

PREMIER COLLOQUE IMAGE
Traitement, Synthèse, Technologie et Applications

BIARRITZ - Mai 1984 -

VOLUDENSITOMETRIE : ETUDE METHODOLOGIQUE DU PROBLEME DE TRAJECTOGRAPHIE

VOLUDENSITOMETRY : METHODOLOGICAL STUDY ON TRAJECTOGRAPHY

GRANGEAT Pierre

LABORATOIRE D'ELECTRONIQUE ET DE TECHNOLOGIE DE L'INFORMATIQUE - CEA.CENG - 85 X - 38041 GRENOBLE CEDEX

RESUME

L'évolution actuelle des systèmes d'imagerie X concerne l'évaluation de la valeur locale de la densité de matière sur tout le volume analysé, en une seule opération d'acquisition-reconstruction. Afin d'améliorer les résultats, il est souhaitable d'optimiser les trajectoires d'acquisition. Ceci ne peut être envisagé que si des algorithmes de reconstruction généralisés sont développés.

Comme aucun résultat théorique n'est disponible, nous présentons une nouvelle approche fondée sur un calcul approché de la Transformée de Radon et sur l'utilisation de sa formule d'inversion. Nous donnons une majoration de l'erreur de méthode. Celle-ci montre que la précision théorique est compatible avec nos besoins. Nous introduisons enfin les concepts permettant de résoudre le problème sous forme numérique.

SUMMARY

The actual trend in X-ray imaging is to perform the computation of the local value of the material density all among the volume analysed, this within a single acquisition-reconstruction operation. In order to improve the result, it is useful to optimize the data-acquisition trajectory. This can be achieved only if generalized reconstruction algorithms are developed.

As no theoretical results are available, we present a new approach based on an approximated calculation of the Radon Transform and on the use of its inversion formula. We give an over-estimation of the error due to this method. It shows that the theoretical precision is in agreement with our need. We introduce at last the concepts to perform the numerical solution of the problem.



I - INTRODUCTION

L'étude de la répartition dans l'espace de la densité de matière grâce au rayonnement X permet de caractériser la structure interne des objets. La tomodesitométrie ne fournissant les valeurs locales que sur un plan de coupe, l'analyse complète nécessite une succession d'investigations. Le but de la voludensitométrie est de restituer en une seule phase la répartition sur tout le volume d'intérêt. Le système de mesure comporte une source émettant un rayonnement conique et un détecteur bidimensionnel, l'ensemble décrivant les positions d'acquisition définies sur la trajectoire.

Nous avons mis au point une méthode permettant de calculer les valeurs locales à partir d'une famille de trajectoires très large. Ainsi disposerons nous d'un degré de liberté maximum pour aborder le problème des "projections tronquées", l'adaptation des trajectoires à l'architecture d'un corps et l'utilisation des incidences minimisant le rayonnement diffusé.

II - FONDEMENTS DE LA METHODE

1 - Contexte général

L'étude des trajectoires telles que les données mesurées caractérisent de façon biunivoque le volume analysé et l'établissement de formules de reconstruction sont deux thèmes de la géométrie intégrale [2]. Hamaker et al. dans [3] montrent qu'il existe un grand degré de liberté sur la définition de la trajectoire. Mais l'énoncé de formules directes d'inversion reste un problème ouvert ([4]). Nous avons alors essayé d'établir une méthode de résolution approchée cherchant à estimer la Transformée de Radon puis mettant à profit sa formule d'inversion. Plus la source sera éloignée de l'objet, meilleure sera l'approximation.

2 - Opérateur d'approximation de la Transformée de Radon

Plaçons nous dans \mathbb{R}^3 admettant O comme origine. La fonction densité f sera supposée nulle en dehors de la boule Ω de centre O et de rayon unité. Soit S^2 l'ensemble des vecteurs unitaires de \mathbb{R}^3 .

A tout couple (\vec{N}, ρ) de $S^2 \times [-1, 1]$ nous associons le plan $P(\vec{N}, \rho)$ d'équation :

$$M \in P(\vec{N}, \rho) \iff \vec{OM} \cdot \vec{N} = \rho$$

Soit i l'image de f par la Transformée de Radon :

