PREMIER COLLOQUE IMAGE
Traitement, Synthèse, Technologie et Applications

BIARRITZ – Mai 1984 –

DISCRETE ATTRIBUTES AND COMPATIBILITY WITH THE ANALOG NOTION
ATTRIBUTS DISCRETS ET COMPATIBILITE AVEC LA NOTION ANALOGIQUE

Jean-Marc CHASSERY

Lab. TIM3 - Equipe Reconnaissance des Formes , Microscopie Quantitative.
CERMO - BP 68 - 38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX

RESUME

L'analyse d'images est fondée sur la représentation numérique de la scène. La description des éléments présents dans la scène nécessite de définir des attributs discrets associés à des concepts analogiques. Comme exemple, on peut citer la notion de connexité, élément de base de la description des notions de région et de frontière. On a également les notions morphologiques associées à la paramétrisation de la géométrie, de la forme ou de toute autre notion liée à un aspect qualitatif de l'observation humaine.

Le problème posé concerne la procédure de définition d'un attribut discret en concordance avec le concept analogique. Cette notion de concordance sera illustrée par deux exemples de passage du continu au discret empruntés à la théorie du traitement du signal. Ceci sera suivi d'un développement avec les notions discrètes de zoom numérique, de connexité et de convexité.

SUMMARY

Image analysis is based on discrete representation of observed scene. To describe and interpret the scene it is necessary to define discrete features. These features have to be associated to continuous notions. As an example, we can mention the connectivity which is essential to define the concepts of region and contour.

Every notion associated to a qualitative aspect of human vision is concerned by the transition between continuous and discrete spaces.

This paper deals with methods currently used to solve the transition between continuous and discrete spaces. Illustrations are given in the particular cases of connectivity, convexity and digital interpolation.

DISCRETE ATTRIBUTES AND COMPATIBILITY WITH THE ANALOG NOTION

ATTRIBUTS DISCRETS ET COMPATIBILITE AVEC LA NOTION ANALOGIQUE

Jean-Marc CHASSERY

Il ne fait aucun doute actuellement que la majorité des traitements effectués en analyse d'images s'effectuent au niveau discret compte tenu de l'essor des techniques de calcul, voire même du développement d'architectures spécialisées. [1]

Il n'en demeure pas moins que certains traitements, dits traitements hybrides, combinent le domaine optique et le domaine numérique.

Disposant de l'information visuelle représentée à l'aide d'une fonction analogique ainsi que de sa transcription discrète couramment représentée à l'aide de tableaux numériques, il se pose le problème de la transcription du domaine analogique au domaine discret.

Dès le début, ce problème apparaît avec la notion d'image numérique. Comment définir mathématiquement une telle notion afin que le tableau numérique soit représentatif de la fonction théorique associée à la scène.

La difficulté présente dans le terme de représentativité provient essentiellement de la diversité des espaces utilisés dans les deux domaines de représentation. L'un est associé à l'espace $\mathbb{R}^2$ pour le cas d'images planes et l'autre à l'espace Z^2.

Pour le cas précis de la définition d'images numériques on a recours à la théorie des Distributions qui permet de donner une cohérence mathématique au passage continu discret et ceci se formule dans le théorème d'échantillonnage. Certes la formulation fonctionnelle présente dans ce théorème rend impossible la reconstitution exacte de l'image analogique à l'aide de sa représentation numérique mais il nous assure d'une certaine maîtrise du passage continu-discret. [2]

Avec cet exemple de transcription on peut dès à présent étudier l'origine de la complexité de la définition d'attributs discrets.

Une telle complexité est originaire de plusieurs sources que j'énumèrerai sous 3 aspects . [3]

Un premier aspect concerne la difficulté à donner une interprétation, fût-elle qualitative de la scène observée. Ceci constitue la base du problème et on est souvent affronté à des divergences de diagnostic ou à une non-objectivité du processus aboutissant à l'interprétation de la scène.

Ce type de difficulté est décrit lorsqu'on aborde les problèmes d'association de la vision humaine et de la vision par ordinateur. C'est le problème de la définition objective de ce que l'on perçoit.

Un second aspect concerne la difficulté à synthétiser une base de représentation qui sera le support de description de l'attribut discret.

Ceci est illustré dans le cadre de méthodes de prétraitement d'images où on utilise les notions de représentation spatiale et de représentation fréquentielle de l'image. Déjà la définition même de l'image numérique en est un exemple d'illustration montrant le lien entre ces 2 modes.

