



STRUCTURES SYNTAXIQUES EN MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

SYNTAXIC STRUCTURES IN MATHEMATICAL MORPHOLOGY

Jean SERRA

Centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris
35 Rue Saint-Honoré 77305 FONTAINEBLEAU CEDEX (France)

RESUME

Dans une image, les corps géométriques ne se composent pas comme les sons dans une polyphonie. Chaque objet vu cache ceux qui sont placés derrière lui. Ce fait a deux conséquences. Premièrement, la notion de primitive géométrique s'estompe au profit de celle de gestalt. Deuxièmement, à cette loi de perspective correspond sur le plan logique la relation d'inclusion. Le cadre propre à exprimer celle-ci est la notion ensembliste de treillis, à partir de laquelle s'élabore la morphologie mathématique, et ses deux grandes familles de transformations, croissantes et/ou extensives.

Pour permettre d'analyser l'organisation des algorithmes morphologiques dans un programme complexe, deux exemples l'un de robotique, l'autre de microscopie quantitative, sont présentés en détail, étape par étape. Il apparaît que les opérations élémentaires se groupent par tranches individualisables parce qu'idempotentes (ouvertures, squelettes, etc...). La succession de ces tranches obéit à quelques règles liées à la commutabilité ou non des étapes, ainsi qu'au type d'information perdu à chaque niveau.

On passe ensuite aux lois qui structurent intérieurement chaque étape, en s'intéressant plus particulièrement aux filtres morphologiques. Les contraintes d'invariance par translation et par homothétie conduisent à une transformation privilégiée, qui sert de matériau de base à tout filtrage, à savoir l'ouverture morphologique. Les lois de composition des ouvertures, comme des filtres en général, donnent lieu à des structures syntaxiques de semi-groupes, fondées sur les relations entre familles d'invariants de ces opérations.

Enfin, on en vient aux opérations élémentaires qui permettent de construire les transformations croissantes, et les extensives. Il s'agit des classiques érosions et dilatations, qui elles mêmes se structurent en semi-groupes. Ces derniers sont précisés dans le cas des convexes, utile à la constructions d'éléments structurants, puis de la classe de Steiner.

SUMMARY

Vision does not compose the various bodies seen by perspective as audition composes the sounds in a polyphony. Each object which is seen hides those located behind it. This fact implies, firstly, that the notion of a geometric primitive is partly replaced by that of a gestalt, and secondly that the basic logical piece of information for modelling vision is the relation of inclusion. The set notion of a lattice constitutes a suitable framework for introducing this inclusion relation. The corresponding theory is mathematical morphology, which is based upon the two families of increasing and of extensive transformations.

In order to analyse the structure of the algorithms involved in complex morphological programs, two examples are presented in detail. The elementary operations they use turn out to be regrouped in autonomous steps, whose common characteristic is to be idempotent. The rules which govern their ordering are presented.

The next section is devoted to the laws which are internal to each step. Emphasis is put on morphological filters. The constraints of translation invariance and magnification invariance lead to the key transformation of a morphological opening. The laws of compositions for filters are based on syntactic structures of semi-groups, in association with the relationships between the invariant sets of these filters.

Finally the elementary operations of dilation and erosion are introduced. By combination they allow to build up any increasing and/or extensive mapping, when it is translation invariant. Their syntax is based upon a new semi group, which is specially studied in the two cases of compact convex sets and of Steiner class.



1 - Vision par ordinateur et morphologie mathématique

Au point de départ de la morphologie mathématique, nous trouvons la constatation que les signaux visuels interagissent de manière ensembliste alors que les sons se combinent algébriquement. Lorsque plusieurs sources émettent, l'audition recueille toutes les vibrations, et jusqu'à un certain point, les isole et les confronte en même temps. Sinon, il n'y aurait pas d'orchestres. Parce que leurs rapports sont primordiaux pour l'intelligibilité de la scène sonore, on demande à tout procédé qui l'amplifie ou la transmet de respecter les proportions relatives des diverses voix, c'est-à-dire, mathématiquement parlant, d'être linéaire. Et l'outil taillé sur mesure par cette contrainte se nomme la convolution.

En vision, il en va tout autrement. Non pas que la linéarité soit absente - dans une pose, il n'est jamais interdit de sommer des images pour atténuer les bruits de fond - les verres correcteurs du myope déconvoluent son image rétinienne - mais parce qu'elle a bien moins d'importance que la loi première de la vision, selon laquelle tout objet vu cache tout ce qui est placé derrière lui. Si le monde était translucide, il ressemblerait à l'univers des sons. Seulement, il se trouve que les corps sont généralement opaques et qu'on les voit en perspective. Or pour exprimer cette loi fondamentale, on a nécessairement recours à la notion d'inclusion. Par exemple "si le contour de l'objet le plus proche contient celui du plus lointain, alors il le cache complètement, si au contraire il lui est inclus, alors il ne cache rien de plus que le second objet ne masque déjà", etc... etc... Une morphologie, i.e. une description des formes, si elle se veut mathématique, doit donc s'exprimer dans le cadre logique adapté à l'inclusion, à savoir le treillis. Un treillis (complet) \mathcal{P} est un ensemble muni d'une relation d'ordre (l'inclusion), telle que toute famille d'éléments X_i dans \mathcal{P} admette dans \mathcal{P} un plus petit majorant, nommé la réunion et noté $\bigcup X_i$, et un plus grand mineur, l'intersection $\bigcap X_i$. Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$ représente l'ensemble des parties d'un espace donné E , les notations \subset et \cap gardent leur signification ensembliste usuelle, mais \mathcal{P} peut être tout autre chose. Par exemple une classe de fonctions, et alors \cup représente le sup.

Bien que nous connaissions assez mal les lois de la perception visuelle, il y a fort à parier qu'elles tiennent compte de la relation d'ordre de la perspective. En tout cas, si nous cherchons à concevoir des procédés de vision par ordinateur, nous sommes tenus de formaliser notre démarche, et ce qui précède suggère de la situer par rapport à l'inclusion. Ici, si l'on interprète les étapes d'un acte perceptif comme autant de transformations d'images (i.e. d'applications $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$), se situer par rapport à la relation \subset veut dire en premier lieu :

- soit que \subset relie tout $X \in \mathcal{P}$ à son transformé $\psi(X)$; l'on dit alors que ψ est extensive quand $X \subset \psi(X)$, et anti-extensive quand l'inclusion est en sens inverse
- soit que, pour tout couple $(X, Y) \in \mathcal{P}$ que \subset relie, les transformés $\psi(X)$ et $\psi(Y)$ sont aussi reliés. L'on dit alors que la transformation ψ est croissante quand $X \subset Y \Rightarrow \psi(X) \subset \psi(Y)$, et décroissante quand les ψ sont ordonnés en sens inverse.

