PREMIER COLLOQUE IMAGE

Traitement, Synthèse, Technologie et Applications

BIARRITZ – Mai 1984 –

CORRECTION DES IMAGES OBTENUES A TRAVERS UN MILIEU ALEATOIRE

CORRECTION OF THE IMAGES THROUGH A RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

H. DEBART

SINTRA ALCATEL Département DSM - 1, Avenue A. Briand 94117 ARCUEIL CEDEX

RESUME

Une lentille transforme un objet situé dans son plan focal. Entre la lentille et l'objet se trouve un milieu dont l'indice est aléatoire. On représente l'indice du milieu par un développement orthogonal. On examine la possibilité de correction des irrégularités du milieu par un déphasage approprié sur la lentille. On montre la correspondance qui existe entre des déphasages de loi appropriée et les termes du développement de l'indice, et on calcule le défaut résiduel après correction. Ce dispositif peut être utilisé pour corriger une image, ou l'émission d'une source optique, ou pour étudier expérimentalement les propriétés d'un milieu.

SUMMARY

A lens transforms an object located in its focal plane. The light is crossing a medium whose index of refraction is randomly variable. This index is represented by an orthogonal expansion. The possibility of improving the image by correcting the irregularities is examined. The method of correction consists of using of additionnal phase shifts on the lens. The correspondance one-to-one between phase shifts according to a convenient law and the terms of the expansion is shown, and the residual imperfection after correction evaluated. The device can be of use to impose on image, or the emission of an optical source, or to study experimentally the random properties of a medium.

CORRECTION DES IMAGES OBTENUES A TRAVERS UN MILIEU ALEATOIRE

H. DEBART

CORRECTION OF THE IMAGES THROUGH A RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

I. INTRODUCTION

On étudie la correspondance lentille-plan focal quand un milieu aléatoire d'indice variable les sépare. Le principe consiste à développer en série de FOURIER l'indice du milieu, et également l'amplitude et la phase du champ.

On cherche à corriger l'image en amplitude par une loi de phase appropriée appliquée sur la lentille. Cette correction est possible quand $\frac{Kr_o^2}{F} \gg 1$, si r_o est le rayon caractéristique de la lentille sur laquelle on suppose la variation du champ gaussienne (r_o est le rayon pour lequel la puissance tombe à 1/e de sa valeur centrale). On établit une correspondance entre les corrections de phase dont on détermine la loi et les termes du développement de l'indice.

On donne une évaluation du défaut résiduel dans le cas où le milieu est l'atmosphère turbulente représentée par la loi statistique de KOLMOGOROV

II. FORMULATION DU PROBLEME

a- Représentation du milieu

Le milieu est caractérisé par un indice qu'on notera :

$$1 + \mu(x,y,z)$$

$\mu(x,y,z)$ est une variable aléatoire. Sa statistique dépend évidemment de la nature du milieu ; pour l'atmosphère, on utilise couramment la représentation statistique de KOLMOGOROV.

Nous ne ferons pour le moment aucune hypothèse sur la statistique de μ.

Comme on s'intéresse à une zone de profondeur finie entre la source et son plan focal, situé à une distance F, on peut développer la variable aléatoire μ en série de FOURIER en z.

$$\mu(x,y,z)=\mu_o(x,y)+\sum_1^\infty \mu_n(x,y)\cos\frac{2\pi nz}{F} +\sum_1^\infty \nu_n(x,y)\sin\frac{2\pi nz}{F}$$

b- Représentation de la solution

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + K^2(1+\mu) = 0$$

On tire une équation simplifiée en extrayant de μ le facteur de propagation régulière e^{iKz}, et en négligeant alors le laplacien longitudinal, comme c'est l'usage, justifié par le fait que le rayon de corrélation des irrégularités est très grand devant la longueur d'onde.

On pose alors $U = e^{iKz}\psi$

et on obtient l'équation en ψ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} +2iK\frac{\partial\psi}{\partial z} + K^2\mu\psi = 0$$

La source est supposée de structure gaussienne, on appelle r_o son rayon utile, défini par la condition : puissance au point (r_o) = puissance au centre/e

Appelons $\psi_v = e^{i\phi_v+A_v}$

la solution dans le vide. Elle est parfaitement connue, et on l'écrira, avec une excellente approximation :

$$\phi_v = K\frac{(x^2+y^2)}{2}.K^2\frac{r_o^4F-z(F^2+K^2r_o^4)}{z^2F^2+K^2r_o^4(z-F)^2}$$

$$A_v = -\frac{(x^2+y^2)}{2}\frac{K^2r_o^2F^2}{z^2F^2+K^2r_o^4(z-F)^2} + A_{vo}(z)$$

le terme $A_{vo}(z)$ représentant l'amplitude sur l'axe.

