PREMIER COLLOQUE IMAGE
Traitement, Synthèse, Technologie et Applications

BIARRITZ – Mai 1984 –

SQUELETTE ET DISTANCE CARREE
SKELETON AND SQUARE DISTANCE

G. BERTRAND

E.S.I.E.E., 89, rue Falguière 75015 PARIS.

RESUME

On considère un maillage de R^2 en cellules élémentaires carrées identiques. Un objet X est modélisé comme étant une union finie de tels carrés.
Dans ce qui suit toutes les notions sont définies par rapport à la métrique carrée. Désignons par :
- AM(X) l'ensemble des centres des disques inclus dans X et maximaux (axe médian).
- AS(X) l'ensemble des centres des disques inclus dans X et qui touchent le bord de X en deux points différents (axe symétrique).

On sait que AM(X) et X ne sont pas homotopes et que AS(X) ne forme pas forcément une courbe (contrairement à ce qui se passe quand on utilise la métrique usuelle).
Ceci nous amène à définir le squelette de X, SQ(X), comme étant AM(X) auquel on rajoute certains points (ce qui revient à éliminer certains types de disques dans la définition de AS(X)).
Nous envisageons quelques propriétés du squelette :
- SQ(X) est une courbe (épaisseur nulle).
- AM(X) $\subset$ SQ(X) ceci assure que SQ(X) est bien centré et que la reconstruction de X à partir de SQ(X) est possible.
- X et SQ(X) sont homotopes (même nombre de trous et de composantes).

Le modèle choisi pour X, l'utilisation de la métrique carrée ainsi que les propriétés de SQ(X) permettent de disposer d'une notion de squelette facilement discrétisable.

SUMMARY

Consider a decomposition of R^2 into elementary square cells. An object X is viewed as being the finite union of such cells.
In the following all notions are defined with the square distance. Let us call :
- MA(X) the set of the centers of disks included in X and maximal (medial axis).
- SA(X) the set of the centers of disks included in X and touching the border of X in two different points (symmetrical axis).

We know that MA(X) and X are not homotopically equivalent and that SA(X) has not always zero thickness which is the contrary to what happens when using the usual distance.
This leads us to define the skeleton of X, SK(X), as being MA(X) to which we add some points (this is equivalent to ruling out some kinds of disks involved in the definition of SA(X)).
Some properties of the skeleton are considered :
- SK(X)has zero thickness.
- MA(X) $\subset$ SK(X). This insures that SK(X) is well centered and that reconstruction of X from SK(X) is possible.
- X and SK(X) are homotopically equivalent (same number of holes and of components).

The model chosen for X, the use of the square distance and the properties of SK(X) lead to a notion of skeleton which may be easily digitalized.

SQUELETTE ET DISTANCE CARREE

G.BERTRAND

SKELETON AND SQUARE DISTANCE

1. INTRODUCTION

Le squelette est une technique de représentation des objets dans les images. Dans le cas continu |1| et utilisant la métrique euclidienne le squelette possède les propriétés d'homotopie, de reconstruction, de centrage et il est une courbe.

Dans le cas discret les problèmes posés par l'utilisation d'une métrique non euclidienne et par la discontinuité des points sont tels que la notion de squelette n'est pas définie. Le squelette est approché via les algorithmes d'amincissement |2| |3|. Ces algorithmes possèdent l'inconvénient de conduire à une représentation qui ne possède pas les propriétés ci-dessus et qui n'est pas unique : le résultat obtenu dépend de la façon dont les algorithmes sont amorcés.

Nous proposons une notion de squelette utilisant la métrique carrée. Pour cela un objet "semi-discret" est considéré : cet objet est l'union de carrés élémentaires identiques.

2. POSITION DU PROBLEME

Soit X un objet du plan réel : $X \subset R^2$

Soit d une distance quelconque dans R^2 définissant des disques $D(x,r) = \{y \in R^2 | d(x,y) \leq r\}$

On dit qu'un disque inclus dans X est maximal s'il n'existe pas d'autre disque inclus dans X et le contenant.

On désigne par axe médian de X l'ensemble AM(X) des points qui sont centre d'un disque inclus dans X et maximal.