Ces deux propriétés ne sont pas les seules possibles, mais les plus simples et les plus directes, donc les premières à prendre en compte. D'ailleurs, on les retrouve constamment. Tout traitement morphologique se conçoit et se réalise comme une séquence de transformations d'images ψ , de quelques dizaines d'étapes dans les deux illustrations qui suivent,

mais souvent de quelques centaines en radiologie numérique (1), en cytologie (2), pour caractériser les électrophorèses (3), ou en télédétection (4), par exemple. Or dans tous ces cas, non seulement les transformations technologiquement élémentaires (alphabet de Golay, ...) mais aussi les unités plus vastes (squelette, ouverture...) sont toujours ou croissantes ou (anti-) extensives, ou les deux à la fois.

Voilà donc un premier principe de classement. Deux familles de transformations s'offrent à nous, qui couvrent la quasi totalité des applications morphologiques. Il convient donc de les étudier en détail. Nous citerons au fil du texte un certain nombre de résultats dans ce domaine (pour un exposé plus systématique, cf (5) (6) (7) (8)). Mais il va de soi que cela ne suffit pas. Ce n'est pas parce que l'on sait que la quatorzième étape d'un traitement qui en comprend quarante était croissante que l'on comprend pourquoi c'est elle qu'on a choisi, et pourquoi à ce moment là. Or, pour bâtir des séquences aussi longues, il faut bien se donner quelque fil directeur.

2 - Premier exemple : vision par ordinateur en industrie automobile

Deux exemples illustrent cet exposé : Présentons-les maintenant. Dans le premier, une caméra regarde le dessous d'une boîte de transmission automatique

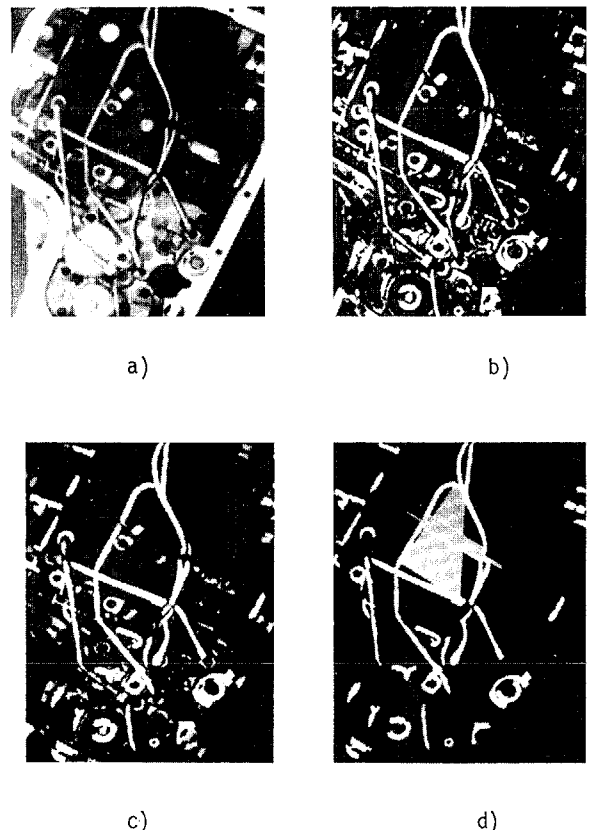


Fig. 1 - Reconnaissance par traitement morphologique, de la mise en place de crochets de sécurité dans le montage d'un moteur. Avec les processeurs de morphologie mathématique actuels le traitement complet dure moins de deux secondes.



STRUCTURES SYNTAXIQUES EN MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE
SYNTAXIC STRUCTURES IN MATHEMATICAL MORPHOLOGY

J. SERRA

(Fig. 1a), de façon à vérifier, par un procédé automatique, si les deux crochets de sécurité sont bien en place. Ce problème, posé par General Motors à S.R. STERNBERG (9) a conduit ce dernier à proposer la démarche suivante. Notant que ces crochets sont moins visibles en tant que tels qu'en tant qu'interruption de tuyaux, ce sont ceux-ci qu'on va extraire en premier lieu. Or les tuyaux qui nous intéressent sont des objets longs étroits, et en contraste clair par rapport au fond. D'où la stratégie qui consiste

- à ouvrir l'image 1a par un élément structurant (ici une boule) à peine plus large que les tuyaux ;
- à prendre la différence algébrique entre l'image initiale et son ouvert (fig. 1b). Toutes bandes plus larges (ex.: le pourtour du moteur) sont éliminées, ainsi que les bandes étroites, mais plus sombres que leur environnement. Ce premier filtrage a donc porté à la fois sur le contraste et sur la largeur ;
- à seuiliser la transformée 1b. Le résultat apparaît en gris clair et gris foncé sur l'image 1-c ;
- de cette image binaire, à ne retenir que les composantes connexes dont le squelette est de longueur $\geq l_0$ donné. Ce marquage apparaît en clair sur 1-c, et le sous ensemble qu'il filtre en clair sur 1-d ;
- par une ouverture triangulaire restreinte à la partie centrale de l'image, à isoler l'intérieur de la zone suspecte (triangle gris en 1-d) ;
- à extraire du triangle les cordes parallèles au petit côté (direction α) et de longueurs comprises entre d_1 et d_2 donnés ;
- à dilater cette bande selon un segment de direction α , (zone en gris foncé dans (1-d), en forme de rouleau à pâtisserie) ;
- à ouvrir le rouleau par un segment perpendiculaire à α , de longueur intermédiaire entre celle du rouleau et celle des deux bouts, les résidus marquent la mise en place des crochets. Si l'un ou l'autre manquent, manque aussi le bout de rouleau correspondant.

3 - Deuxième exemple : microscopie quantitative

Passons de la macro- à la microscopie, de l'imagerie à teinte de gris aux structures binaires, et de la robotique à l'examen de matériaux composites.



a) b)

Fig. 2 - Extraction de lignes de défaut dans un eutectique orienté ($G \times 200$). Exemple typique d'une situation où il n'y a pas de primitive géométrique.

On voit en fig. 2a la section perpendiculaire à son axe, d'un eutectique à solidification orientée. Il a été élaboré au C.E.N.G. (Grenoble) qui veut estimer le nombre et la granulométrie des lignes de défaut par unité de surface. Pour résoudre ce problème, Ch. LANTUEJOL (10) remarque que l'oeil "voit" ces défauts car il décèle des alignements dans les extrémités de certaines dendrites, et les interpole mentalement. D'où le principe de sa stratégie : dont les étapes correspondent à la figure 3 :

- Seuiliser l'image correspondant à la fig. 2a (ensemble X)
- squelettiser les dendrites afin de pouvoir définir leurs extrémités de façon opératoire (X_1)
- ébarbuler le squelette sans modifier sa longueur (X_3)
- isoler les points extrémaux (Y) du squelette X_3 , reste l'ensemble X_4

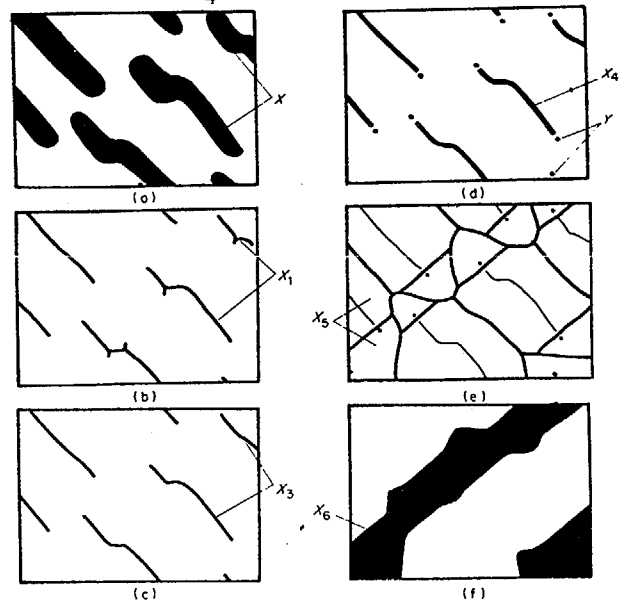


Fig. 3 - Etapes du traitement de la fig. 2

- déterminer par épaissement homotopique, les zones d'influences des composantes connexes de l'ensemble $Y \cup X_4$ (soit X_5)
- connecter toutes les zones d'influence associées à un point, et qui sont adjacentes (X_6)
- squelettiser X_6 , le résultat est montré en fig. 2b, en superposition avec l'image initiale.

