdres superposés sur d'autres tétraèdres, utilisant une méthode qui est très tentante mais qui malheureusement ne marche pas bien. Cette méthode est en contradiction avec la théorie sous-jacente à mon relief fractal, et ne permet pas du tout d'obtenir une approximation valable.

Dans cette image de Voss, que je passe pour la deuxième fois, vous voyez ce que l'on peut obtenir sans passer par ces triangles et tétraèdres. Les deux images comportent des nombres de lignes comparables; donc, la différence de qualité n'est pas une question de définition, c'est une question d'algorithmes utilisés pour construire ces choses.

Voici ici des nuages fractals. On peut obtenir des nuages de forme douce,

ou plus compliquée,

ou plus compliquée encore... Au début de l'ère fractale, j'avais besoin de lutter pour qu'on reconnaisse la validité de cette idée qui paraissait tout à fait farfelue... Je posais donc des questions provocantes: "Quelle est donc la forme d'un nuage?" "Quelle forme a une montagne?" "Combien mesure la côte de la Bretagne?" Pour beaucoup de personnes, la géométrie usuelle est une science sèche et dure; c'est peut-être qu'elle ne répond pas aux questions que je viens de rappeler, ni à d'autres questions de même genre que les gens se posent sur le monde qui les entoure. Les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes ne sont pas des cônes, les lacs n'ont pas de côtes circulaires, les rivières et les éclairs ne sont pas rectilignes, ainsi de suite. Les objets naturels que l'on voit autour de nous n'ont presque jamais la simplicité idéale de ceux de la géométrie qu'étudiait Euclide. Eh bien, ma nouvelle géométrie fractale est très différente de celle d'Euclide. Remarquez: si je prétendais que j'ai fabriqué une nouvelle géométrie de toutes pièces, on se moquerait de moi avec raison, la tâche étant vraiment impossible. J'ai conçu ma nouvelle géométrie en "récupérant" des pièces existantes, qui avaient été "fabriqués" dans des buts totalement différents. Plus tard, au fur et à mesure que ma géométrie se développait, il a fallu beaucoup de pièces nouvelles inventées exprès. Autrefois, on pouvait dire qu'il y a deux sortes de formes dans le monde: des formes simples, les sphères, les cônes, les cercles, que l'on comprenait bien, et des formes compliquées, les nuages, les montagnes, que sais-je? La première sorte de formes était l'objet de la science, mais pas l'autre. Maintenant, il y a deux sortes de sciences possibles: une science des formes très simples (encore une fois: les cônes, les sphères, etc.) et une science des formes qui sont compliquées, mais le sont de façon systématique: ce sont les fractales. Tout ce que je vous montre est compliqué de façon systématique. Bien sûr, on s'est demandé si vraiment les nuages sont fractals, et la réponse est oui, les fractales donnent un modèle excellent de la forme des nuages.

Maintenant voici un archipel artificiel.

En voici un autre, fait en reproduisant la rugosité de la côte du Japon. On dit, même au Japon, que cela ressemble un peu à un Japon déformé: l'île de Hokkaïdo devrait tourner, et l'île en bas devrait être en haut. Mais Rome n'a pas été construite en un jour, tandis que ce Japon a été fait en moins d'un jour.

Voici encore un archipel tout à fait artificiel. Je le projette tout le temps dans mes conférences scientifiques, quand je veux montrer à quel point la géométrie usuelle peut tromper, si on l'applique où il ne faut pas. Quand on pose cette question très simple, "Combien mesure la côte de la Bretagne?", la plupart des gens répondent: "je ne sais pas, ce n'est pas mon métier"; d'autres répondent "je ne sais pas, mais je regarderai ce soir dans le Larousse". Mais essayons de reflèchir. La côte de la Bretagne, si on la mesure en gros, mesure tant de kilomètres; si on la mesure en plus fin, un peu plus de kilomètres, et, en plus fin, encore plus de kilomètres. Chaque fois qu'on s'approche, on ajoute des caps, des baies, des péninsules, de façon indéfinie; la côte n'a pas de vraie longueur, mais au plus une longueur qui dépend de la méthode de mesure.

