



TRANSFORMATION COMBINATOIRE D'IMAGES:
APPLICATION A L'ANALYSE DE CERTAINS TYPES DE SCENES.

Combinatory Transformation of Images:
Application to the Analysis of Certain Types of Scenes.

Jaime LOPEZ KRAHE

Laboratoire Image - ENST - 36 rue Barrault 75013 PARIS

RESUME

Nous proposons ici une transformation combinatoire applicable aux modèles discrets multidimensionnels. Elle est particulièrement adaptée au traitement de certains types d'images numériques à motif répétitif, ce qui permet d'en dégager le motif de base.

La mise en oeuvre de cette transformation appliquée à un modèle et à K-dimensions passe par la recherche de K-chaines hamiltoniennes de coût minimal.

Dans le cas des images on travaillera sur deux graphes complets non orientés dont les sommets correspondent aux lignes (colonnes) de l'image et les arcs sont le résultats d'une fonction de dissemblance entre les couples de lignes (colonnes). Le problème étant N. P. complet et de dimension assez grande. Les solutions optimales ne semblent pouvoir être trouvées, mais des solutions sous-optimales donnent des résultats satisfaisantes.

On présente la possibilité d'une transformation inverse, et quelques procédés sont proposés pour faciliter la résolution des problèmes réels.

SUMMARY

We propose one combinatory transformation applied to multidimensional discret models.

It is a methode particularly suited to the processing of digital images characterized by a pattern repetition, allowing the extraction of the base pattern.

The application of this transformation to a K-dimensional model leads to the search of K-Hamiltonian chains of minimum cost.

In the case of the images, we'll work with two complete not-oriented graphs, having its vertices corresponding to the lignes (columns) of the image, and its edges being a result of a difference fonction from pair of lignes (columns) of the scene image.

Having a large dimension, and being N-P complete, optimum solutions may not be found. Non-optimum solutions have been considered, giving satisfactory results.

We present the possibility of a inverse transformation, and some procedures are proposed for application purposes.



TRANSFORMATION COMBINATOIRE D'IMAGES
COMBINATORY TRANSFORMATION OF IMAGES

Jaime LOPEZ KRAHE

1 Introduction

La transformation non linéaire présentée ici dans une application aux images est obtenue par permutation de lignes et colonnes de manière à minimiser la somme des distances entre lignes et colonnes adjacentes; Elle est appliquée sur des exemples d'images à structure périodique de manière à dégager le motif principal

Ce problème de caractérisation et reconnaissance des structures est déjà abordé en traitement numérique des images par des méthodes diverses dont on pourrait citer:

- les méthodes de traitement global qui n'impliquent pas un prétraitement de l'image. Les plus importantes sont les méthodes linéaires basées sur l'analyse de la fonction d'autocorrélation ou de la transformée de Fourier de l'image et de ses propriétés dans le cas de fonctions périodiques (DUD-73) Ces méthodes permettent de dégager les directions privilégiées d'une structure périodique et les fréquences dominantes.

- les méthodes qui travaillent après un pré-traitement adapté de l'image. Il s'agit en général d'une chaîne de processus séquentiels (détecteurs de contours, opérateurs spécialisés, caractérisation de paramètres,...) suivis d'un procédé de classification ou de reconnaissance soit statistique soit structurelle.

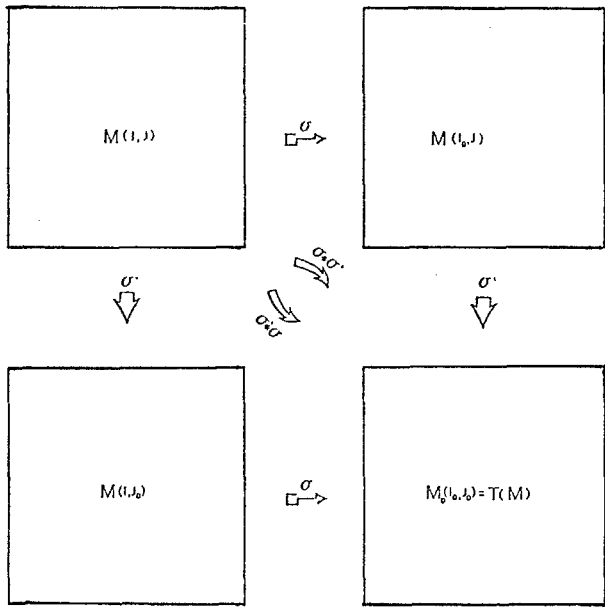


Fig. 1

Ainsi, les méthodes dérivés de la géométrie intégrale appliquées sur les contours de l'image

<MAJ-78> ou certains méthodes utilisées dans l'analyse des textures <GAG-78> <MON-81>.