4 - Primitives ou gestalt ?

Peut-on qualifier les petits crochets ou les lignes de défaut de primitives, au sens où le phonème "a" dans l'expression "A boire !" en est une, ou encore à celui de voitures défilant sur une autoroute vue d'avion ? Dans la vue du moteur, on peut repérer des dizaines de petites taches sombres semblables en forme et en dimension, aux crochets de fixation. Le second exemple est encore pire : les lignes de défaut n'existent que comme absence d'une série de cristaux... Au fond, dans ces deux cas, c'est moins un certain objet qui est perçu, qu'une modification de l'environnement : des tuyaux sont interrompus en plein milieu, des lignes dendritiques s'arrêtent net pour reprendre un peu plus loin, décalées. C'est tout ce contexte, cette forme, comme dit la Gestaltpsychologie, qui définit l'objet comme solution de continuité. sans qu'on



puisse raisonnablement invoquer de primitive. Pourtant lors de la première analyse, nous avons utilisé un triangle pour repérer une zone, précisément de même forme que lui (étape e). A la différence des autres ouvertures impliquées dans cette étude, celle-ci était bel et bien utilisée à des fins de "template matching", autrement dit à la recherche d'une primitive géométrique. Après tout, pourquoi pas ? La perception humaine elle-même n'oscille-t-elle pas entre les deux termes de la dialectique :

primitives \longleftrightarrow gestalt

chaque mouvement vers un pôle améliorant l'acquis du mouvement précèdent ? Même si le "A boire" est prononcé d'une voix si délabrée qu'aucun phonème n'en émerge, le ton employé, et le contexte risquent d'être suggestifs. Alors, quand on réécoute mentalement la phrase qui vient d'être dite, ses phonèmes prennent corps, et l'appel est reconnu...

Dans cette dialectique, images et sons n'oscillent pas autour d'un même point moyen. La loi de composition de la perspective, où le premier objet cache le second, casse les formes élémentaires, alors qu'au contraire les sons d'une même voix s'égrènent sans se gêner, et que les voix se superposent en gardant leur individualité. La vision penche d'autant plus vers les modes d'appréhension gestaltistes que cet effet de perspective est important. Et il en va de même de ses substituts par ordinateur. Par exemple, lorsque les cellules d'une coupe histologique se recouvrent trop, on ne peut plus les séparer (i.e. extraire les primitives) pour les compter. C'est précisément alors que les hypothèses gestaltistes du schéma booléen conduisent à une méthode très simple, et robuste du même dénombrement (6, 11). A l'inverse, il arrive d'ailleurs que l'organisation des éléments d'une scène créée, par artifice, des primitives nouvelles. De Roulev, avec sa trinité circulaire, à la composition diagonale du radeau de la méduse de Géricault, la peinture s'est régulièrement servi de cette ambiguïté comme d'un moyen esthétique.

Si une telle dialectique existe, c'est sans doute parce que les "gestalts" ne sont pas absolues, et qu'on ne les désarticule pas totalement en en supprimant quelques éléments. Le principe directeur des deux traitements que nous avons vus, (comme de toutes les autres analyses de morphologie mathématique), se fonde sur cette hypothèse. Toute stratégie dans un traitement morphologique consiste en effet à faire éclater la perception du tout en appréhensions de plusieurs sous structures, appréhensions que l'on puisse se faire succéder, et qui conduisent finalement à la même vision que celle de la scène prise dans son ensemble. Dans ce sens, on peut à nouveau parler de primitives, mais il s'agit maintenant de primitives de structures ou, ce qui revient au même, de traitements. Le résidu d'ouverture extrait tous les contrastes clairs sur sombre d'une certaine amplitude et d'une certaine largeur. Le squelette binaire, correctement ébarbulé, fait extraire toutes les extrémités d'objets longs. Voilà des primitives morphologiques. Bien que structurelles, elles restent encore suffisamment élémentaires pour mériter ce nom. Mais surtout, elles ne sont plus isomorphes aux objets analysés (on ne déplace pas des cercles dans une image pour y chercher des cercles), ce qui les rend générales. Combien y en a-t-il ? Près d'une centaine si on se réfère à la programmathèque Morpholog (12), probablement moins.

Nous commençons à saisir en quoi consiste l'art du morphologiste. Ayant en main le jeu de ces outils élémentaires, il doit réduire toute vision à une succession d'actions de primitives morphologiques

dont il connaît, et peut doser les performances exactes de chacune. Cette reformulation est parfois difficile, et requiert une parfaite intelligence de la situation. Ici deux questions se posent :

- dans quel ordre agir (par exemple pour le moteur, vaut-il mieux commencer par les longueurs ou par les largeurs ?)
- de quel degré de cohérence interne doit disposer chaque étape ?

Examinons ces deux points successivement.

5 - Un grand absent : la réversibilité

Lorsqu'on dit qu'on a amélioré une image floue en la rendant nette, on s'exprime en tant que spectateur. Le physicien aura plutôt tendance à penser que rien n'a été gagné du tout, puisque de l'image nette on peut revenir à la floue : l'une et l'autre contiennent rigoureusement la même information. Le processus linéaire impliqué est réversible. On sait toute l'attention qu'à la suite de Wiener le traitement du signal a porté à la notion d'information véhiculée par un message. Intérêt d'autant plus légitime qu'il songeait à des questions de transmission (amplification, télécommunications, etc...).

En vision par ordinateur, que cherche-t-on ? Transmettre de l'information ou l'assimiler ? Qu'on améliore les images d'entrée dans un système, soit. Cela correspond aux lunettes du myope. Que l'on code ces images pour les transférer dans des organes de traitement, soit. Cela correspond au transfert de l'image rétinienne vers les zones de vision du lobe occipital. Et après ? Le cerveau ne rajoute pas de troisième "oeil", qui regarderait les aires de vision et serait lui-même vu. La chaîne s'arrête. Et la réversibilité avec. Car reconnaître un objet - des crochets de sécurité par exemple - cela ne signifie rien d'autre qu'éliminer tout le reste. Opération irréversible s'il en est.