La solution correspondant au milieu irrégulier peut s'écrire :

$$\psi = e^{i(\phi_v+\phi) + (A_v+A)}$$

en désignant respectivement par ϕ et A les corrections de phase et d'amplitude à apporter.

On peut écrire alors les équations gouvernant ϕ et A ; en reportant la solution de la forme (1) dans l'équation de propagation.

Ces équations sont :

$$\alpha)\quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} -2\left(\frac{\partial\phi_v}{\partial x}.\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi_v}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] - 2K\frac{\partial\phi}{\partial z} + K^2\mu = 0$$

$$\beta)\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} +2\left[\frac{\partial A_v}{\partial x}.\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial A_v}{\partial y}.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right] + 2\left[\frac{\partial\phi_v}{\partial x}.\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial\phi_v}{\partial y}.\frac{\partial A}{\partial y}\right] + 2\left[\frac{\partial A}{\partial x}.\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right] + 2K\frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

On notera que seule la première équation (α) contient la variable μ explicitement.

III. DEFINITION DE LA CORRECTION

La solution parfaitement satisfaisante des équations précédentes serait : A = 0 dans tout l'espace (0,F).

C'est-à-dire que le milieu ne modifierait aucune image. Mais les équations (α) et (β) deviennent dans cette hypothèse, des équations aux dérivées partielles en φ seulement et ne sont pas compatibles, ce qui n'est pas surprenant.

a- Formalisme

Pour s'adapter à la représentation du milieu choisi, on développera tout naturellement la phase additionnelle ϕ dans l'intervalle (0,F) en série de FOURIER.

$$\phi = \phi_o + \sum_1^\infty \phi_n \cos\frac{2\pi nz}{F} + \sum_1^\infty \phi_n \sin\frac{2\pi nz}{F}$$

L'amplitude additionnelle, qui est nulle dans le plan de la source, peut être représentée par la série de FOURIER.

$$A = \sum_1^\infty A_n \sin\frac{\pi zn}{2F}$$

Si une correction ϕ est appliquée (quelle qu'elle puisse être d'ailleurs), l'amplitude parasite subsistant dans le plan focal est :

$$A_p = A_1 - A_3 + A_5 + \ldots.$$

b- Equations de définition

On a remarqué que l'équation (α) contient seule l'indice aléatoire du milieu.

On peut alors l'écrire dans les conditions suivantes :

1) On remplace μ et ϕ par leurs développements de FOURIER ci-dessus définis.

2) On y remplace A par 0.

Cette opération permet de définir une phase corrigée, après quoi on pourra évaluer l'amplitude parasite résiduelle.

L'équation (α) devient dans ces conditions

$$-2\left(\frac{\partial\phi_v}{\partial x}.\frac{\partial\phi_o}{\partial x} + \frac{\partial\phi_v}{\partial y}.\frac{\partial\phi_o}{\partial y}\right) - 2\sum_1^\infty\left(\frac{\partial\phi_v}{\partial x}\frac{\partial\phi_n}{\partial x} + \frac{\partial\phi_v}{\partial y}.\frac{\partial\phi_n}{\partial y}\right)\cos\frac{2\pi nz}{F}$$

$$-2\sum_1^\infty\left(\frac{\partial\phi_v}{\partial x}.\frac{\partial\psi_n}{\partial x} + \frac{\partial\phi_v}{\partial y}.\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\right)\sin\frac{2\pi nz}{F}$$

$$-\left[\frac{\partial\phi_o}{\partial x} + \sum_1^\infty\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\cos\frac{2\pi nz}{F} + \sum_1^\infty\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\sin\frac{2\pi nz}{F}\right]^2$$

$$\left[\frac{\partial\phi_o}{\partial y} + \sum_1^\infty\frac{\partial\phi_n}{\partial y}\cos\frac{2\pi nz}{F} + \sum_1^\infty\frac{\partial\psi_n}{\partial}\sin\frac{2\pi nz}{F}\right]^2$$

$$+2K\sum_1^\infty\phi_n\left(\frac{2\pi n}{F}\right)\sin\frac{2\pi nz}{F} - 2K\sum_1^\infty\psi_n\left(\frac{2\pi n}{F}\right)\cos\frac{2\pi nz}{F}$$

$$+K^2\left[\mu_o + \sum_1^\infty\mu_n\cos\frac{2\pi nz}{F} + \sum_1^\infty\nu_n\sin\frac{2\pi nz}{F}\right] = 0$$