Au niveau de la recherche de contours on se pose la question du choix entre le filtrage fréquentiel où l'utilisation d'un masque associé à un opérateur de détection de frontières. [4]

Enfin un troisième aspect, en liaison directe avec ce qui nous intéresse, concerne la difficulté à définir le lien entre l'attribut continu et l'attribut discret. En effet, outre le problème du choix de l'attribut discret, il faut tenir compte d'une certaine compatibilité avec la notion analogique correspondante.

Ceci fait référence à la diversité des espaces de définition. Dans le cas de la notion d'image numérique, ceci a été résolu par l'utilisation de la théorie des distributions qui représente une extension de la théorie des fonctions.

Cependant pour un grand nombre de notions, notions d'interprétation géométrique par exemple, l'image discrète sera plus utilisée comme une grille de points pondérés par des valeurs de niveaux de gris plutôt que sous la forme d'une pondération de distributions de Dirac.

C'est dans cette optique de compatibilité, notion qu'il faut préciser, que se poseront les problèmes de définition des attributs discrets. Pour cela nous étudierons trois exemples précis : l'agrandissement d'images, la notion de connexité et la notion de convexité.

Auparavant, après cette représentation non exhaustive des difficultés du passage continu-discret, on peut se poser la question de la nécessité de transcrire.

En effet, la notion d'image discrète étant définie, ne peut on écarter momentanément ces problèmes de compatibilité si on utilise l'image comme un tableau numérique ou une matrice.

On a alors recours à une représentation de graphe sur lequel on décrit la notion de consécutivité permettant d'aboutir à des notions cohérentes d'objets, de contour, d'intérieur ... Mais dès que l'on avance dans le domaine de l'interprétation de l'image on rencontre vite la nécessité de définir des descripteurs permettant de paramétrer des notions telles que la surface, le périmètre, la courbure ...

Or de telles notions sont liées au problème de la génération de l'image numérique à partir de la scène analogique et c'est à ce moment que se pose le problème de la justification de tels descripteurs.

En outre, si on prend l'exemple des méthodes de prétraitement on peut noter que la représentation matricielle de l'image est suffisante. Ceci est lié au fait que le passage continu-discret a été effectué lors de l'élaboration de la théorie du traitement du signal numérique. [5]

En effet tout comme pour l'analyse d'images sous ses aspects vision et compréhension, le traitement du signal a lui-même été confronté à ce passage analogique-numérique. On a vu apparaître des transformations spécifiques au mode numérique telles la Transformée en z et la Transformée de Fourier Discrète. C'est ensuite, sur la base de telles transformations que les méthodes de filtrage numérique ont été conçues avec l'abord de problèmes de définitions et de compatibilités, analogues à ceux de l'imagerie.

C'est de ce type de procédé, passage analogique-discret, que l'on rencontre dans l'élaboration de filtres numériques, que je me suis inspiré pour définir les attributs discrets.

Lors de la recherche d'un filtre numérique, pour n'en citer que deux, on peut utiliser soit une technique d'échantillonnage soit une technique de transcription.[6,7]

Le filtre numérique est caractérisé par la suite réponse à l'échantillon unité, elle-même associée à la fonction système par transformation en z.

Le lien entre les filtres analogique et discret est formulé soit en termes d'échantillonnage (invariance de la réponse impulsionnelle) soit en termes de transcription (transformation bilinéaire).

La première évoque l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle alors que la seconde évoque un changement de variable permettant de passer de la fonction de Transfert à la fonction Système.

C'est dans cet esprit que nous allons envisager des exemples d'application.

Un premier exemple concerne la notion de zoom numérique. L'image numérique sera approximée par une image analogique qui elle-même sera de nouveau échantillonée. C'est un procédé d'interpolation où la notion de compatibilité se justifie par la représentation de l'image en termes de distribution et d'utilisation du théorème d'échantillonnage.

Un second exemple concernera la notion de connexité où on verra que le terme de consécutivité utilisé dans le domaine discret est plus une notion de graphe qu'une notion topologique de connexité.

Enfin un troisième exemple concernera la notion de convexité dont une transcription adéquate de la définition au domaine discret permettra de prouver une propriété reliant les deux concepts.

Zoom numérique [8]

Etant donnée une image numérique G de dimension N × M, une première méthode d'agrandissement consiste à étendre le spectre de Fourier discret de l'image G. Par Transformation inverse on obtient l'image agrandie. Ce processus est lié à l'hypothèse du théorème d'échantillonnage et on peut montrer qu'au niveau spatial cela correspond à une convolution discrète avec une suite réponse à l'échantillon unité séparable obtenue par échantillonnage de la fonction $\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{N}}$
En figure 1 on donne un exemple de cette méthode.