L'outil que forge la morphologie mathématique vérifie lui aussi cette propriété. Il est fondé sur les deux opérations d'union et d'intersection, qui ne peuvent que perdre de l'information (dans $X \cup Y$, on ne sait plus rien sur la frontière de Y masquée par X). Mais comment échelonner sur des dizaines de transformations les pertes successives, pour que le résultat converge vers un but bien précis ? Tout d'abord, en jouant séparément sur les trois façons de réduire une structure :

- a - réduction spatiale : limiter les zones d'intérêt à des sous ensembles du champ initial (ex. : supprimer les particules qui coupent le bord du champ)
- b - réduction de définition. Les images issues du capteur sont décimales : à partir de quand a-t-on intérêt à passer en binaire ?
- c - réduction local global : ce qui est donné initialement, c'est un champ d'analyse, i.e. une image définie dans un cadre rectangulaire, et qu'on modifie par des opérateurs bornés et identiques en chaque point. Ces traitements peuvent conduire à isoler une portion de l'image, qu'on décide de considérer comme un tout, entouré de vide jusqu'à l'infini, et qu'on traite globalement (ex. : supprimer les composantes connexes d'une surface donnée, calculer des enveloppes convexes, etc...). L'article de G. FLOUZAT dans ce même recueil (4), illustre cette démarche.

Il est sage de garder présente à l'esprit cette distinction en trois modes, pour vérifier dans chaque cas si on les a tous exploités, et au mieux.



STRUCTURES SYNTAXIQUES EN MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE
SYNTACTIC STRUCTURES IN MATHEMATICAL MORPHOLOGY

J. SERRA

La seconde règle concerne l'ordre des opérations. Il arrive que certaines opérations élémentaires commutent (ex. : boucher les trous et supprimer les particules de surfaces inférieures à s_0 donné. C'est moins souvent le cas lorsqu'il s'agit d'étapes complètes de traitement. Or deux opérations commutent quand elles n'interagissent pas l'une sur l'autre. L'idéal serait que tous les échelons d'une séquence vérifient cette propriété. La gestalt aurait vraiment éclaté en une série de critères dont l'intersection définirait l'objet. Dans ces cas, l'ordre des transformations s'impose : c'est celui qui minimise le temps de traitement, et il faut commencer par celles qui réduisent le plus, aux sens a et b ci-dessus. Dans son programme de recherches de cellules cancéreuses colorées en Feulgen, F. MEYER (2) met en jeu deux critères simples de densité optique et de cercle inscrit des noyaux, qui sont indépendants entre eux, et aussi du reste du traitement, beaucoup plus sophistiqué. Il est alors avantageux de commencer par les deux critères rapides. De fait, trois taches de la fig. 4a sont soit grandes, soit denses. Deux d'entre elles correspondent à des cellules suspectes, la troisième (en haut à droite) est un artefact. La suite du traitement, qui l'éliminera, ne portera plus que sur ces trois taches.

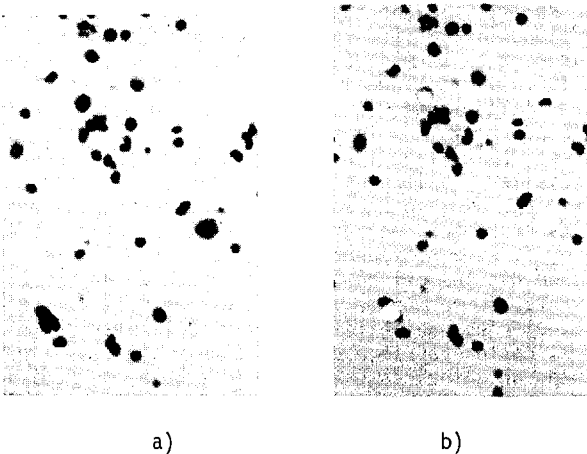


Fig. 4 - a) Frottis cervical coloré en Feulgen (J.S. PLOEM, Leiden)
b) un prétraitement grossier permet de se concentrer très vite sur les seules parties intéressantes de la préparation.

Cette règle de priorité demeure même quand les étapes ne sont pas indépendantes. Ici, il convient de distinguer deux cas :

- ou bien la dépendance est voulue. Dans le second exemple, l'extraction des points extrémaux suppose une squelettisation suivie d'ébarbulage, au préalable. Voilà trois étapes distinctes, mais qu'on ne saurait intervertir. La connaissance des principaux groupes de ce genre est indispensable à l'utilisateur de la morphologie mathématique, surtout s'il veut construire des systèmes experts.

- ou bien la dépendance est subie. Dans ce cas, de deux transformations, celle à placer en premier est celle qui abîme le moins l'information nécessaire à l'autre. Lors du premier exemple, on aurait pu aborder l'analyse par un critère de longueur des tuyaux ; sur une image à teinte de gris, cela aurait conduit à extraire les lignes de crêtes, et l'on aurait perdu l'information de voisinage indispensable à la détection des largeurs. Il valait donc mieux commencer par l'ouverture, comme on l'a fait.

Il arrive cependant que cette règle de destruction minimale de l'information soit impossible. En voici un exemple, très classique, dû à F. MEYER (13). On cherche à étudier séparément la structure de la chromatine dans chacun des cinq lymphocytes de la Fig. 5a. Il est difficile, et probablement assez long de séparer directement sur l'image à niveaux de gris. Celle-ci par

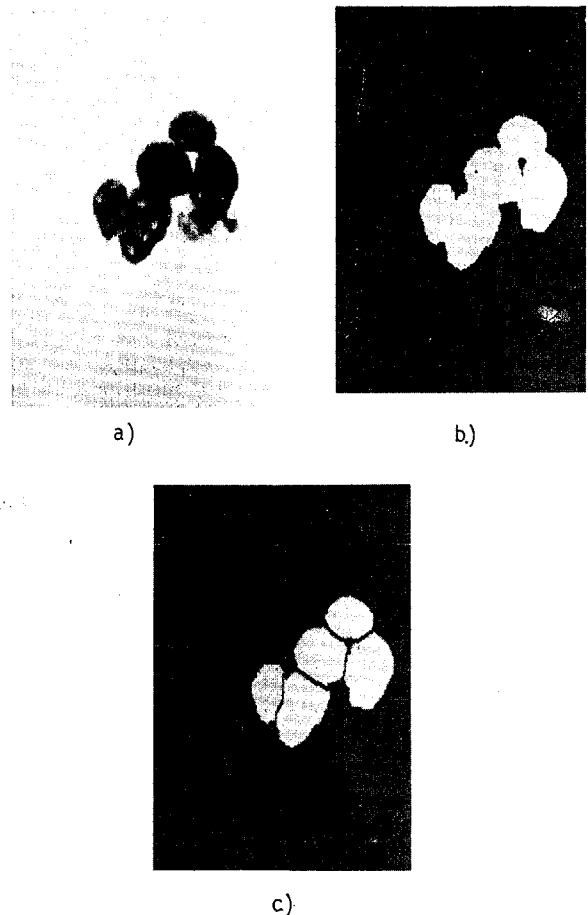


Fig. 5 - Exemple de boucle logique dans un traitement
a) lymphocytes
b) leur masque binaire
c) segmentation du masque binaire, qu'on intersecte par la suite avec l'image initiale.

contre sa seuille bien et les concavités de l'image binaire obtenue (5b) donnent prise à une bonne segmentation par lignes de partage des eaux (5c). Malheureusement l'information de gris initiale est perdue. Pour la récupérer il faut interpréter les composantes connexes de la fig. 5c comme autant de masques qu'on applique successivement à l'image 5a. Il s'agit donc à la fois d'un passage local global joint à une boucle logique dans la séquence de traitement. Ce procédé de retour en arrière est très fréquent en morphologie, et l'exposé de F. PRETEUX sur la radiologie numérique (1) (dans ce même volume) en montre maints exemples.