Une méthode proche visant à permettre de reconstituer une image brouillée par permutation de ses lignes avait été déjà proposée <LOP-82>. L'image de départ étant supposée inconnue, elle pouvait être retrouvée par l'application d'une mesure appropriée de la ressemblance entre les lignes adjacentes.

Un certain rapprochement peut être trouvé aussi avec les techniques des matrices de permutation utilisées en sémiologie graphique <BER-77> Il est possible que la méthode proposée ici puisse permettre un traitement automatique des réarrangements effectués dans ce cas.

2. Approche théorique et définitions

Soit une image numérique \$M(I, J)\$ à \$I\$ lignes et \$J\$ colonnes \$M^* \{M(\sigma_i, \sigma_j)\}\$ est l'ensemble des images qui peuvent être formées par permutation des lignes et colonnes avec:

$$\sigma_i = 1, I! ; \sigma_j = 1, J! ; |M^*| = J! \cdot I!$$

\$M_0 [I_0, J_0] \in M^*\$ est une image telle que la somme des dissemblances entre lignes contigues

$$\sum_{i=1, I-1} d(i, i+1)$$

et entre colonnes contigues

$$\sum_{j=1, J-1} d(j, j+1)$$

soit minimale. \$D=d(i, i')\$ et \$D'=d(j, j')\$ sont les matrices des fonctions de dissemblance binnivoques entre les lignes et les colonnes. Nous avons utilisé par commodité le carré de la distance euclidienne:

$$d(i, i') = \sum_{j=1, J} [M(i, j) - M(i', j)]^2$$

$$d(j, j') = \sum_{i=1, I} [M(i, j) - M(i, j')]^2$$

Dans notre cas \$D\$ et \$D'\$ sont des matrices symétriques à diagonale nulle:

$$d(i, i') = d(i', i); d(i, i) = 0$$

bien que dans le cas général ceci n'est pas nécessaire.

Nous pouvons définir ainsi l'application \$\sigma\$ telle que

$$I! \xrightarrow{\sigma} I_0 ; J! \xrightarrow{\sigma'} J_0$$

A partir d'une image \$M(I, J)\$, \$M \in M^*\$

$$M(I, J) , M \in M^*$$

$$M(I, J) \xrightarrow{\sigma} M(I_0, J)$$

$$M(I, J) \xrightarrow{\sigma} M(I, J_0)$$

$$M(I, J) \xrightarrow{\sigma * \sigma'} M(I_0, J_0) = M_0 \text{ ou } T(M) = M_0$$

TRANSFORMATION COMBINATOIRE D'IMAGES
 COMBINATORY TRANSFORMATION OF IMAGES

Jaime LOPEZ KRAHE

Etant donnée l'indépendance de ces applications, on peut vérifier facilement quelques propriétés :

$$\sigma * \sigma' = \sigma' * \sigma$$

$$\sigma^n = \sigma$$

Dans les exemples des applications aux images, nous allons utiliser les conventions de la figure 1

La figure 2 nous montre un exemple de transformation sur une image synthétique d'un échiquier en haut à gauche. L'image transformée (en bas à droite) nous montre le motif de base de l'image originale. Tous les échiquier donnent la même transformée.

