MODELE AUTOREGRESSIF BIDIMENSIONNEL POUR LA SYNTHESE DE TEXTURE

AUTO-REGRESSIVE BI-DIMENSIONAL MODEL FOR TEXTURE SYNTHESIS

SONG DE MA et ANDRE GAGALOWICZ

INRIA - Domaine de Voluceau - BP 105 - 78153 LE CHESNAY CEDEX - FRANCE

RESUME

La synthèse de texture à l'aide d'un filtre autorégressif a déjà été étudiée dans la littérature. Les paramètres du filtre autorégressif peuvent être calculés par la fonction d'autocorrélation de la texture en utilisant des techniques d'estimation linéaire.

La stabilité de ces filtres est un problème crucial car il n'existe pas de théorème de factorisation pour les polynômes multivariables. Dans ce papier, on utilise un filtre autorégressif demi-plan asymétrique pour effectuer la synthèse de textures naturelles. Les raisons de ce choix sont explicitées dans [1], [2]. On résout le problème de la stabilité à l'aide d'une technique appelée PLSI (planar least square inverse) de la manière suivante : si le filtre obtenu par estimation linéaire s'avère expérimentalement instable, on recherche la meilleure approximation stable de ce filtre aux moindres carrés en calculant deux fois le PLSI du filtre obtenu. La stabilité de ce dernier filtre est fondée sur la conjecture de Shanks [3].

Deux exemples de textures (sable et image sismique) sont synthétisés. Les corrélations sont mesurées dans un voisinage de taille 9 * 9 nécessaire pour obtenir une bonne approximation des textures naturelles.

SUMMARY

The synthesis of texture using an autoregressive filter has been studied in the literature. The parameters of such a filter can be computed from the autocorrelation function using linear estimation techniques.

The problem of the stability of these filters is difficult because there is no theorem of factorization for multivariable polynomes. In this paper, we use an autoregressive filter defined on an asymetrical half--plane to synthesize natural textures. The reasons of this choice is described in [1],[2]. The problem of the stability is solved by the technique called PLSI (planar least square inverse) described as follows : if the filter obtained by the linear estimation is experimentally not stable, we calculate its best stable approximation in the least mean square error meaning. This best approximation is obtained by using two times the PLSI. The stability of the filter obtained is based on the conjecture of Shanks [3].

Two examples of natural textures (sand and seismic picture) are generated using the correlations mesured within a neighborhood of size 9 * 9 pixels, which is necessary to obtain a good reproduction of the given natural textures.

MODELE AUTOREGRESSIF BIDIMENSIONNEL POUR LA SYNTHESE DE TEXTURE

AUTO-REGRESSIVE BI-DIMENSIONAL MODEL FOR TEXTURE SYNTHESIS

Song de Ma et André Gagalowicz

I) INTRODUCTION

La technique d'estimation linéaire a été considérablement développée ces dernières années surtout dans les domaines du traitement du signal monodimensionnel. Par contre, pour les signaux bidimensionnels, les modèles ont été très peu utilisés principalement à cause de l'absence de théorème de factorisation pour les polynômes multivariables.

Dans ce papier, on propose l'utilisation d'un modèle autorégressif demi-plan asymétrique pour effectuer la synthèse de textures naturelles. Ce modèle se déduit de la suite des corrélations du processus bidimensionnel correspondant à un ensemble de translations défini dans un voisinage de taille assez grand nécessaire pour obtenir une bonne approximation des textures naturelles. Pour rendre le filtre stable, ce qui est un grand problème en pratique, on utilisera une technique appelée PLSI (planar least square inverse) fondée sur une conjecture de stabilité du filtre bidimensionnel proposée par Shanks [3].

II) MODELE AUTOREGRESSIF DEMI-PLAN ASYMETRIQUE

Un signal bidimensionnel, stationnaire du second ordre, centré $X_{m,n}$, peut être représenté par :

$$\sum_{(i,j)\in E_{K,H}} a_{i,j}\, X_{m-i,n-j} = b\, U_{m,n} \qquad (a_{0,0}=1) \tag{1}$$

où $U_{m,n}$ est un bruit blanc dont la moyenne est égale à zéro, la variance est égale à 1. $E_{K,H}$ est un demi-plan asymétrique (voir figure 1).

$$E_{K,H} = \{(i,j),\ i \in [1,H],\ j \in [-K,K] \text{ et } i = 0,\ j \in [0,K]\}$$