Pour obtenir des relations différentielles entre ϕ_n, ψ_n, on intègre sur l'intervalle (0,F) après multiplication par

$$\cos\frac{2\pi nz}{F}, \sin\frac{2\pi nz}{F}$$

On considère les fonctions

$$\frac{\partial\phi_v}{\partial x}\cos\frac{2\pi nz}{\partial F}, \frac{\partial\phi_v}{\partial y}\cos\frac{2\pi nz}{F}, \ldots \text{ etc}$$

comme orthogonales ; elles sont d'ailleurs rigoureusement calculables et l'approximation peut être justifiée.

Comme par ailleurs on a rigoureusement

$$\int_0^F \frac{K^2 r_o^4 F - z(F^2 + K^2 r_o^4)}{z^2F^2 + K^2 r_o^4 (z-F)^2}\, dz = \text{Log}\left(\frac{Kr_o^2}{F}\right)$$

L'intégration après multiplication par $\cos\frac{2\pi nz}{F}$ fournit l'équation

$$-K\text{Log}\left(\frac{Kr_o^2}{F}\right)\left(x\frac{\partial\phi_n}{\partial x} + y\frac{\partial\phi_n}{\partial y}\right)$$

$$-\frac{\partial\phi_o}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}F\ (a)$$

$$-2K\pi n\psi_n$$

$$+K^2\mu F/2 = 0$$

Pour aller plus loin, on supposera que :

$$\frac{Kr_o^2}{F} \gg 1$$

On est alors dans la zone de champ proche/
Cette condition peut s'écrire aussi :

$$r_o^2 \gg \frac{F\lambda}{2\pi}$$

Par exemple, pour une source laser de $10{,}6\mu$ de longueur d'onde et une distance focale de 1000 mètres.

$$\frac{F\lambda}{2\pi} \sim 1{,}5.10^{-3}\,m^2$$

Dans la pratique, la surface utile de la source est beaucoup plus grande et la condition est vérifiée.

On néglige alors le terme (a). On pose, pour une simple raison de commodité

$$\mathrm{Log}\left(\frac{Kr_o^2}{F}\right) = m$$

L'équation précédente et son homologue obtenue par l'opérateur

$$\int_o^F x \sin \frac{2\pi nz}{F}\, dz$$

s'écrivent simplement

$$- mr\frac{\partial\phi_n}{r} - 2\pi n\psi_n + \frac{KF}{2}\mu_n = 0$$

$$- mr\frac{\partial\phi_n}{\partial r} + 2\pi n\phi_n + \frac{KF}{2}\nu_n = 0$$

Pour écrire ces deux équations, on est passé en coordonnées cylindriques en posant
$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$, et on a utilisé l'identité

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = r\frac{\partial}{\partial r}$$

On pose alors $\frac{KF}{2m}\mu_n = \mu_{1n}$

$$\frac{KF}{2m}\nu_n = \nu_{1n}$$

et on élimine ψ_n par dérivation, ce qui donne une équation du second ordre en ϕ_n.

$$r^2\frac{\partial^2\phi_n}{\partial r^2} + r\frac{\partial\phi_n}{\partial r} + \left(\frac{2\pi n}{m}\right)^2\phi_n = -\frac{2\pi n}{m}\nu_{1n} + r\frac{\partial\mu_{1n}}{\partial r} = f_n(r,\theta)$$

$$\text{si} \quad \boxed{f_n = -\frac{2\pi n}{m}\nu_{1n} + r\frac{\partial\mu_{1n}}{\partial r}}$$

La solution de l'équation homogène est

$$\phi_n = C_1\cos\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right) + C_2\sin\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right)$$

et l'intégrale générale en résulte :

$$C_1 = -\frac{m}{2\pi n}\int\frac{f_n}{r}\sin\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right)dr + C_{10}$$

$$C_2 = \frac{m}{2\pi n}\int\frac{f_n}{r}\cos\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right)dr + C_{20}$$