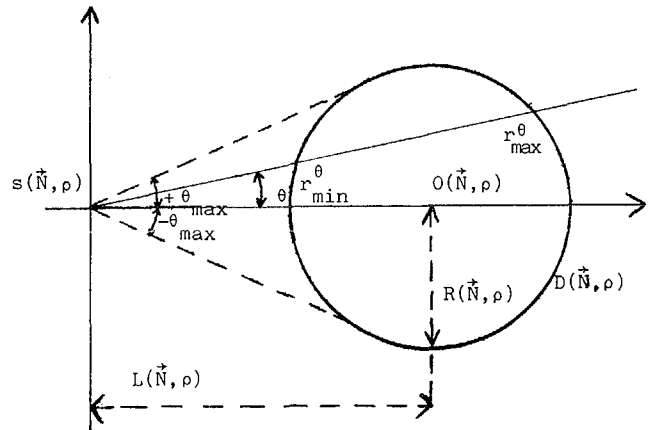
$$i(\vec{N}, \rho) = \iint_{P(\vec{N}, \rho)} f(M) dM$$

Une trajectoire T sera dite admissible si quel que soit (\vec{N}, ρ) de $S^2 \times [-1, 1]$, l'intersection $T \cap P(\vec{N}, \rho)$ contient au moins un point.

Nous associons alors à T un paramétrage s de $S^2 \times [-1, 1]$ dans \mathbb{R}^3 privilégiant un de ces points chaque fois que cela est nécessaire.

Une trajectoire admissible sera dite capable s'il est possible de définir un paramétrage s qui soit de classe C^∞ vis-à-vis de ρ , quel que soit N de S^2 .

Plaçons nous dans $P(\vec{N}, \rho)$. L'intersection avec Ω définit un disque $D(\vec{N}, \rho)$ de centre $O(\vec{N}, \rho)$, de rayon $R(\vec{N}, \rho)$. Munissons $P(\vec{N}, \rho)$ d'un repère en coordonnées polaires, centré sur $s(\vec{N}, \rho)$ et admettant $(s(\vec{N}, \rho), O(\vec{N}, \rho))$ comme axe de référence des angles.



Description des paramètres définis dans le plan $P(\vec{N}, \rho)$

Posons : $L(\vec{N}, \rho) = \|\vec{s}(\vec{N}, \rho) - \vec{O}(\vec{N}, \rho)\|$

$$\theta_{\max} = \arcsin \left[\frac{R(\vec{N}, \rho)}{L(\vec{N}, \rho)} \right]$$

$$r_{\min}^\theta = L(\vec{N}, \rho) \cdot \cos \theta - \left[(R(\vec{N}, \rho))^2 - (L(\vec{N}, \rho) \cdot \sin \theta)^2 \right]^{1/2}$$

$$r_{\max}^\theta = L(\vec{N}, \rho) \cdot \cos \theta + \left[(R(\vec{N}, \rho))^2 - (L(\vec{N}, \rho) \cdot \sin \theta)^2 \right]^{1/2}$$

L'expression de l'intégrale sur le plan serait :

$$i(\vec{N}, \rho) = \int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} \left[\int_{r_{\min}^\theta}^{r_{\max}^\theta} f(r, \theta) r dr \right] d\theta$$

La mesure nous fournissant $\int_{r_{\min}^\theta}^{r_{\max}^\theta} f(r, \theta) dr$, nous

assimilons r à sa valeur moyenne $L(\vec{N}, \rho) \cdot \cos \theta$ et calculons la valeur approchée suivante :

$$a(\vec{N}, \rho) = \int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} \left[L(\vec{N}, \rho) \cdot \cos \theta \int_{r_{\min}^\theta}^{r_{\max}^\theta} f(r, \theta) dr \right] d\theta$$

Ainsi l'opérateur d'approximation associera à f la fonction a :

$$a(\vec{N}, \rho) = \iint_{P(\vec{N}, \rho)} f(M) \frac{\vec{s}(\vec{N}, \rho) \cdot \vec{s}(\vec{N}, \rho) M}{\|\vec{s}(\vec{N}, \rho) M\|^2} dM$$

3 - Majoration de l'erreur de méthode

Soit f_s la fonction obtenue en appliquant l'opérateur inverse de la Transformée de Radon à a.

Posons :

$$e_s^\Omega = \left[\frac{1}{3} \int_{\Omega} (f_s(M) - f(M))^2 dM \right]^{1/2}$$

$$e(\vec{N}, \rho) = \left[\frac{1}{\pi(1-\rho^2)} \int_{P(\vec{N}, \rho)} (f(M))^2 dM \right]^{1/2}$$

$$e'(\vec{N}, \rho) = \left[\frac{1}{\pi(1-\rho^2)} \int_{P(\vec{N}, \rho)} (f'_N(M))^2 dM \right]^{1/2}$$

où $f'_N(M)$ représente la dérivée partielle de f au point M dans la direction \vec{N} .