En résumé, cinq règles président à l'élaboration des séquences morphologiques :

- 1 - passer en revue séparément les trois modes de réduction de l'information ;
- 2 - quand deux portions de traitement commutent, commencer par la plus grossière (i.e. celle qui simplifie le plus), qui coïncide souvent avec la plus rapide à mettre en oeuvre ;



3 - Connaître l'inventaire des séquences élémentaires de traitement qui s'enchainent de manière exclusive pour certains buts (un peu comme les tournures idiomatiques dans une langue) ;

4 - quand deux portions de traitement interagissent, commencer par celle qui modifie le moins l'autre ;

5 - ne pas hésiter à perdre provisoirement une information qu'on peut récupérer par la suite.

A ces cinq règles, nous rajouterons une sixième, qui relève du simple bon sens, mais qu'un examen de la littérature en analyse d'image montre qu'on ignore souvent : ne point trop en faire. Il est inquiétant de voir le nombre de publications consacré à de "bonnes" interpolations digitales destinées à approcher un contour binaire, dans des circonstances où l'on a en vue uniquement la mesure de sa longueur. Alors que dans ces cas, la formule de Crofton (6, p. 220) est immédiate, plus précise, et agit directement sur l'image de départ, sans extraction de contour. De même, il n'est absolument pas nécessaire d'extraire une à une toutes les composantes connexes d'un ensemble pour les compter. La formule d'Euler-Poincaré, les donne tout de suite, à partir de deux transformations morphologiques élémentaires (6, p. 201) etc...

6 - Indivisualisation des étapes et idempotence.

Depuis la présentation des deux exemples, nous parlons "d'étape de traitement", comme si le choix allait de soi. Mais qu'est-ce qu'une étape de traitement ? Le montant où l'image est passée cinquante fois dans un processeur spécialisé ? Celui où elle l'a traversé une fois ? Le basculement "image décimale image binaire" (ou l'inverse) ?

Interrogeons nos deux exemples. D'après le premier, il semble bien que chaque étape corresponde à l'introduction d'un paramètre nouveau : rayon de la boule pour l'ouverture initiale, puis niveau du seuil, longueur minimale pour le squelette, dimensions du triangle, et enfin de sa bande centrale. Bien qu'exacte, cette remarque ne constitue qu'une réponse partielle à la question posée, car le second exemple lui ne dépend strictement d'aucun paramètre : seul, le seuillage pourrait faire intervenir un niveau de gris, mais dans le cas présent l'image de départ est pratiquement binaire. Pourtant, la reconnaissance se décompose en deux étapes majeures : recherche des points extrémaux et reconstitution de leurs alignements. Et à l'intérieur de ces deux temps, les sept opérations bien différentes que nous avons listées s'individualisent.

A quel niveau nous situer, pour parler de l'autonomie d'une opération, simple ou composite ? Au bas de l'échelle, la situation est claire. Les programmes sont écrits pour un logiciel ou un matériel de traitement morphologique dont les instructions élémentaires sont des transformations par tout ou rien sur des voisinages de taille un (3×3 en trame carrée, 7 points en trame hexagonale). D'autres appareils (les systèmes de Machine Vision de S.R. STERNBERG, par ex.), de manière plus élémentaire encore, définissent trois opérations fondamentales, l'union (ou le sup pondéré pour les images à teinte de gris), la translation et la complémentarité. Dans tous les cas, le stock d'opérations primaires possibles reste bien défini, et fort limité.

En haut de l'échelle aussi la situation est claire, car la solution à un problème de reconnaissance des formes constitue un tout. Mais entre les

deux ? Revenons au fil conducteur de nos exemples et essayons d'itérer pour le second d'entre eux chacune des étapes a à g. Le seuillage, si on l'interprète

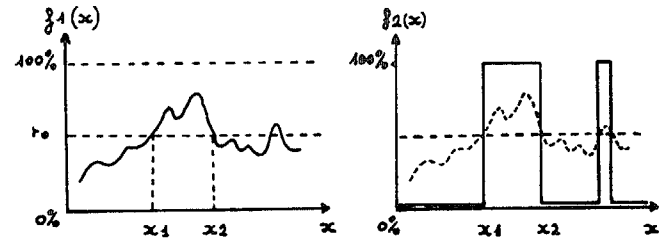


Fig. 6 - Opération de seuillage

comme transformation d'une fonction $f_1(x)$ en une autre, restitue une fonction $f_2(x)$ qui vaut 0 ou 100 % au point x selon que $f(x)$ est supérieur, ou inférieur ou égal, à un niveau t_0 donné. Et si on itère l'opération sur f_2 , rien ne change plus. D'autre part, f_2 étant une indicatrice ensembliste on peut poursuivre le traitement en termes d'ensembles de \mathbb{R}^2 . C'est ce qui est fait avec la squelettisation b . Ici encore, si l'on itère l'algorithme, le squelette du squelette est lui-même. A l'étape trois, de la même façon, rien ne bouge, le doublet "ébarbulage + reconstitution de la branche principale" n'agit plus par itération. A l'étape d aussi; car si l'on cherche les points extrémaux des points extrémaux, on retrouve les mêmes. Enfin les étapes e, f, et g possèdent encore la même priorité. Chacune d'elles, si on la répète avant de passer à la suivante, reste muette : elle a dit ce qu'elle avait à dire, et c'est définitif. Pourtant à l'intérieur d'une étape, cette propriété cesse d'être vraie : si l'on reprend un amincissement à moitié achevé, on modifie l'image. Sur un groupe d'étapes prises ensemble, elle ne joue pas non plus. Prenons le squelette final comme entrée pour tout le traitement, les nouveaux points extrémaux n'auront plus rien à voir avec les précédents et le processus divergera.

Le lecteur vérifiera sans peine que le premier exemple, sur les moteurs, se prête exactement aux mêmes commentaires, à condition de regrouper en une seule les étapes g et h que nous avons distinguées par souci pédagogique. Seule l'opération b est suspecte, puisqu'en l'itérant elle donne "image initiale moins résidus", c'est-à-dire l'ouvert. Mais si l'on itère encore une fois on retombe sur les résidus.