La figure 3 correspond à un échiquier à 45°. Le motif dégagé par la transformation nous permet (par symétries et translation) d'obtenir l'image originale

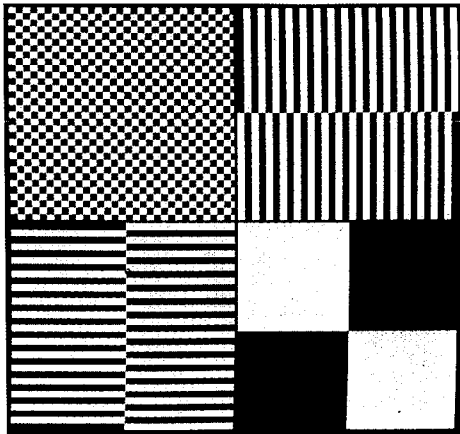


Fig. 2

Le problème peut être formalisé aussi en assimilant les lignes d'une image aux sommets (X) d'un graphe complet G (X, U) et les colonnes aux sommets (X') d'un autre graphe G' (X', U'). Pour tout couple de sommets il existe un arc (U), (U') non orienté ayant par valeur le résultat de la fonction de dissemblance entre les deux lignes (colonnes) associées. Il s'agit dans ce cas de trouver les deux chaînes hamiltoniennes de coût minimal (CHCM) de G et G' pour résoudre le problème et trouver Mo.

Notons que Mo n'est pas nécessairement unique, mis à part les solutions symétriques évidentes, il peut exister des chaînes equidissemblables de coût minimal

Une généralisation de cette transformation pour des modèles discrets à K dimensions ne présente pas de difficulté $M[I_1, I_2, \dots, I_k] ; |M^*| = I_1' I_2' \dots I_k'$

$$d(i_1, i_1') = \sum_{i_2=1, I_2} \dots \sum_{i_k=1, I_k} [M(i_1, i_2, \dots, i_k) - M(i_1', i_2, \dots, i_k)]^2$$

avec G1, G2... GK graphes complets et la résolution des K chaînes hamiltoniennes de coût minimal associées à chaque graphe.

3 Transformation inverse

Cette transformation peut avoir une inverse T⁻ telle que la chaîne hamiltonienne soit de coût maximal et non plus minimal. Le problème peut être résolu de la même manière que la transformation directe, il suffit de prendre les valuations négatives dans les arêtes des graphes G (X, -U) (avec un décalage éventuel s'il y a des contraintes de positivité dans les programmes employés) et d'appliquer les mêmes algorithmes que pour la CHCM. La transformation inverse permet de disperser au maximum les informations contenues dans l'image. Dans l'exemple de l'échiquier on obtiendrait comme transformée inverse un échiquier dont chaque case a la taille du pixel.

Les relations $M \in M^*, T(M)=M, T^{-}(M)=M^{-}$ sont évidentes.

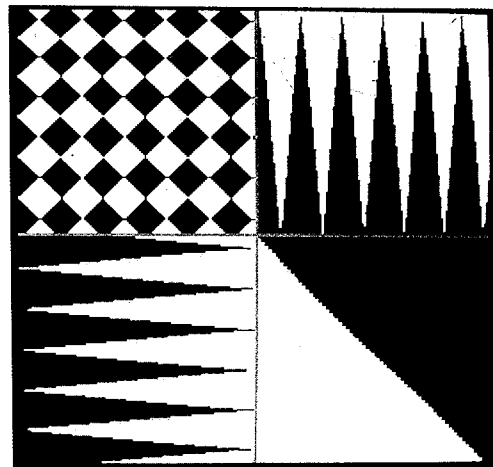


Fig. 3

4. Complexité du problème et algorithmes.

Le problème de recherche d'une CHCM dans un graphe est non polinomiale (NP) complet, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme connu dont la complexité soit une fonction polynomiale de N. Il s'agit d'un problème d'ordonnement proche du célèbre problème du voyageur du commerce travelling Salesman Problem: TSP pour lequel plusieurs algorithmes ont été proposés <BUR-79>.



TRANSFORMATION COMBINATOIRE D'IMAGES
COMBINATORY TRANSFORMATION OF IMAGES

Jaime LOPEZ KRAHE

Dans le cas général du TSP, on cherche un circuit hamiltonien de coût minimal dans un graphe orienté, les algorithmes adaptés à ce problème peuvent convenir à la résolution du CHCM dans un graphe $G = (X, U) / X = N$. Il suffit de définir un sommet fictif X_{n+1} tel que

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, d(n+1, i) = d(i, n+1) = k$$

On résout le TSP sur ce graphe pour obtenir un cycle à $n+1$ arrêtes et après avoir enlevé les deux arêtes partant de X_{n+1} on obtient la CHCM de G .