A = max $e(\vec{N}, \rho)$
 $(\vec{N}, \rho) \in S^2 \times [-1, 1]$

C = max $e'(\vec{N}, \rho)$
 $(\vec{N}, \rho) \in S^2 \times [-1, 1]$

D = min $\|\vec{SM}\|$
 $(S, M) \in T \times \Omega$

T = max $\frac{\left| \frac{\partial L(\vec{N}, \rho)}{\partial \rho} \right|}{D^2} \cdot \left(1 + \frac{L(\vec{N}, \rho)}{D^2} \right)$
 $(\vec{N}, \rho) \in S^2 \times [-1, 1]$

Nous avons établi la majoration suivante (cf. [1])

$$\frac{e_s^\Omega}{A} \leq \sqrt{\frac{6}{35}} \left(\frac{1}{D} \cdot \frac{C}{A} + \frac{T}{\sqrt{2}} \right)$$

A traduit une amplitude, C un contraste entre deux plans parallèles voisins, T une certaine régularité sur l'éloignement de la source.

$\frac{e_s^\Omega}{A}$ peut être interprété comme une erreur relative.

Comme T varie de façon inversement proportionnelle au carré de la distance D, ce terme devient vite négligeable. Dès lors nous trouvons que cette erreur relative est :

- proportionnelle au contraste relatif $\frac{C}{A}$
- inversement proportionnelle à la distance D

Pour illustrer cette formule, supposons que la source évolue sur une sphère de rayon R_{SOU} et que nous souhaitons reconstruire un objet contenu dans une sphère de rayon $R_{OBJ} = 10$ cm. Pour une précision de 1 % et un contraste relatif maximum de 22 % la valeur minimum pour R_{SOU} est de 100 cm. Ces valeurs sont compatibles avec les charges expérimentales.

Comme exemple de trajectoires notons qu'un simple cercle de rayon R_{SOU} centré sur l'objet ne suffit pas, les plans correspondant à \vec{N} proche de la normale au plan de la trajectoire et à $|\rho|$ voisin de R_{SOU} ne rencontrant pas le cercle. En revanche, deux cercles centrés sur l'objet, de même rayon R_{SOU} , situés dans des plans perpendiculaires, constituent une trajectoire admissible, à condition d'avoir $R_{OBJ} \leq \frac{R_{SOU}}{\sqrt{2}}$, et capable.

III - RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DE RECONSTRUCTION

1 - Estimation de la Transformée de Radon

1.1. Calcul approché d'une intégrale

Etant donné un vecteur \vec{N} de S^2 et une position S en concordance avec le paramétrage $s(\vec{N}, \rho)$, il s'agit d'estimer $a(\vec{N}, \vec{OS} \cdot \vec{N})$.

* principe de la mesure

Nous utilisons une surface détectrice sphérique, de rayon R_{DET} , centrée sur la source. Chaque point de cette surface est repéré par ses coordonnées, sphériques que nous assimilerons à un positionnement en latitude LA ($LA \in [0, \pi]$) et en longitude LØ ($LØ \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

Dessignons sur la sphère un maillage régulier associé à un pas angulaire constant PA en latitude comme en longitude. Chaque maille définit une cellule détectrice repérable par un couple d'indices (I, J). Nous lui associons sa surface $\sigma(I, J)$, son angle solide $\Omega(I, J)$, sa valeur mesurée $M(I, J)$, son point central C(I, J) de coordonnées $LA(I, J)$, $LØ(I, J)$.

Dans un système de coordonnées sphériques (\vec{u}, r) centrées sur la source S, la valeur mesurée admet pour expression :

$$M(I, J) = \int_{\Omega(I, J)} X(\vec{u}) d\vec{u} \cdot \frac{1}{\int_{\Omega(I, J)} d\vec{u}}$$

avec $X(\vec{u}) = \int_0^{R_{DET}} f(\vec{u}, r) dr$



* Dièdre d'estimation

La mesure étant de type échantillonnage intégrateur, il est nécessaire de remplacer la notion de plan par celle de dièdre.

Pour un facteur T appelé épaisseur de tranche nous associons au plan $P(\vec{N}, \vec{OS}, \vec{N})$ le dièdre π délimité par les deux plans P_1 et P_2 , passant par S, de vecteur normal \vec{N}_1, \vec{N}_2 avec :

$$\vec{N}_1 = \cos \gamma \cdot \vec{N} - \sin \gamma \cdot \frac{\vec{SP}}{\|\vec{SP}\|}$$

$$\vec{N}_2 = \cos \gamma \cdot \vec{N} + \sin \gamma \cdot \frac{\vec{SP}}{\|\vec{SP}\|}$$

où P et γ sont définis par :

$$\vec{OP} = (\vec{OS} \cdot \vec{N}) \cdot \vec{N}$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{T}{2 \|\vec{SP}\|}$$

Soit Ω_π l'angle solide associé et $\sigma_\pi(I, J)$ la surface de la portion de sphère délimitée par $\Omega(I, J) \cap \Omega_\pi$.