Je disais au début que les formes géométriques que j'ai baptisées "fractales" sont caracterisées par la coexistence d'éléments de toutes tailles. Si l'on veut réaliser ce genre de géométrie, il y a un moyen très simple: dessiner une figure où ces éléments ont été insérés de façon délibérée. Dans la structure que voici, dite flocon de neige, on voit un grand triangle et des triangles de plus en plus petits, formant des péninsules et des baies en nombre infini, et de toutes les tailles. Au milieu du diagramme, vous voyez une façon de briser une ligne pour lui faire remplir la courbe de flocon de neige. En 1890, un mathématicien italien de génie, qui s'appelait Giuseppe Peano, a le premier trouvé une courbe ayant la prétension incroyable de vouloir remplir un carré! Une courbe bien élevée a le droit d'entourer un carré, mais remplir un carré, c'est pour une courbe quelque chose d'extraordinaire! Peano pensait que c'était monstrueux. La réaction normale des gens à l'égard d'un monstre est de fermer les yeux, et c'est ça que les mathématiciens et tous les autres ont fait. (Regarder un monstre pourrait rendre avengle!) Il y a cent ans, les dessins ont commencé à disparaître des livres de mathématiques, c'est-à-dire qu'on a commencé à ne connaître les monstres que par ouï-dire, ou par des descriptions écrites. Ainsi s'est créé une collection d'objets sans nom, sauf qu'on les appelait souvent "objets pathologiques", mais dont tout le monde se sentait en droit de dire qu'ils n'avaient aucun rapport concevable avec la nature. J'ai démontré le contraire: les surfaces des montagnes que nous avons vues au début sont des soi-disant monstres mathématiques, ce sont aussi des modèles physiques. Et de plus, elles sont belles, pas toujours, mais très souvent. Pourquoi sont-elles belles? Peut-être bien parce qu'elles nous rappellent la nature, car je suis sûr que notre notion de beauté est fortement influencée par ce que nous voyons autour de nous dès le berceau.

La courbe que je vous montre ici est très compliquée. Un seul dessin vaut mille mots, comme chacun le sait en France, et il y a une tendance naturelle à croire qu'un dessin compliqué exige une description compliquée; que décrire un dessin qui comporte beaucoup de détails doit nécessairement exiger un long discours. Cette courbe-ci comporte un détail infini, tout au moins en principe, donc on pourrait croire qu'il faut un discours infini pour la décrire. Or, ce n'est pas du tout le cas. Elle nous donne un exemple inattendu d'art "minimal". C'est un art dans lequel une œuvre peut être reconstruite d'après une description au téléphone, et la description complète n'exige pas une longue, longue liste d'instructions, mais une liste très courte. La légende complète de l'objet que voici prend une ligne, une seule. Cette ligne, bien sûr, n'est comprise que des mathématiciens, mais les mathématiciens parlent le même langage partout dans le monde. Depuis que j'ai commencé a faire des dessins comme celui-ci, en 1978, beaucoup de mathématiciens ont lu ma légende, et on fait des dragons aux quatre coins du monde. Tous ces dragons sont identiques. Le fait que l'on puisse faire des choses si subtiles de façon complètement artificielle, sans aucune intervention d'un artiste, c'est troublant. On dirait que cette richesse plastique n'avait pas à être créée, mais à être découverte; qu'elle avait toujours existé... On ne le savait pas, mais presque tout ce que je vous montre en ce moment était implicite dans des mathématiques d'il y a cent ans, que tout le monde, moi compris, considérait comme extrêmement sèches et rébarbatives. En fait, c'est pour leur échapper que j'ai démissionné de l'Ecole Normale il y a quarante ans! Je pensais que ces mathématiques c'était trop sec. Et, quarante ans après, je vois qu'on m'avait trompé, simplement parce qu'on se trompait. Sous leur surface tellement poussiéreuse, il y avait un monde plastique d'une richesse extraordinaire. On me dit que j'ai contribué à reconstituer aux mathématiques un côté visuel et même sensuel.