On désigne par axe symétrique de X l'ensemble AS (X) des centres des disques inclus dans X et qui touchent la frontière de X en deux points différents.

Quand d est la distance euclidienne et supposant X assez "régulier" AM(X) possède les propriétés suivantes |1| :

- AM(X) est une courbe (épaisseur nulle).
- AM(X) est homotope à X (même nombre de trous et de composantes)
- Si à chaque point de AM(X) on affecte la taille du disque maximal dont il est le centre on peut reconstruire X à partir de AM(X).
- AM(X) est bien "centré" par rapport à X et donc représentatif de sa forme.

De plus AS(X) est quasiment identique à AM(X) et possède également les propriétés ci-dessus.

AM(X) et AS(X) sont donc, pour la métrique euclidienne, deux façons possibles d'envisager le squelette d'un objet X.

Considérons maintenant un échantillonnage de R^2 par une maille carrée :

Soient g_1 et g_2 deux vecteurs de R^2 orthogonaux et tels que $||g_1|| = ||g_2|| = a$

On désigne par E la maille carrée

$E = \{x \in R^2 / x = ig_1 + jg_2,\ (i,j) \in Z^2\}$

On sait |4| que dans E il est courant, pour des raisons de complexité de calcul, d'envisager les deux distances suivantes :

soient $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 = i_1 g_1 + j_1 g_2$, $x_2 = i_2 g_1 + j_2 g_2$

$d_4(x_1,x_2) = |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2|$

$d_8(x_1,x_2) = \max(|i_1 - i_2|, |j_1 - j_2|)$

Ces distances correspondent, dans E, à des disques qui ont la forme de carrés (carrés "droits" pour d_8 et carrés "inclinés à 45°" pour d_4). Dès lors, si on veut définir dans E la notion de squelette, deux types de problèmes vont se poser :

1) des problèmes dûs à l'utilisation d'une métrique différente de la métrique euclidienne.
2) des problèmes dûs au fait que l'on travaille dans un ensemble discontinu de points.

En effet, indépendemment de la discrétisation, l'utilisation d'une métrique où les disques ont des portions rectilignes donne lieu à des difficultés.

Ainsi considérons dans R^2 la métrique carrée d_c :

Soient $x = (x_1,x_2) \in R^2$ et $y = (y_1,y_2) \in R^2$,

$d_c(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$

On constate alors que, utilisant cette distance :

- AM(X) n'est pas toujours homotope à X (voir figure 1)
- AS(X) n'est pas toujours une courbe : si on prend, par exemple, un objet X dont le contour est un carré, AS(X) est formé de tous les points qui sont à l'intérieur du carré.

Par conséquent, pour la métrique carré, ni AM(X), ni AS(X) ne peuvent être considérés comme étant le squelette de l'objet X.

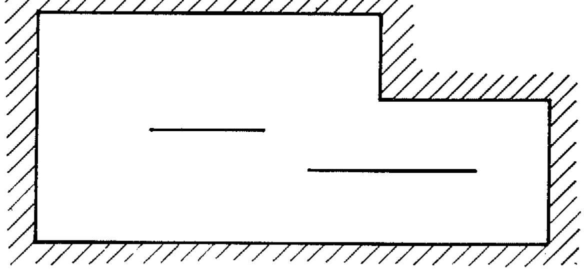

Figure 1 : Dans R^2 et en utilisant la métrique carrée un objet et son axe médian ne sont pas toujours homotopes.

SQUELETTE ET DISTANCE CARREE

G.BERTRAND

SKELETON AND SQUARE DISTANCE

Nous proposons, dans le paragraphe suivant, une définition possible du squelette d'un objet en utilisant la métrique carrée. Afin de nous affranchir des problèmes de discrétisation cette définition n'est pas donnée pour un objet $Y \subset E$ mais pour la représentation cellulaire de Y : à tout point $x \in E$ on associe la cellule carrée élémentaire $C(x) = \{y \in R^2 / d_c(x,y) \leqslant \frac{a}{2}\}$; on désigne alors par représentation cellulaire de $Y \subset E$ l'ensemble $X \subset R^2$ tel que $X = \bigcup_{x \in Y} C(x)$.