Comme on recherche la solution nulle avec f_n, le terme ϕ_n en résulte sous la forme

$$\phi_n = -\frac{m}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right)\int\frac{f_n}{r}\sin\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right)dr$$
$$+\frac{m}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right)\int\frac{f_n}{r}\cos\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right)dr$$

IV. REALISATION DE LA CORRECTION

On suppose le rayon de corrélation des irrégularités assez grand, pour pouvoir considérer f_n comme constant. Alors, les intégrales peuvent être calculées entre r_1 et R_1 .

La zone entre 0 et r_1 est considérée comme non corrigeable, ce qui est sans importance si r_1 est assez petit.

R_1 est le rayon extérieur utile de la lentille.

Donc dans ces hypothèses

$$\phi_n = A\cos\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right) + B\sin\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right)$$

Comme ψ_n sera exactement de la même forme, on doit faire correspondre au même terme du développement de l'indice des déphasages de la forme

$\cos\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right)$

et $\sin\left(\frac{2\pi n}{m}\mathrm{Log}r\right)$

affectés de facteurs constants. Ces facteurs décroissent rapidement avec n.

Ces termes sont réalisables sous forme de filtres holographiques.

V. EVALUATION DE L'ERREUR RESIDUELLE

On utilse la seconde équation (β) dont on indique ci-après l'allure :

$$\frac{\partial^2\phi_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_o}{\partial y^2} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_n}{\partial y^2}\right)\cos\frac{2\pi nz}{F} + \ldots$$

$$+ 2K \sum_1^{\infty} \frac{\pi n}{2F} A_n \cos\frac{\pi nz}{2F} = 0$$

et on évalue les termes parasites en intégrant sur (0,F) après multiplication par $\cos\frac{\pi z}{2F}$, $\cos\frac{3\pi z}{2F}$ ... etc.

A_1, terme prépondérant, peut être ainsi évalué ; on prend $\phi_o = 0$ et on néglige les termes tels que

$$\frac{\partial A_n}{\partial x} \quad \frac{\partial\phi_n}{\partial x}$$

On trouve ainsi

$$A_1 \sim \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \left(r.\frac{\partial\phi_n}{\partial r}\right).\, e^{\frac{2\pi nF}{Kr_o^2}}$$

formule qui définit une variable aléatoire dont on peut calculer les variances. On considérera les variables :

$r\,\frac{\partial\psi n}{\partial r}$ comme indépendantes, de variance σ_n^2

Donc :

$$\overline{A_1} = \frac{1}{4}\,\Sigma\sigma^2_n\, e^{\frac{4\pi nF}{Kr_o^2}}$$

On a vu que $r\,\frac{\partial\psi_n}{\partial r}$ est de l'ordre de grandeur de ν_{1_n} soit $\frac{KF}{2m}\,\mu_n$.

Si le milieu est l'atmosphère turbulente, obéissant à la loi statistique de KOLMOGOROV.

$$\overline{\nu}^2_{\ 1} = D^2 l_o^{\ 2/3} (4r_o/F)^2\, \frac{1}{2} \quad \overline{\nu}^2_{\ n} = \overline{\nu}^2_{\ 1}\ .n.^{-5/3}$$

$$\overline{\nu}^2_{\ 1n} = \frac{2K^2}{m^2}\, D^2 l_o^{\ 2/5}\ r_{o^2}\ .\ n^{-5/3}$$

et

$$\overline{A}^2_{\ 1} = \left(\frac{K^2}{2m^2}\right) D^2 l_o^{\ 2/3}\, r_{o^2} \sum_1^{\infty} n^{-5/3}\ e^{\frac{4nF}{Kr_o^2}}$$

Valeur extrêment faible avec les données numériques usuelles de la turbulence.

VI. CONCLUSION

On peut donc théoriqument améliorer considérablement une image fournie par la propagation à travers un milieu aléatoire dans la zone dite de "champ proche". Les irrégularités du milieu peuvent être très importantes, à condition que le rayon de corrélation ne soit pas trop faible.

En dehors de l'amélioration des images, on peut penser à utiliser cette méthode pour une investigation expérimentale des milieux non représentables par une modèlisation statistique théorique, par exemple la mer pour une propagation acoustique.