Parlant d'esthétique, on se demande toujours dans quelle mesure les différences de goût sont "mesurables". Eh bien, voici une différence mesurable. Ce premier dragon a des détails extrêmement compliqués, et ce deuxième dragon, au contraire, est extrêmement sobre. Or, ils ne diffèrent que parce qu'un nombre qui les caractérise prend des valeurs très différentes. À l'époque baroque, presque tout ce qui pouvait être décoré était décoré; à d'autres époques, au contraire, on laissait de grandes parties dépouillées. N'empêche que, dans chaque cas, il y avait un élément fractal, à travers la présence de détails décoratifs de toutes tailles.

Voici une image qui mérite un commentaire. Elle résulte d'une formule très simple, encore une fois, mais elle rappelle certaines bestioles, des sortes de homards. Quand on y pense, c'est étrange que chaque espèce de homard ait sa collection caractéristique de cornes et de bosses, et que si on compare deux espèces il n'y a pas une différence mais mille. Pourquoi est-ce que le Bon Dieu change tous ces détails en même temps? Pourquoi ne pas juste changer la forme d'une seule pince? On se demande si ce n'était pas inutilement cher de faire tant de changements à la fois. Or, ici, il n'est pas du tout nécessaire que ce soit cher. Encore une fois, la différence entre cette bestiole, aux cornes longues, et celle-ci, aux cornes plus courtes, est simplement une difference entre deux nombres qu'on met dans une formule.

Je passe maintenant à d'autres bestioles. Celle-ci a une seule grande corne,...celle-ci en a deux... Je vais vite parce que le temps presse. Il y a deux paniers de diapositives à faire passer et je n'ai pas le temps de tout expliquer.

Ceci n'est pas du vieil or Inca; c'est juste une fractale tout à fait artificielle; le dessin est de Alan Norton. Ces volutes incroyables n'ont pas été crées exprès par un artiste voulant faire du beau, mais (encore une fois) sont venues par nécessité, au cours de nos recherches en dynamique. C'est comme cela qu'un certain aspect des monde est agencé.

J'aurai bientôt fini. Très souvent, nous faisons des erreurs dans nos programme d'ordinateur; nous sommes peu nombreux et pressés, et nous voulons tout faire à la fois. Je ne sais pas si vous vous souvenez de cette courbe de Peano qui remplit le flocon de neige? Eh bien, à l'époque c'était difficile de la programmer. Une erreur de programme nous a donné le dessin que voici. "Comme c'est étrange", nous dit-on; "on aurait dit un très mauvais dessin expressionniste allemand des années vingt!" Tout le monde trouve à ce dessin une ressemblance avec un certain style de peinture ou de gravure. Or, encore une fois, ce dessin résulte d'une erreur se glissant dans un programme réalisé dans une intention toute autre. Qu'est-ce qui était arrivé? Eh bien, la réponse est je crois la suivante. Le dessin que je cherchais à faire, j'avoue qu'on s'en lasse assez vite; c'est très systématique, et on découvre assez vite la formule. C'est d'ailleurs pour cela que beaucoup de mes diapositives ne montrent qu'un petit morceau d'un grande image, parce que, quand on voit le tout, on devine plus vite la formule. Ce dessin-ci est venu vers nous quand un autre dessin qui aurait été systématique a été perturbé par une toute petite faute de programme.

Ceci n'est pas non plus le dessin qu'on avait voulu faire. Ce n'est pas une explosion, c'est la superposition accidentelle d'un grand nombre de fractales; pour une raison mystérieuse, perdue dans la nuit des temps, au lieu de les séparer, on les a superposées les unes sur les autres. Toutes ces erreurs de programme sont extrêmement éclairantes. Encore une fois, les fractales systématiques, faites dans un but scientifique, peuvent avoir un côté brutal. Des fautes plus ou moins triviales, sûrement pas intentionnelles, éliminent le côté systématique, et le tout s'améliore merveilleusement.