On dit qu'un objet $X \subset R^2$ est un objet cellulaire s'il existe une maille carrée E et une partie $Y \subset E$ telle que X soit la représentation cellulaire de Y.

3. SQUELETTE

Dans ce qui suit on considère R^2 muni de la métrique carrée et des objets cellulaires X bornés. AM(X) n'étant pas homotope à X on va rajouter des points à AM(X) de façon à obtenir la propriété d'homotopie.

Considérons l'ensemble CM(X) des carrés maximaux inclus dans X. Soit $C \in CM(X)$ et soit F(C) l'ensemble des points qui appartiennent à la frontière commune de C et $\overline{C} \cap X$.

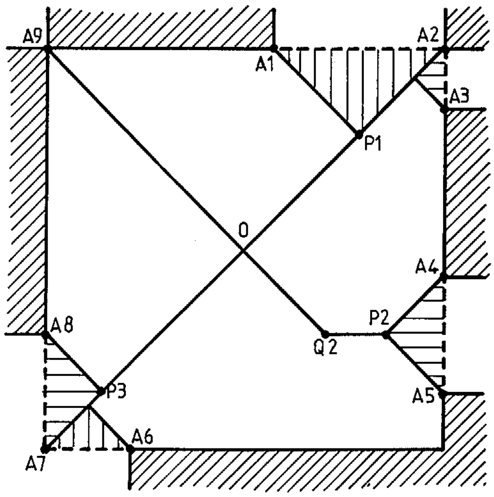

Figure 2 : Un carré maximal C inclus dans X; $\overline{X}$ est représenté en hachuré foncé. B(X) comprend 4 composantes de bord $B_1=\{A_1A_2, A_2A_3\}$, $B_2=\{A_4A_5\}$, $B_3=\{A_6A_7, A_7A_8\}$, $B_4=\{A_9\}$. B_1 et B_3 sont composées chacune de 2 segments, B_2 et B_4 de 1 segment. Les triangles T(S) sont représentés en hachuré clair. Le squelette est formé des segments de droite du type OQ_i, Q_iP_i (Q_i étant éventuellement confondu avec P_i).

On désigne par composante de bord de C toute composante connexe de F(C). Soit B(C) l'ensemble des composantes de bord de C.

Pour chaque composante de bord on considère les ensembles formés des points situés sur un même côté de C : on appelle segment un tel ensemble. Soit S(C) l'ensemble des segments de C.

A chaque segment $S \in S(C)$ on associe un triangle rectangle isocele T(S) dont la base est S et qui est inclus dans C (voir figure 2).

On désigne par zone d'influence de C l'ensemble :

$$ZI(C) = C \cap \overline{\bigcup_{S \in S(C)} T(S)}$$

A chaque composante de bord $B \in B(C)$ on associe le squelette de B relativement à C qui est l'ensemble SQ(C,B) construit de la façon suivante : on considère le plus grand segment S de B ainsi que la médiatrice de S; cette médiatrice coupe T(S) en son sommet P et coupe la diagonale de C qui est la plus proche de P en un point Q (voir figure 2); SQ(C,B) est alors constitué par les points P et O (centre de C) ainsi que par la partie des deux segments de droite OQ et QP qui est comprise dans ZI(C). On désigne alors par squelette de C l'ensemble

$$SQ(C) = \bigcup_{B \in B(C)} SQ(C,B)$$

Le squelette de X est l'ensemble qui est l'union des squelettes de ses carrés maximaux :

$$SQ(X) = \bigcup_{C \in CM(X)} SQ(C)$$

Un exemple de squelette est donné figure 3. Cet exemple est tiré de |2| et apparaît également dans |3|.