En fait, nous aurions pu prendre n'importe quelle analyse morphologique, la conclusion eut été la même. Les articles de F. PRETEUX et de G. FLOUZAT, dans ce volume, corroborent ce fait, ainsi que les exemples qu'on pourra trouver dans la bibliographie. Il existe donc des paliers dans toute chaîne de traitement, tels que la séquence des transformations effectuées pour passer d'un palier au suivant, si on l'appelle ψ , vérifie la relation

$$(1) \quad \psi \circ \psi = \psi.$$

Dans le processus, chaque ψ a apporté son action simplificatrice, et provisoirement inaltérable. On ne peut rien tirer de plus de lui que ce qu'il vient de donner. Et si l'on veut poursuivre parce que l'on n'est pas arrivé au terme de l'analyse, il faut faire autre chose.



STRUCTURES SYNTAXIQUES EN MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE
SYNTAXIC STRUCTURES IN MATHEMATICAL MORPHOLOGY

J. SERRA

La propriété logique qu'exprime la relation (1) se nomme idempotence. Son rôle physique est considérable. Quand nous voulons disséquer une démarche perceptive, pour la programmer sur ordinateur, nous pensons en termes de successions d'idempotentes.

De là vient que, sans être indépendantes, les étapes d'un processus morphologique sont autonomes. On peut modifier l'une d'elles, pourvu que la modification conduise au même résultat, sans avoir à se préoccuper des autres. Ainsi dans le second exemple, on peut très bien remplacer les étapes e, f et g par la construction du graphe perceptuel (9) (14) des points extrémaux Y. Il n'y a pas indépendance a priori, puisque le nouvel algorithme se situe nécessairement en aval de l'extraction des extrémités Y, mais, Y étant donné, la suite du traitement n'est plus liée à ce qui lui a précédé.

En résumé, sans qu'elle soit une obligation, l'idempotence n'en demeure pas moins une notion cruciale. Elle permet de dire d'un opérateur, ou d'une tranche de traitement, qu'on lui a fait exprimer tout ce qu'elle pouvait dire. S'agissant de transformations qui réduisent progressivement l'information, il s'en suit que l'idempotence bloque l'action simplificatrice des opérations, quand celles-ci la vérifient. Et par conséquent permet de mieux la doser.

7 - Filtrages morphologiques

Le rôle central de l'inclusion en morphologie mathématique a vite conduit aux deux propriétés de la croissance et de l'extensivité. Quelle classe de transformations construit-on si l'on associe l'idempotence à chacune d'elle, ou aux deux à la fois ? L'étude systématique de l'association idempotence + extensivité n'a pas été entreprise, encore que bien des exemples de cette conjonction soient connus et constamment utilisés (épaississements, squelettes, fermetures, et leurs versions duales).

Probablement parce qu'elle avait mûri davantage, la question de l'autre regroupement a fait récemment l'objet d'une théorie générale, celle du filtrage morphologique. Par ce terme on entend les applications qui sont croissantes et idempotentes (on la trouvera prochainement présentée dans l'ouvrage en préparation: *Advances in Mathematical Morphology*, J. SERRA Ed., Ac. Press ; d'ici là, cf. (7) (8) (15)).

Les plus connus, et les plus utilisés de ces filtres sont les ouvertures, définies comme possédant en plus des deux propriétés précédentes, celle de l'anti-extensivité. Le premier exemple en contient quatre, à savoir les étapes a, d, e, et h. Notre propos n'est pas ici de passer en revue les caractéristiques de chaque opérateur, mais d'insister sur les relations qu'ils entretiennent entre eux. Dans cet esprit indiquons les liens entre l'ouverture au sens algébrique général défini à l'instant, et l'ouverture morphologique X_B classique donnée comme produit de l'érosion de X selon un B fixé suivie de la dilatation par le symétrique \tilde{B} de B par rapport à l'origine. La théorie montre que toute ouverture algébrique $\gamma(X)$ invariante par translation s'écrit sous forme de réunion d'une famille de X_B , où B décrit une certaine sous-classe \mathfrak{B} des invariants de γ :

$$(2) \quad \gamma(X) = \bigcup \{X_B, B \in \mathfrak{B}\},$$

D'un point de vue syntaxique, cette rela-

tion signifie que toute union d'ouvertures morphologiques est encore croissante, anti-extensive et idempotente, et permet même de connaître la classe de ses invariants (un excellent atout pour bâtir des opérations "sur mesures"). A titre d'illustration reprenons le premier exemple. Au lieu d'ouvrir l'image initiale X par une boule de rayon r_0 , ouvrons-la par un cylindre horizontal $C(\alpha)$ de direction α , de section droite le disque de rayon r_0 et de longueur l_0 . L'union $\gamma(X) = \bigcup \{X_C(\alpha), \alpha \in (0, \pi)\}$, quand balaye les directions du plan, est encore une ouverture isotrope, et qui extrait directement les tuyaux, non seulement par leur largeur mais aussi par leur longueur. Elle regroupe donc en une seule opération les quatre étapes a, b, c, d, de l'exemple (En pratique, il suffit de quatre ou huit directions pour les α).

Si les ouvertures sont loin d'être les seuls filtres morphologiques, elles suffisent néanmoins pour construire, par combinaison avec les fermetures, un très large éventail de tels filtres. Ainsi, dans l'exposé de F. PRETEUX sur la radiologie numérique, l'un des procédés pour extraire le corps vertébral consiste à boucher les trous de certaines caractéristiques, et faire suivre une ouverture linéaire. Chaque étape se justifie que par l'autre, et l'ensemble des deux, considéré comme un tout, est croissant et idempotent.

Selon le but visé on adjoint aux filtrages telle ou telle contrainte supplémentaire. Nous avons montré un peu plus haut comment on pouvait les rendre isotropes ; on peut aussi leur demander de commuter avec (i.e. être indépendant) les anamorphoses (avec le fait de prendre le log de l'image par ex.), ou encore d'être aussi peu extensifs qu'anti-extensifs, c'est-à-dire d'être auto-duaux. Ici, pour varier, illustrons notre propos d'un contre-exemple. Le filtre par la médiane est connu et assez apprécié. Quelles sont ces propriétés ? D'abord, il nettoie sans lisser. Cela, il le doit à sa croissance. D'autre part, il symétrise les rôles de la figure et du fond. Effectivement il est auto dual (i.e. il commute avec le passage au négatif). Mais son manque d'idempotence n'assure pas le résultat, et pis que cela, risque de le faire osciller. Si on lui soumet des bandes alternées de même largeur que la fenêtre où l'on effectue la médiane, le filtre hésite et revient sur ses choix lorsqu'on l'itère, de manière quasi-périodique. Il est donc avantageux de le remplacer par de véritables filtres autoduaux, par exemple ceux qui bouchent les trous et suppriment les composantes connexes selon un même critère de taille ou de forme.

8 - Les semi-groupes

Nous avons jusqu'ici laissé dans l'ombre la possibilité que chaque étape d'un traitement mette en jeu un ou quelques paramètres numériques. Certes, il ne s'agit pas d'une nécessité : un squelette, l'extraction du contour d'un fermé, sont autant d'idempotentes qui ne dépendent d'aucun paramètre (cf. aussi l'exemple des dendrites ci-dessus). Toutefois, en règle générale, l'on est amené à préciser des dimensions en cours d'analyse, et il convient de s'interroger sur les structures syntaxiques sous-jacentes.