C'est tout ce que j'ai à vous montrer. Merci de votre attention.

Appendice bibliographique

La géometrie fractale a été présentée pour la première fois dans mon essai en français *Les objets fractals: forme, hasard et dimension,* paru en 1975 chez Flammarion 1975. Cet ouvrage a maintenant dépassé l'âge ingrat où il devenait de moins en moins à jour, pour atteindre l'âge où c'est à la fois un document historique et une brève introduction. Mon deuxième livre, *Fractals; form, chance and dimension* (1977) est épuisé et dépassé. L'ouvrage de base aujourd'hui est *The Fractal Geometry of Nature,* paru en 1982 chez W. H. Freeman (New York et Oxford). Copyright © 1982 by Benoit B. Mandelbrot. A Paris, il se trouve chez Offilib, Rue Gay-Lussac (5^{e}) et à la Librairie Lavoisier, Rue Lavoisier (8^{e}).

Plusieurs traités destinés aux mathématiciens ou aux physiciens sont annoncés, mais n'ont pas encore paru.

Des compléments aux fragments ci-dessus se trouvent dans mon article dans *Le Débat* de Mars 1983 (revue éditée par Gallimard), dont des versions abrégées ont paru dans *la Jaune et la Rouge* de décembre 1982 et d'autres recueils. Voir aussi mon article paru dans *La Recherche* de janvier 1978, et (sous forme plus détaillée) dans *Penser les mathématiques* (Le Seuil, 1982).

Parmi les nombreuses présentations en français dûes à d'autres auteurs, voir *La Science et la Vie* de juillet 1983 et la bande dessinée *Les fractals,* dessins d'Ian Stewart, bulles adaptées de mes livres, publiée par E. Belin en 1981.