* Formule d'approximation

La valeur approchée de l'échantillon de la Transformée de Radon devient :

$$\tilde{a}_T(\vec{N}, \rho) \approx \frac{\|\vec{SP}\|}{2 \arctg \left[\frac{T}{2 \|\vec{SP}\|} \right]} \int_{\Omega_\pi} X(\vec{u}) d\vec{u}$$

Sous forme numérique, nous obtenons :

$$\tilde{a}_T(\vec{N}, \rho) \approx \frac{\|\vec{SP}\|}{2 \arctg \left[\frac{T}{2 \|\vec{SP}\|} \right]} \cdot PA^2 \cdot \sum_{(I, J)} w(I, J) \cdot M(I, J) \cdot \sin(LA(I, J))$$

$$\text{avec } w(I, J) = \frac{\sigma_\pi(I, J)}{\sigma(I, J)}$$

1.2. Echantillonnage de la Transformée de Radon

Nous utilisons les résultats de Louis [5] pour déterminer, pour un indice d'approximation NR choisi a priori, la disposition des vecteurs \vec{N} dans S^2 . Les directions ainsi définies seront appelées directions principales.

L'obtention de $(2NR + 1)$ échantillons sur chacune d'entre elles nécessiterait un nombre de positions pour la source trop élevé. Aussi devons nous associer à chaque direction principale un ensemble de directions secondaires par un suréchantillonnage angulaire et procéder ensuite à une interpolation sur une fenêtre en θ, ϕ, ρ . Ceci nous permet de plus d'estimer des échantillons régulièrement espacés en ρ de $H = \frac{R \cdot \Delta B J}{2NR}$.

Pour l'instant nous nous contentons de calculer une valeur moyenne sur les points qui tombent dans la fenêtre.

2 - Inversion de la Transformée de Radon

Nous utilisons une méthode d'inversion proche de celle proposée par Shepp [6].

Le calcul de la dérivée seconde se fait par utilisation d'un filtre à horizon fini, le nombre de points pris en compte dépendant du bruit sur l'estimation de la Transformée de Radon.

La reconstruction se termine par l'épandage, après interpolation linéaire entre les échantillons calculés.

IV - CONCLUSIONS

Le lecteur pourra trouver dans [1] les principales démonstrations et une présentation plus détaillée de la méthode. Nous avons juste voulu introduire les idées de base. L'esprit général est de mettre à profit la Transformée de Radon.

En remarquant que le traitement de chaque direction principale est identique (estimation des échantillons, interpolation, filtrage, épandage), il est envisageable de subdiviser l'ensemble des directions et de confier le traitement de chaque sous-groupe à un processeur.

Seulement de tels algorithmes mettent en jeu un nombre important de paramètres dont le choix arbitraire est délicat. La disposition des positions d'acquisition sur la trajectoire introduit souvent une redondance dans l'information.

Enfin le nombre de valeurs disponibles pour calculer l'intégrale sur le plan diminuant quand $|\rho|$ augmente, les données intermédiaires, puis les données reconstruites, seront plus précises au centre qu'à la périphérie.

Cependant ces algorithmes constituent un premier pas vers une méthode de traitement généralisée.

- [1] Ph. Garderet et P. Grangeat - Rapport d'activité n°2, 12.01.84, LETI/MCTE/84-016/PhG/MB
- [2] I.M. Guelfand, N.Y Vilenkin, "Les distributions" Dunod Paris, Collection Universitaire de Mathématiques, tome 5 pages 83-84
- [3] C. Hamaker, K.T. Smith, D.C. Solmon, and S.L. Wagner "The divergent beam X-ray transform", Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 80, number 1, winter 1980, p : 253 - 283
- [4] A.K. Louis, F. Natterer, "Mathematical problems of computerized tomography", Proceedings of the IEEE, vol. 71, n° 3, March 1983, p : 379 - 389
- [5] A.K. Louis, "Optimal sampling in nuclear magnetic resonance (NMR) tomography", Journal of Computer Assisted Tomography, vol. 6, n° 2, April 1982, p : 334 - 340
- [6] L.A. Shepp, "Computerized tomography and nuclear magnetic resonance", Journal of Computer Assisted Tomography, vol. 4, n° 1, 1980, p : 94 - 107