Nous raisonnerons dans le cadre des filtrages morphologiques. On peut ordonner ces opérations en remarquant qu'un filtre est d'autant plus actif qu'il y a moins d'images sur lesquelles il n'agit pas. Si l'on se donne une famille ϕ_λ de filtres dépendant d'un paramètre positif λ , ils seront de plus en plus puissants si $\lambda \geq \mu$ entraîne $\phi_\lambda \subset \phi_\mu$, où \mathfrak{B} désigne la



STRUCTURES SYNTAXIQUES EN MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE
SYNTACTIC STRUCTURES IN MATHEMATICAL MORPHOLOGY

J. SERRA

classe des invariants du filtre ϕ . Or cette condition équivaut à $\phi_\mu \phi_\lambda = \phi_\lambda$. En d'autres termes, on ne modifie pas l'action d'un premier filtre de la famille si on l'itère par un second, moins puissant que lui. Cette loi de composition symbolise une structure syntaxique simple et assez forte, puisqu'elle représente en même temps un principe de classement par invariants.

Comme a priori elle ne commute pas, cela nous amène à nous interroger sur la relation syntaxique

$$\lambda \geq \mu \Rightarrow \phi_\lambda \phi_\mu = \phi_\lambda$$

où c'est encore le plus fort qui impose sa loi, mais à condition qu'il agisse en second. Il est facile de voir qu'elle équivaut à $\phi_\lambda = \phi_\lambda(\phi_\mu)$: les invariants de ϕ_λ sont les transformés, par ϕ_λ , de ceux de ϕ_μ . Il y en a donc sûrement moins, et dans ce sens la famille ϕ_λ est classée selon λ , mais ils ne sont pas forcément emboîtés les uns dans les autres.

S'il s'agit d'ouvertures (ou de fermetures), les deux conditions deviennent équivalentes et l'on a :

$$(3) \quad \phi_\lambda \phi_\mu = \phi_\mu \phi_\lambda = \phi_{\sup(\lambda, \mu)}$$

et la famille ϕ_λ constitue une granulométrie (5). De fait il est facile de voir que dans toute opérations granulométrique, au sens physique du terme, est impliquée une famille d'ouvertures à un paramètre positif vérifiant la relation (3). On notera d'ailleurs que la structure syntaxique (3) n'est pas le seul apanage des transformations morphologiques. En traitement linéaire du signal, l'itération de deux filtres passe bas de fréquences limites λ et μ , vérifie la loi de composition (3).

Ces semi-groupes ne sont pas les seuls (nous allons en voir d'autres un peu plus bas), mais tant par la signification des structures syntaxiques exhibées, que par l'importance des filtres morphologiques, ils constituaient un exemple de choix. On trouvera dans la référence () une dizaine de familles ϕ_λ possédant diverses propriétés supplémentaires, utiles pour les applications.

9 - Syntaxe des opérations élémentaires

Dans la descente progressive du complexe vers l'élémentaire que poursuit cet exposé, des théorèmes généraux, comme celui représenté par la relation (2) suggèrent comme opérations intermédiaires les ouvertures morphologiques, elles-mêmes produits des deux transformations d'érosion et de dilatation. Voici un second théorème qui va dans le même sens : toute transformation croissante et invariante par translation est aussi bien union d'érosions, qu'intersection de dilatations, selon des classes d'éléments structurants déterminés par le noyau de la transformation (énoncé plus précis dans (5) ou (6)). Enfin, toutes les applications (anti-) extensives sinon théoriques, du moins développées en pratique sont des itérations d'intersections de dilatation avec des érosions (ex. amincissement).

En dernière analyse, ou plutôt en avant dernière, nous voici donc parvenus à ces deux opérations, duales l'une de l'autre pour la complémentation, et qui semblent bien constituer les formes mères des opérateurs morphologiques invariants par translation. Or comment s'expriment-elles ? Choisissons la dilatation. On peut la définir de manière géométrique, en disant que le dilaté de X par B est le lieu des points z tels que le translaté B_z de B par z

rencontre X. Il est facile de voir qu'analytiquement le dilaté est l'ensemble des vecteurs x-b, quand x décrit X et b décrit B. Pour avoir une expression plus symétrique en x et b, l'on substitue à B son symétrique par rapport à l'origine \bar{B} , et l'on écrit

$$\text{dilaté de X par B égale :} \\ X \oplus \bar{B} = \cup \{x+b\}, \quad x \in X, \quad b \in \bar{B}$$

Cette expression, due à Minkowski, donne lieu à des structures syntaxiques bien connues, et de longue date (1957...) (17), mais cependant fort utiles.

Elle montre en effet que

$$(4) \quad (X \oplus B_1) \cup (X \oplus B_2) = X \oplus (B_1 \cup B_2)$$

et que

$$(5) \quad (X \oplus B_1) \oplus B_2 = X \oplus (B_1 \oplus B_2)$$

La première de ces relations, selon laquelle l'addition de Minkowski distribue la réunion, permet d'obtenir des dilatations par des éléments structurants B de n'importe quelle taille par union de sommes élémentaires. Elle justifie théoriquement l'usage des logiques cellulaires (i.e. des éléments structurants inclus dans le carré de 3 x 3 pixels ou dans l'hexagène régulier de 7 pixels). Inversement (4) montre qu'il est faux de réduire les traitements morphologiques à ces logiques cellulaires. Ce serait confondre un concept et un mode opératoire, et qui plus est, selon une technologie qui n'est pas toujours la plus appropriée. En réalité (4) montre qu'il suffit qu'un matériel, ou un logiciel spécialisé possède l'union, l'intersection (pour les versions duales, comme l'érosion) et la translation pour programmer toute la morphologie. Nous pensons d'ailleurs personnellement que les technologies cellulaires manquent de souplesse, et que l'on verra de plus en plus de systèmes les abandonner au profit des trois opérations de base citées à l'instant, interprétées bien sûr en termes d'images à teintes de gris

10 - Relations syntaxiques et convexité

La relation (5) qui exprime la composition des dilatations sous forme d'une nouvelle dilatation constitue le premier semi-groupe de la morphologie. Il s'agit d'une relation syntaxique très générale, que l'on utilise le plus souvent pour combiner entre eux les éléments structurants convexes. On peut alors mettre en évidence deux sous semi-groupes aux propriétés plus fortes que la simple équation (5).

Le premier concerne les convexes compacts de l'espace euclidien. Selon un théorème de G. MATHERON (5), une famille B_λ , $\lambda \geq 0$ de compacts non vides constitue un semi-groupe continu à un paramètre, pour la dilatation, i.e. :

$$B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda+\mu} \quad \lambda, \mu \geq 0$$

si et seulement si les B_λ sont les homothétiques λB d'un compact convexe B dans l'homothétie de rapport λ .

De là vient qu'on peut conserver la forme du convexe par itération, et obtenir le dilaté de X par un grand carré en multipliant les dilatations par des carrés élémentaires, etc... (là encore, si l'itération, par pipe line par ex., correspond à une technologie plus simple que l'union, par parallélisme par ex., le théorème avantage les logiques cellulaires, sinon, il les désavantage au contraire).