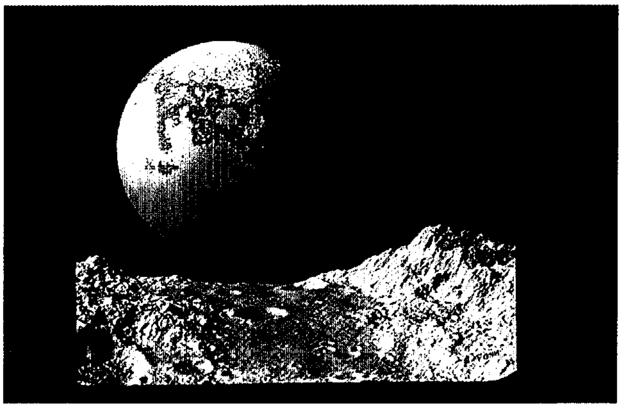

FIGURE 1

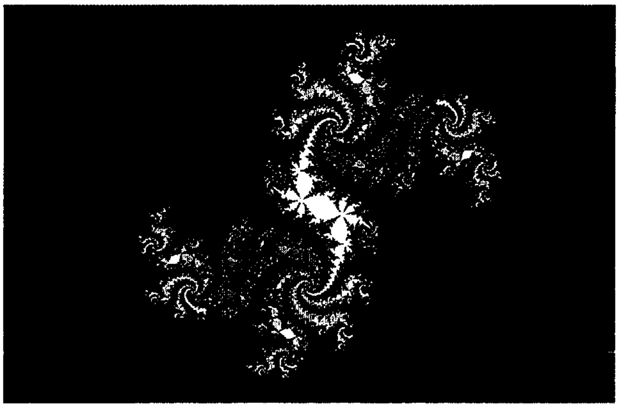

FIGURE 2

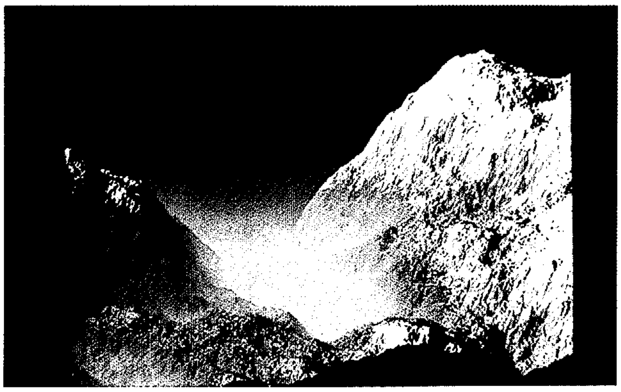

FIGURE 3

FIGURE 4

Légendes

Figure 1 Lever de planète fractal, réalisé par Richard F. Voss. **Figure 2 Dragon fractal,** réalisé par Mark R. Laff et V. Alan Norton. Copyright 1982 by Benoit B. Mandelbrot.

Ces deux images fractales sont expliquées dans les légendes des Figures 3 et 4. Elles ont acquis une large renommée, car elles reproduisent la jacquette d'un ouvrage cité dans la bibliographie.

Figure 3 Fjord fractal sous la brume, réalisé par Richard F. Voss. Copyright 1984 by Richard F. Voss.

La brume est "dessinée" en résolvant exactement le problème de la diffusion et réflexion partielle de la lumière quand la densité des gouttes d'eau suit la loi dite barométrique. Les montagnes sont exactement aussi artificielles que les dragons. L'idée est d'accomplir une synthèse complète des paysages, l'équivalent de la synthèse de l'hémoglobine à partir d'atomes et d'énergie, et non pas seulement une synthèse partielle qui aurait pu consister à partir d'un paysage réel et à le triturer à l'ordinateur.

Henri Poincaré a écrit au sujet de la science et des mathématiques qu'il y a des problèmes qu'on se pose et des problèmes qui se posent eux-mêmes. Il faut ajouter qu'il y a aussi des problèmes que l'enfant se pose, mais qu'aucun scientifique n'ose plus se poser, car il n'arrive pas à se convaincre qu'il soit possible de leur donner les réponses cohérentes et ordonnées que la science exige. Auguste Comte avait eu l'audace de définir la sociologie comme une science-à-faire, mais il est de mauvais ton aujourd'hui de suivre cet exemple. C'est ainsi que je crois que le problème de réaliser une géométrie des montagnes ne s'est posé qu'après que je lui aie donné le début de solution que voici.

Du point de vue mathématique, le relief de ce paysage spectaculaire est simplement une "surface de Brown fractionnelle". Pour en assurer la qualité, elle a été construite par une méthode assez lourde. Nous avons maintenant des méthodes rapides, mais qui évitent les défauts des approximations utilisées dans les images fractales commerciales qu'on a vues dans certains films.

Une vue plus ancienne du même fjord, sans brume et avec des couleurs moins fines, figure dans *The Fractal Geometry of Nature;* et de nombreux recueils.

Figure 4 Dragon fractal quaternionique, réalisé par V. Alan Norton. Copyright 1983 by V. Alan Norton.

A première vue, quoi de plus simple, transparent, et pauvre en conséquences que la transformation quadratique qui va de z à z^2-m? En tirer quoi que ce soit d'intéressant paraît évidemment exclu. Eh bien, cette évidence-là ne résiste pas à l'analyse! Plus précisément, itérons cette transformation dans le plan complexe, c'est-à-dire répétons-la à l'infini, chaque étape partant du point d'arrivée de l'étape précédente. Voici ce qu'on trouve: sauf si le point initial tombe dans un certain domaine exceptionnel, l'itération aboutit au point à l'infini. Mais ce domaine exceptionnel vaut vraiment la peine d'être examiné. Sa frontière, appelée "ensemble de Julia", est une fractale. Quand c'est une courbe (branchue à l'infini), tout le monde l'appelle "dragon". La droite de la Figure 1 représente un des innombrables genres, espèces et variétés de dragons, à savoir, une variété ayant 5 "bras" en chacun de ses points d'embranchement. La "théorie de Julia" date de 1918, mais elle avait été très peu pratiquée jusqu'à ce que la géométrie fractale la replace, vers 1980, au centre des mathématiques.