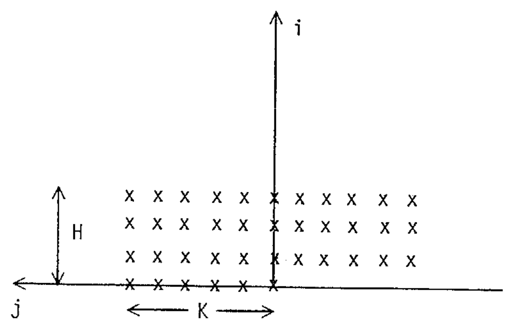


Figure 1 : Un demi-plan asymétrique $E_{K,H}$

La fonction de transfert du modèle est obtenue par la transformation en [Z,W] de (1)

$$H(Z,W) = \frac{b}{A(Z,W)} \tag{2}$$

Les coefficients $a_{i,j}$ du modèle (1) peuvent être estimés à partir des corrélations du signal $X_{m,n}$ définies par

$$r_{s,t} = E\,[X_{m,n} \cdot X_{m-s,n-t}] \tag{3}$$

Puisque $U_{m,n}$ est un bruit blanc, on a :

$$E[X_{m-s,n-t} \cdot U_{m,n}] = \begin{cases} 0 \text{ si } (s,t)\in E_{K,H} \text{ et } (s,t) \neq (0,0) \\ b^2 \text{ si } (s,t) = (0,0) \end{cases} \tag{4}$$

L'application de (3), (4) au modèle (1) donne un système d'équations linéaires (ou équation de Yale--Walker) :

$$\sum_{(i,j)\in E_{K,H}} a_{i,j}\, r_{s-i,t-j} = \begin{cases} 0 \quad \forall\ (s,t)\in E_{K,H},\ (s,t)\neq(0,0) \\ b^2 \text{ si } (s,t) = (0,0) \end{cases} \qquad (a_{0,0}=1) \tag{5}$$

Ainsi, on peut calculer $a_{i,j}$ à partir des corrélations $r_{s,t}$ estimées sur une texture originale.

Le filtre $H(Z,W) = 1/A(Z,W)$ dont les coefficients $a_{i,j}$ sont donnés par le système (5) n'est pas forcément un filtre stable ; donc le problème se pose, dans le cas où ce filtre est instable, de modifier les coefficients de ce filtre pour le rendre stable sans changer considérablement ses caractéristiques.

III) METHODE DU PLSI (PLANAR LEAST SQUARE INVERSE)

Supposons que l'on a un filtre polynômial B(Z,W) :

$$B(Z,W) = \sum_{(i,j)\in E_{M,N}} b_{i,j}\, Z^i\, W^j \qquad (b_{0,0}=1) \tag{6}$$

Puisque $E_{M,N}$ est défini dans un demi-plan asymétrique <u>fini</u>, ce filtre polynômial est stable.

Notre but est de trouver un filtre récursif 1/A(Z,W) qui est une approximation de B(Z,W) :

$$B(Z,W) \cong 1/A(Z,W)$$

$$A(Z,W) = \sum_{(i,j)\in E_{K,H}} a_{i,j}\, Z^i\, W^j \tag{7}$$

A(Z,W) sera l'approximation de l'inverse de B(Z,W) :

$$B(Z,W) \times A(Z,W) = C(Z,W) \cong 1$$

La multiplication des deux polynômes B(Z,W) et A(Z,W) est égale au polynôme C(Z,W) défini dans le demi-plan $E_{M+K,N+H}$:

$$C(Z,W) = A(Z,W)\, B(Z,W) = \sum_{i,j\in E_{M+K,N+H}} C_{i,j}\, Z^i\, W^j$$

et on a :

$$\begin{cases} C_{i,j} = \sum_{(s,t)\in E_{K,H}} a_{s,t}\, b_{i-s,j-t} \\ \forall\ (i,j)\in E_{M+K,N+H} \end{cases} \qquad (8)$$

On remarque que $C_{0,0} = 1$ puisque $a_{0,0} = b_{0,0} = 1$. Ainsi, on a :

$$C(Z,W) = 1 + \sum_{\substack{(i,j)\in E_{M+K,N+H} \\ (i,j)\neq(0,0)}} C_{i,j}\, Z^i\, W^j \qquad (9)$$

pour que $C(Z,W) \cong 1$, on cherche des coefficients $a_{s,t}$ tels que l'erreur quadratique

$$ERR = \sum_{i,j\in E_{M+K,N+H}} C^2_{i,j} \qquad (10)$$

soit minimale.

Alors on a :

$$\frac{dERR}{d\, a_{s,t}} = 0 \quad \forall (s,t)\in E_{K,H} \text{ et } (s,t)\neq 0 \qquad (11)$$

L'application de (8), (10) et (11) donne un système d'équations linéaires qui nous permet de calculer les coefficients $a_{s,t}$.

Ainsi, étant donné un polynôme $B(Z,W)$ défini dans le demi-plan $E_{M,N}$, on peut trouver par la méthode du PLSI un polynôme $A(Z,W)$ tel que $1/A(Z,W)$ est la meilleure estimée de $B(Z,W)$ au sens de la minimisation quadratique.