Ce théorème est lourd de conséquences pour les familles d'ouvertures granulométriques ψ_λ invariantes par translation que nous avons présentées plus haut. Il montre en effet que si l'on veut qu'une telle famille soit invariante, on commute avec les homothéties de rapport $\lambda \geq 0$, i.e. :

$$\psi_\lambda(X) = \lambda \psi_1(X/\lambda)$$

(il est équivalent d'appliquer ψ_λ , ou de réduire X dans l'homothétie de rapport $1/\lambda$, d'appliquer ψ_1 et de faire l'homothétie λ du résultat), alors il faut et il suffit que ψ_λ soit union d'ouvertures morphologiques par des convexes compacts λB_i , pour une famille arbitraire de formes convexes B_i de base.

Si l'un des dogmes de la reconnaissance des formes veut que les transformations invariantes pour les similitudes soient privilégiées, alors on voit aisément que partant de n'importe quel compact convexe $B(\alpha)$ d'orientation α , la famille

$$\psi_\lambda = \cup \{X_{\lambda B(\alpha)}, \alpha \in \Omega\}$$

(Ω = groupe des rotations de l'espace considéré), définit une famille invariante pour les similitudes, et toute famille à un paramètre $\lambda \geq 0$ d'ouvertures invariantes par similitude s'écrit comme union de tels ψ_λ .

La seconde structure syntaxique relative aux convexes, que nous citerons ici, concerne les compacts de Steiner (5). Il est bien connu que l'on peut obtenir un carré en dilatant deux segments équipollents à ses côtés, ou un hexagone en en dilatant trois. Jusqu'à quel point cette circonstance est-elle générale ?

Raisonnons pour l'instant dans le plan euclidien. Si l'on se donne une mesure positive $l(d\alpha)$ et bornée distribuée sur le cercle unité des directions et que

$$(6) \quad X = \oplus_{\alpha} l(d\alpha)$$

représente le produit de tous les dilatés entre eux des segments $l(d\alpha)$, alors X est un compact convexe symétrique par rapport à l'origine, et réciproquement (5). On appelle classe de Steiner la famille \mathcal{S} des compacts vérifiant la relation (6). On voit sans peine que si X et X' appartiennent à \mathcal{S} , $X \oplus X'$ appartient aussi, et admet pour mesure directionnelle $l(d\alpha) + l'(d\alpha)$. Autrement dit, dans la classe \mathcal{S} , non seulement X et $l(d\alpha)$ sont deux données équivalentes, mais le passage de l'une à l'autre fait correspondre la somme de Minkowski à l'addition arithmétique usuelle.

Dans l'espace à trois dimensions les compacts de Steiner sont une sous classe stricte des compacts convexes symétriques, mais leurs propriétés restent les mêmes.

S.R. STERNBERG, dans son système Genesis 2000, exploite de façon très élégante les propriétés des compacts de Steiner à fins d'intelligence artificielle morphologique. On est parfois amené à isoler dans une scène une forme géométrique convexe B que l'on veut reprendre pour en faire un élément structurant pour la suite du traitement. Si B est Steiner (ex. fig. 7), il suffit alors de repérer les points de sortie $x_1 \dots x_n$ d'une famille d'in-

tercepts parallèles équidistants dans une direction

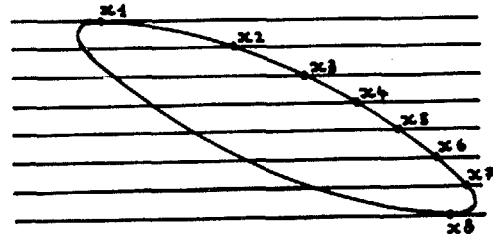


Fig. 7 - Sorties d'intercepts dans un compact de Steiner

quelconque (leur espacement est associé à la précision avec laquelle on veut les $l(d\alpha)$). A la digitalisation près, la suite de points $x_1 \dots x_n$ est équivalente à la donnée de B , et surtout elle transpose B sous forme opératoire. Pour dilater une fonction quelconque X par B , il suffit en effet de la dilater par $x_2 - x_1$, puis le résultat par $x_3 - x_2$, etc... jusqu'à $x_n - x_{n-1}$ (ce qui, soit dit en passant, n'avantage pas les logiques cellulaires). Dans ce dernier exemple, la syntaxe des compacts de Steiner a donc permis d'extraire de l'image elle-même les éléments d'information qui allaient permettre de la transformer par la suite.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - F. PRETEUX : Détection automatisée de différents organes en coupes scanner (Colloque Image, GRETSI CESTA, 1984), 6 p.
- 2 - F. MEYER : Iterative Image Transformations for an Automatic Screening of Cervical Smears (Journal of Histochemistry and Cytochemistry, Vol. 27, n° 1 January 1979, pp. 128-135).
- 3 - S. BEUCHER : Analyse automatique de gets d'électrophorèse bidimensionnelle, rapport interne Ecole des Mines (Février 1982), 10 p.
- 4 - G. FLOUZAT et Al : Aide automatique à la compréhension des images en télédétection : modélisation des caractères morphologiques de la texture (Colloque Image GETSI-CESTA, 1984), 6 p.
- 5 - G. MATHERON : Random sets and Integral Geometry, Wiley 1975, 275 p.
- 6 - J. SERRA : Image Analysis and Mathematical Morphology. Ac. Press, 1982, 600 p.
- 7 - G. MATHERON : Filters an lattices, rapport interne Ecole des Mines, Sept. 1983, 36 p.
- 8 - J. SERRA : Les filtres morphologiques, rapport interne Ecole des Mines, Fév. 1982, 17 p.
- 9 - S.R. STERNBERG : Cellular Computers and biomedical Image, Processing in lect. notes in medical informatics, n° 17, Springer Verlag, 1982.
- 10 - Ch. LANTUEJOL : Détection automatique des lignes de défaut dans les eutectiques lamellaires, rapport interne, 1978, 22 p.
- 11 - H. DIGABEL : An indirect method for counting Particles in 3-D and 2-D spaces. in lect. notes in Biomathematics, n° 23, Springer Verlag, 1978, pp. 331-338.



-
- 12 - B. LAY et Ch. LANTUEJOL : Morpholog User's Guide, Ecole des Mines de Paris, Ed. 1983
84 p.
 - 13- F. MEYER : Empiricism or Idealism... ("Pattern Recognition in Practice", E.S. Geselma and L.N. Kanal, Editors, North-Holland Publishing Co ; 1980, pp. 21-33)
 - 14 - F. MEYER : The perceptual graph : a new algorithm. (ICASSP 82. Proc., IEEE Internat. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Paris, 3-5 May 1982, pp. 1932-1935).
 - 15 - F. MAISONNEUVE : Odinaux transfinis et sur (ou sous-)potentes, rapport interne, Ecole des Mines de Paris, Novembre 1982, 30 p.
 - 16 - J. SERRA : Quelques semi-groupes de filtrages morphologiques, rapport interne, Ecole des Mines de Paris, Avril 1983, 30 p.
 - 17 - H. HADWIGER : "Vorslesungen über inhalt Oberfläche, und Isoperimetric", Springer, Berlin 1957, 312 p.