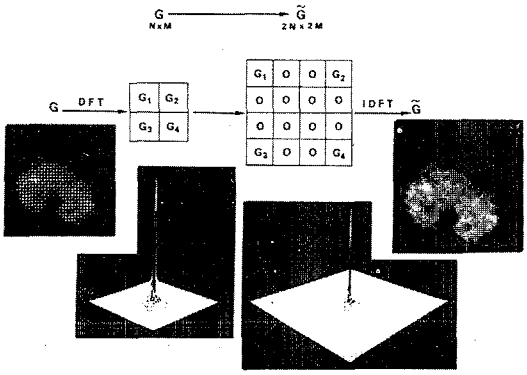

Figure 1 : interpolation trigonométrique.

La seconde méthode consiste à revenir au domaine analogique en considérant la convolution de l'image discrète (définie alors comme une distribution) avec un noyau de convolution (en l'occurrence une fonction séparable définie par produit de 2 fonctions splines B-cubiques associées chacune à une direction du balayage de l'image).

Ensuite l'image discrète agrandie est obtenue par échantillonnage de cette fonction image analogique.

La fonction spline B-cubique est couramment utilisée en raison de ses propriétés de continuité et de dérivabilité . Il est certain qu'une fonction plus lisse introduirait moins de distortion au niveau filtrage. Cet aspect de filtrage a été étudié en mettant en valeur la fonction système liant les transformées de Fourier des images initiale et agrandie.

On obtient, comme prévisible, un filtrage passe bas mais on peut constater au regard de la figure 2 que cette seconde méthode aboutit à un résultat quelque peu similaire à celui obtenu par utilisation de l'extension du spectre.

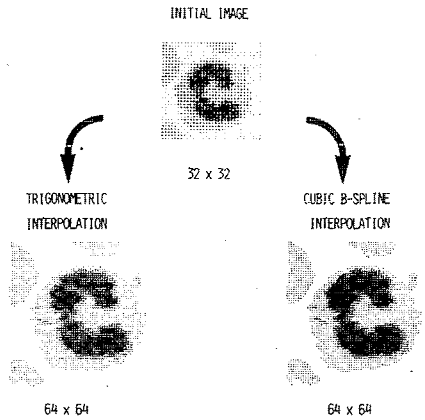

Figure 2 : Interpolation par fonctions splines et interpolation trigonométrique.

Connexité discrète [9]

En analyse d'images les méthodes de description sont liées à des modèles de similarité faisant intervenir respectivement les termes de région et de frontière . Ces termes sont définis à partir du concept de consécutivité qui lui-même est associé à la représentation de l'image discrète en terme de graphe.

Or une telle représentation est associée à un maillage de représentation du support de l'image. Ce maillage prend couramment les allures de maillage carré, maillage triangulaire ou maillage hexagonal.

Il est bien connu que le maillage carré pose très rapidement le problème du choix de la notion de consécutivité, la d_1-consécutivité ou la d_∞-consécutivité. Les préfixes d_1 et d_∞ sont associés aux métriques correspondantes, elles-mêmes associées aux voisinages V_1 et V_∞ également bien connus en analyse d'image et composés respectivement chacun de 5 points et de 9 points.

Toujours dans le cadre du maillage carré ces 2 notions de consécutivité doivent être utilisées simultanément pour aboutir à des formulationscorrectes des notions de région, de frontière, d'intérieur, d'arc, de courbe ...[10]

Le terme de formulation correcte est associé au fait que les notions justes prédéfinies avec la combinaison des d_1 et d_∞ consécutivités, permettent d'obtenir une version discrète du théorème de Jordan.

Cependant le problème posé est le suivant : cette notion de consécutivité est-elle associée à une notion de connexité au sens topologique du terme.

Ce qui revient à rechercher au niveau discret des topologies pour lesquelles la notion de connexité coïncide avec la notion de consécutivité couramment utilisée (on dit alors qu'il y a compatibilité).

Seul dans le cadre de la d_1-consécutivité ceci est possible. Plus précisément, la seule topologie pour laquelle on ait compatibilité entre la notion induite de connexité et la notion de d_1-consécutivité est définie par la base de voisinage: [11]

$$\begin{aligned} V(P) &= P \text{ si } I_P + J_P \text{ est pair} \\ &= V_1(P) \text{ sinon} \end{aligned}$$

Si, par contre on se place dans le cadre des autres maillages on montre que seul le maillage triangulaire nous fournit un exemple d'association de la notion de consécutivité à une notion topologique de connexité. La base de voisinage est représentée par l'ensemble des voisinages V(P), chacun composé du point P et de ses 3 voisins immédiats.