L'intérêt du choix de la méthode du PLSI est la suivante :

* dans le cas monodimensionnel, on peut prouver que l'inverse du PLSI d'un filtre est stable.

* dans le cas bidimensionnel, cette assertion n'a pas pu être démontrée. Shanks [3] a proposé une conjecture qui affirme que la proposition démontrée dans le cas monodimensionnel est encore vraie dans le cas bidimensionnel. Malheureusement, Genin et Kamp [4] ont pu exhiber un contre-exemple à cette conjecture. Cependant, on a constaté qu'il est très difficile d'exhiber des contre-exemples et que pratiquement, on obtient généralement des filtres stables.

IV) SYNTHESE DE TEXTURE

Dans la section II, en utilisant la technique d'estimation linéaire, on peut obtenir un filtre récursif $1/A(Z,W)$, mais ce filtre est très souvent instable. On utilisera deux fois la technique du PLSI de la manière suivante pour le rendre stable :

1) On calcule l'inverse de $A(Z,W)$ et on obtient un filtre polynômial $B(Z,W)$:

$$B(Z,W) \cong 1/A(Z,W)$$

$B(Z,W)$ est un filtre polynômial défini dans un demi-plan asymétrique $E_{M,N}$. Puisque $E_{M,N}$ est un domaine fini $B(Z,W)$ est un filtre stable. Pour assurer la précision de l'approximation, $E_{M,N}$ est choisi plus grand que $E_{K,H}$, le domaine de définition de $A(Z,W)$.

2) On calcule le PLSI de $B(Z,W)$ et on obtient un filtre autorégressif $1/A'(Z,W)$ stable peu différent de $1/A(Z,W)$:

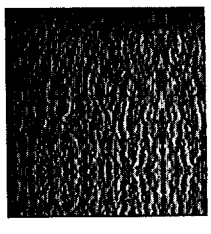
$$A'(Z,W) \cong 1/B(Z,W)$$

Il est évident que $1/A'(Z,W)$ est une approximation de $1/A(Z,W)$ et grâce à la conjecture de Shanks, c'est un filtre stable.

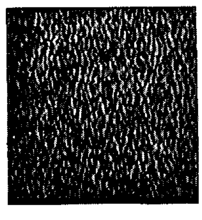
V) RESULTATS

Deux exemples de synthèse de textures (sable et image sismique) sont présentés. Le demi-plan asymétrique $E_{K,H}$ est défini par $K = 5$, $H = 5$, ce qui nous permet de contrôler les corrélations dans une fenêtre de taille $9 * 9$.

Les textures originales sont présentées sur les figures (2.1) (image sismique) et (4.1) (sable). Sur les figures (2.2) et (4.2), on montre les textures générées. Sur les figures (3), on montre une texture générée par un filtre dont les coefficients $a_{i,j}$ sont calculés par la méthode d'estimation linéraire et le résultat montre que ce filtre n'est pas un filtre stable. Avec l'utilisation du PLSI, on obtient une approximation de ce filtre, mais stable, avec lequel on peut générer une texture (voir figure 2.2) qui est une très bonne approximation de la texture originale.



(2.1)



(2.2)

Figure 2 : Synthèse de l'image sismique

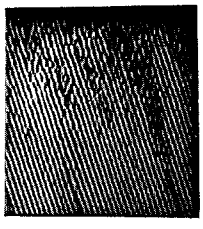
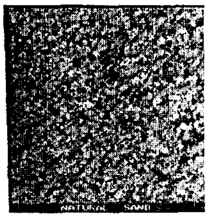
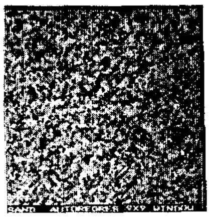


Figure 3 : Synthèse de l'image sismique avec $1/A(Z,W)$ instable



(4.1)



(4.2)

Figure 4 : Synthèse de texture (sable)

REFERENCES :

[1] S.D. MA, "Synthèse de textures", Thèse de doctorat 3ème cycle, Université de Paris VI, France, Mai 1983.

[2] A. GAGALOWICZ, "Vers un modèle de texture", Thèse de doctorat d'Etat, Université de Paris VI, France, Mai 1983.

[3] J. SHANKS, J.H. JUSTICE, "Stability and Synthesis of Two-dimensional Recursive Filters", IEEE Trans. Audio. Electroacoustic, AU-20 (2), pp. 115-128, (1972).

[4] Y. GENIN and Y. KAMP, 1975, "Contre-Example in the Least Square Inverse Stabilization of 2-D Recursive Filter", Electronics Letter 11, pp. 330-331.