Nous avons ainsi adapté et testé quelques algorithmes <LIT-63>, <LAU-77> <CH-78>, <LIN-73>, mais étant donné la taille des données à traiter (nous avons travaillé sur des images 128x128) il semble exclu pour le moment de trouver des solutions optimales. Les solutions sous-optimales semblent satisfaisantes et le meilleur compromis (résultat/temps) semble être obtenu par des algorithmes heuristiques plutôt que par des recherches exhaustives d'optimalité nécessairement limités dans le temps.

5 Application expérimentale et résultats

Nous avons appliqué la méthode sur quelques images à structure périodique une maille rectangulaire et une ruche>. Ces images ont été sous-échantillonnées (128 lignes x 128 colonnes) pour limiter la complexité du problème

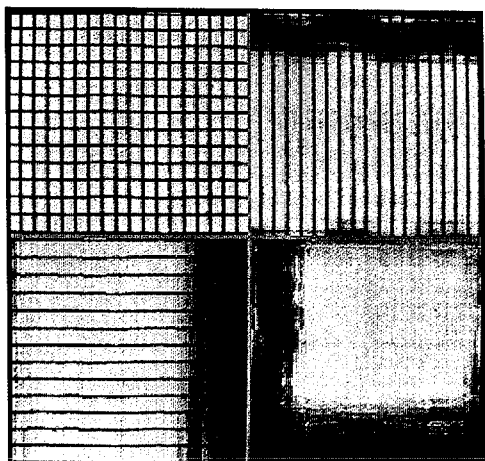


Fig. 4

Nous avons déjà vu sur les image 2 et 3 les résultats obtenus sur des images artificielles. Il s'agit dans ces cas de CHCM optimales (les matrices comportent des lignes et colonnes à dissemblance nulle). Les images 4 et 5 dont la disposition indiquée dans la figure 1, montrent des images réelles auxquelles nous avons appliqué la

transformation. Dans le cas présent les solutions obtenues ne sont pas optimales. les algorithmes utilisés ont dû être limités par le temps. Cependant dans les deux cas la transformation commence à dégager le motif de base, et les résultats peuvent être considérés satisfaisants.

Des recherches sont en cours pour faciliter la convergence des algorithmes. Il semblerait que la dégradation du signal par sous-échantillonnage, mais aussi par réduction de niveaux de gris de manière à comprimer l'espace de la fonction de dissemblance, puissent donner quelques résultats positifs.

6. Etude des permutations

Les deux permutations obtenues (I_0 et J_0) nous permettent de retrouver l'image originale (M) à partir de l'image transformée M_0 .

Ces permutations nous donnent aussi des informations sur la nature de l'image originale et le processus de transformation. Elles codifient d'une manière indépendante la périodicité et la fréquence du motif dans chaque dimension.

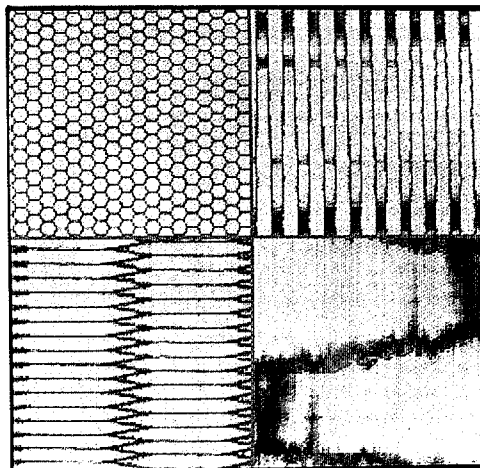


Fig. 5

Voici les premiers éléments des permutations obtenues dans l'image de la figure 4 (grillage)

lignes: 125, 115, 105, 95, 85, 75, 65, 55, 45, 35, 25, 15, 5, 4, 14, 24, 34 44, 54, 64, 74, 84, 94, 104, 114, 124, 123, 113, 103, 93, 83, 73, 63, 53, 43, 33, 23, 13, 3, 112, 122, 102, 92, 82, 72, 62, 52, 42, 32, 22, 12, 2, 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 101, 111, 121, 120, 110, 100,...