En conclusion, relative à cette notion discrète de connexité, l'aspect topologique n'est pas satisfaisant et il est plus correct d'utiliser le terme de consécutivité.

Convexité discrète [12]

A l'inverse de la précédente notion, la convexité se transcrit aisément au niveau discret sur le plan de la formulation et ceci permet d'obtenir une propriété intéressante de compatibilité entre les deux concepts analogique et numérique.

Etant donnée une composante connexe S de l'espace R^2, S sera convexe si elle vérifie la propriété suivante :

Pour tout couple (P,Q) de la composante S et pour tout réel α élément de]0,1[, on a :

$$\alpha P + (1 - \alpha) Q \in S$$

Propriété :

S_1 et S_2 étant 2 composantes convexes alors $S_1 \cap S_2$ est convexe et on définit l'enveloppe convexe d'une composante comme l'intersection des composantes convexes contenant cette forme.

La notion de convexité discrète va être définie à partir de la transcription de la notion de segment de droite dans le domaine discret.

Définitions :

Compte tenu du fait que le niveau de gris de l'image ne joue aucun rôle dans la convexité, nous supposerons avoir des images discrètes binaires A de dimension N x M.

Le fond sera caractérisé par la valeur 0 et les points objets par la valeur 1.

On note h le pas d'échantillonnage spatial permettant de passer du support de l'image continue à celui de l'image discrète définissant ainsi les points images de coordonnées (Ih, Jh) avec $(I,J) \in Z^2$.

On définit les notions suivantes :

$d_\infty (P,Q) = \text{Max} (|I_P-I_Q|,|J_P-J_Q|)$, avec P et Q points de R^2 de coordonnées (I_P,J_P) et (I_Q,J_Q).

$B_\infty (P,\varepsilon) = \{S \in R^2 ; d_\infty (S,P) \leq \varepsilon\}$

Un objet sera un ensemble de points images de valeur 1, maximal et connexe au sens de la métrique d_∞.

Notion de segment de droite discret [13]

Etant donnés 2 points P et Q appartenant à un même objet : on note $\overline{PQ}$ le segment de droite réel joignant P à Q.

La notion de segment de droite discret est à présent très bien définie et en figure 3 on a une illustration de la construction du segment de droite discret associé à un segment $\overline{PQ}$.

ROSENFELD a montré que le segment de droite réel $\overline{PQ}$ est recouvert à l'aide des sous-ensembles ouverts $\mathring{B}_\infty (P_i, h)$ centrés aux points P_i du segment de droite discret correspondant.

Le théorème qui suit démontre que ce recouvrement est réalisable à l'aide des boules $B_\infty(P_i,\varepsilon)$ avec ε valeur réelle strictement inférieure à h.

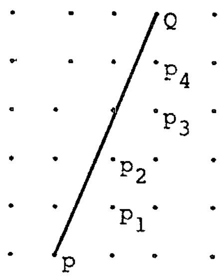

Figure 3 : Segment de droite continu et discret $\bar{PQ}$ $[P,P_1,P_2,P_3,P_4,Q]$

Théorème : [12]

Soient P et Q 2 points objets et P, P_1, ..., P_{n-1}, Q le segment de droite discret associé au segment $\overline{PQ}$.

Il existe un entier positif p tel que la valeur réelle $p/(P+1)h$ représente le rayon minimal des boules $B_\infty(P_i,\varepsilon)$ formant un recouvrement du segment $\overline{PQ}$.

Définition de la convexité discrète :

Une composante connexe S est convexe s'il existe ε réel vérifiant $\frac{h}{2} \leq \varepsilon < h$ tel que :
- pour tout couple (P,Q) de points de S
- pour toute valeur α réelle avec $0<\alpha<1$
- il existe un point image R appartenant à S tel que :

$$\alpha P + (1-\alpha)\, Q \in B_\infty\, (R,\varepsilon)$$

Remarque :

Etant donné un objet S, on peut déterminer le polygone convexe P(S) dont les sommets désignés par la suite V_i, sont des points objets de cet ensemble S [14]. Le polygone P(S) constitue l'enveloppe convexe au sens continu de l'ensemble S.

Si on désigne par [P(S)] l'ensemble des points images inclus dans le domaine délimité par le polygone P(S) on montrealors que [P(S)] correspond à l'enveloppe convexe discrète de S.