La figure 4 généralise la construction du dragon au cas encore plus spectaculaire où l'itération se fait dans le domaine des quaternions. Ce qu'on voit ici est l'intersection d'une figure quadridimensionnelle par un plan. Le lecteur intéressé se rapportera au travail de Norton dans les Actes du Siggraph de 1982 (tenu à Boston).

Benoit B. MANDELBROT
LES FRACTALES: OBJETS MATHÉMATIQUES, MODÈLES PHYSIQUES ET CRÉATIONS ARTISTIQUES

FIGURE 5

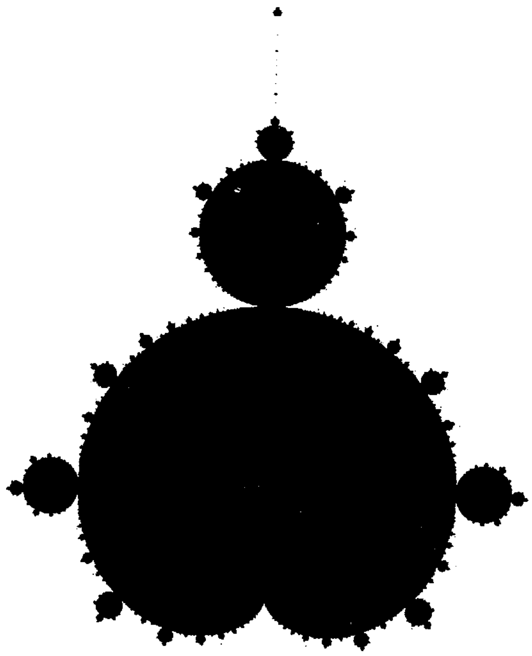

FIGURE 6

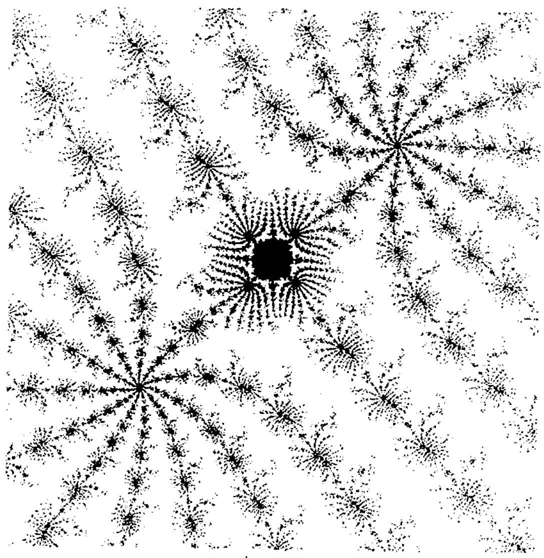

Figure 5 "Ensemble de Mandelbrot". Figure 6 Détail de la Figure 5. Copyright 1982, 1983 by Benoit B. Mandelbrot.

Cet ensemble effectue la classification de tous les dragons construits par la transformée quadratique qui va de z à z^2-m. Pour connaître la forme du dragon, il suffit de déterminer où le point m se place dans ce dessin, dont la frontière est elle-même une fractale. J'avais découvert les premières de ces règles et les autres sont devenues un objet d'étude pour de nombreux mathématiciens.

A première vue, ce dessin est de forme fort systématique: une cardioïde entourée d'"orbes", dont chacun se décompose en orbes plus petits. Mais quelles surprises m'a réservé un regard plus attentif! Tout d'abord, les petites taches que l'on voit autour du "continent" central ne sont pas toutes des bavures d'imprimerie: beaucoup d'entre elles se révèlent à l'agrandissement être des "îles" très semblables au "continent", à une petite déformation près. Deuxièmement, ces îles se révèlent être reliées entre elles et au continent par des "chevelures", dont le détail est de richesse et de variété également étonnantes, deux orbes en apparence identiques étant doués de chevelures totalement différentes. La Figure 5 montre un détail de chevelure près d'un des orbes d'ordre 11.