colonnes: 121, 111, 101, 91, 81, 71, 61, 51, 41, 31, 21, 1, 11, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90,



TRANSFORMATION COMBINATOIRE D'IMAGES
COMBINATORY TRANSFORMATION OF IMAGES

Jaime LOPEZ KRAHE

100, 110, 120, 119. 109, 99, 89, 79, 69, 59, 49, 39, 29. 19, 9, 2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, 102, 112, 122, 127, 117, 107, 97, 87, 77, 67, 57, 47, 37 27, 17, 7 4 14, 24. 34,..

Malgré quelques sauts, dûs à la sous-optimalité des résultats, on peut constater l'uniformité des écarts dans les permutations obtenues en fonction de la périodicité de l'image

L'étude des permutations peut être un paramètre important lors d'une interprétation postérieure des images.

7. Conclusion

Nous avons présenté une transformation combinatoire qui peut être adaptée à des modèles discrets multidimensionnels. Elle se caractérise par son application "globale" sans prétraitement, notamment dans le cas des images où elle a été testée

Un inconvénient important est qu'elle fait appel à des problèmes NP complets dans sa version optimale, mais les solutions sous-optimales semblent donner, aussi des bons résultats

L'application de cette transformation à des images à caractère répétitif nous permet de dégager les motifs d'origine. L'étude des permutations obtenues nous donne aussi des renseignements sur l'image originale

D'autres applications sont envisageables notamment: la détection de symétries axiales dans des images le codage économique de certaines images (M^0 + deux permutations)

Citons, pour finir, qu'elle nous a permis de détecter des inhomogénéités vertical-horizontale dans notre système de numération, erreur qui était passée inaperçue aux tests statistiques habituels.

Je tiens à remercier MM. D. ASSELINEAU, C. NASR et B. GHOLIZADEH pour leur contribution à l'expérimentation des algorithmes.

<BUR 79> R. E. Burcard
Travelling Salesman and Assignment Problems: a survey
Ann. of Discrete Mathematics, 4, 1979 pp. 193, 215

<CRI 74> N. Christofides
Bounds for the travelling Salesman Problem
Op. Res. 20 (1972), 22 (1974)

<DUD 73> R O Duda P E Hart
Pattern Classification and Scene analysis
Wiley interscience USA 1973

<GAG 78> A Gagalowicz
Nouvelles perspectives d'application d'un modèle de vision à l'analyse et classification des textures.
Congès AFCET/IRIA Rec. des Formes et Traitement des images
Chatenay Malabry - Fév. 1978, pp. 238, 245

<LAU 77> J. L. Laurière
Programmation automatique
Coll Int Artificielle
CNRS Strasbourg Sept. 1977

<LIN 73> S. Lin and B. W. Kernighan
An Effective Heuristic Algorithm for the travelling Salesman Problem.
Op. Res. vol 21, 1973, pp. 498-516

<LIT 63> J. Little and al. An algorithm for the travelling Salesman Problem
Op. Res. Vol. 11, 1963, pp. 972, 989

<LOP 81> J. Lopez Krahe, D. Asselineau
Reconstitution automatique d'une image numérisée désordonnée
AFCET, Rec. des Formes et Int. Artificielle. Nancy, Sept. 1981, pp. 361, 370

<MAI 78> Ph. Maire, P. Guills
Caractérisation des réseaux linéaires par la rose des directions
Analyse quant. des microstructures en Sc. Biol et Mes
1978. pp 235 252

<MON 81> J Monne F. Schmitt and D Massaloux
Bidimensional texture Synthesis by Markov Chains
CGIP Vol. 17, 1981, pp. 1, 23.

BIBLIOGRAPHIE

<BER 73> J. Bertin
Sémiologie graphique
Gauthiers-Villars Mouton, PARIS 1973

<BER 77> J. Bertin
La graphique et le traitement graphique de l'information
Ed. Flammarion, PARIS 1977