Pour cela afin de définir l'enveloppe convexe discrète comme l'intersection des composantes connexes convexes discrètes contenant la composante , on utilise le résultat qui suit liant la convexité et l'intersection, à savoir :

Théorème [12] :
Soient X et Y deux composantes convexes.
Alors si $X \cap Y$ est connexe, elle est convexe.

L'ensemble [P(S)] peut être obtenu par intersection de n trapèzes rectangulaires dont un des cotés s'appuie sur $\overline{V_i\ V_{i+1}}$.

Chacun de ces trapèzes est convexe au sens discret avec pour valeur de ε la valeur ε_i associée au coté $\overline{V_i\ V_{i+1}}$.

D'après le théorème précédent, on en déduit que [P(S)] est obtenu comme l'intersection des convexes au sens discret contenant S et par conséquent, il définit l'enveloppe convexe discrète.

On a ainsi démontré la propriété : l'enveloppe convexe d'un objet au sens discret correspond à l'ensemble des points images inclus dans l'enveloppe convexe au sens continu construite sur l'ensemble des points objets.

En ce qui concerne la compatibilité entre la convexité continue et la convexité discrète outre la formulation de la définition de la convexité au sens discret qui est très proche dans ses termes de celle de la notion de convexité continue, on montre le résultat suivant :

Théorème :

Soit S une composante connexe de R^2. Si pour tout échantillonnage de pas h, la composante connexe S_h de Z^2 est convexe au sens discret, alors S est elle-même convexe dans R^2.

Outre les exemples précités d'attributs discrets on peut également mentionner des notions associées à un concept comme la forme. C'est aussi dans le but d'étudier le passage continu-discret que par approximation les paramètres de courbure et d'imagerie ont fait l'objet d'une étude détaillée [15].

En conclusion, il est certain qu'une théorisation de l'analyse d'images discrètes, comme le propose la Morphologie Mathématique sur un point de vue ensembliste est à envisager [16]. Mais il n'en demeure pas moins vrai que dès que l'on aura recours à des modélisations de phénomènes liés à la structure variationnelle de l'image (niveau de gris, couleur, texture, forme ...) ou à des paramètres dimensionnés (surface, périmètre ...) il est nécess néssaire de faire référence au domaine analogique et c'est ce que l'on a tenté de montrer dans le terme de compatibilité.

REFERENCES

[1] DUFF, M.J.B. ; LEVIALDI, S. : Languages and Architectures for image processing, Academic Press, p : 236, 1981.

[2] RODDIER, F. : Distributions et Transformation de Fourier, Mac Graw Hill, p : 321, 1978.

[3] MARR, D. : Vision, Freeman ed. p : 397, 1982.

[4] LEVIALDI, S. : Finding the edge. Digital Image Processing. J.C. Simon et R.M. Haralick eds. Reidel Publ. 1981.

[5] OPPENHEIM, A. ; SCHAFER, R.W. : Digital Signal Processing. Prentice Hall Inc. p : 482, 1975.

[6] BELLANGER, M. : Traitement numérique du Signal. Masson. CNET-ENST, p : 320, 1980.

[7] BOITE, R. ; LEICH, H. : Les filtres Numériques. Masson. CNET-ENST, p : 415, 1980.

[8] CHASSERY, J.M. : Digital picture interpolation . Proc. of 5^{th} ICPR, Miami, pp : 1158-1161, 1980.

[9] CHASSERY, J.M. ; CHENIN, M.I. : Topologies on discrete spaces. Digital Image Processing, pp : 59-66, J.C. Simon et R.D. Haralick eds. Reidel Publ. 1981.

[10] ROSENFELD, A. ; KAK, A.C. : Digital Picture Processing vol 2, comp. Sciences and appl. math. p : 350, 1982.

[11] CHASSERY, J.M. : Connectivity and consecutivity in digital pictures. Comp. graphics and Image Proc., 9, pp : 294-300, 1979.

[12] CHASSERY, J.M. : Discrete convexity. Comp. vision, graphics and Image Proc., 21, pp : 326-344, 1983.

[13] ROSENFELD, A. : Digital straight line segments, IEEE Trans. Computer, 23, pp : 1264-1269, 1974.

[14] FREEMAN, H. : SHAPIRA : Determining the minimum area encasing rectangle for an arbitrary closed curve. Comm. ACM, 18, pp : 409-413, 1975.

[15] VEILLON, F. : Toward a systematic study of shape measures. 7^{th} ICPR, MONTREAL, 1984.

[16] SERRA, J. : Image analysis and Mathématical Morphology. Acad. Press. p : 610, 1982.