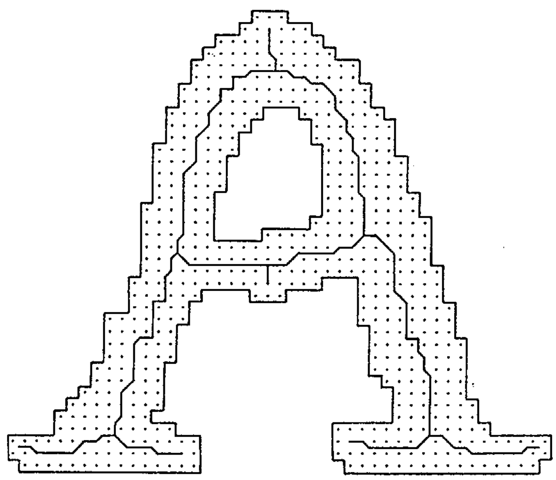

Figure 3 : Un objet X sous forme discrète (l'ensemble des points•) et le squelette de la représentation cellulaire de X.

4. PROPRIETES DU SQUELETTE

Par construction du squelette de X on a les deux propriétés suivantes :

PROP 1 : $AM(X) \subset SQ(X)$

Ceci assure la possibilité de reconstruction

PROP 2 : SQ(X) est une courbe

PROP 3 : SQ(X) est homotope à X

Soit $C \in CM(X)$

Soit X_1 l'ensemble $X_1 = X - ZI(C) + SQ(C)$

Par construction de SQ(X) X_1 est homotope à X.

On peut réitérer l'opération effectuée sur le carré C en considérant les carrés maximaux dont les centres se trouvent au voisinage du sommet des triangles T(S) avec $S \in S(C)$. Procédant ainsi de proche en proche on peut étendre l'opération d'érosion homotopique à tous les carrés maximaux :

$$X \text{ est homotope à } X' = X - \bigcup_{C \in CM(X)} ZI(C) + \bigcup_{C \in CM(X)} SQ(C)$$
$$= X - \bigcup_{C \in CM(X)} ZI(C) + SQ(X)$$

Il reste à vérifier que l'ensemble X' ainsi obtenu est bien le squelette. Pour cela il faut montrer que $\forall\, P \in X$ et $P \notin SQ(X)$ il existe $C \in CM(X)$ tel que $P \in ZI(C)$.

Ceci peut être vu de la façon suivante :

Considérons le plus grand carré C' de centre P et inclus dans X. Ce carré touche $\overline{X}$. On constate alors qu'il existe un carré maximal C contenant C' tel que $P \in ZI(C)$. Voir figure 4.

Par construction de SQ(X) on constate également que:

PROP 4 : Les points de bout d'arc de SQ(X) appartiennent à AM(X).

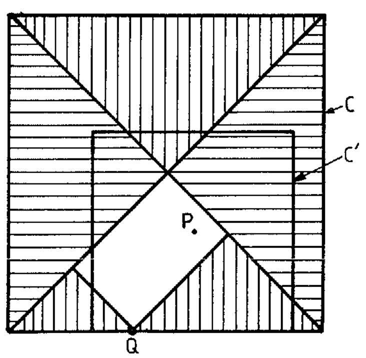

Figure 4 : C'est le plus grand carré de centre P inclus dans X. C' touche $\overline{X}$ en un point Q. On a représenté en hachuré une position limite des triangles T(S) avec $S \in S(C)$, C étant un carré maximal contenant C'. On voit que $P \in ZI(C)$.

En un sens SQ(X) est donc le squelette "minimal" qui peut être défini sur X : en effet si on retire des points de SQ(X) et ce de façon homotopique, alors on va enlever des points de bout d'arc qui sont des points de AM(X) perdant ainsi la propriété de reconstruction. Remarquons cependant qu'une telle opération peut être envisagée dans le cas où on voudrait effectuer un filtrage de l'objet et de son squelette.

Nous avons défini SQ(X) en ajoutant des points à AM(X). On aurait très bien pu partir de AS(X) et retirer certains points de façon à rétrécir AS(X) jusqu'à obtenir une courbe.

La propriété suivante indique une relation entre les points de SQ(X) et les carrés dont le centre appartient à AS(X) :

PROP 5 : SQ(X) est formé de l'ensemble des centres des carrés inclus dans X qui appartiennent à un des 3 types suivants :

type 1 : carrés maximaux

type 2 : carrés qui touchent $\overline{X}$ en deux points de contact situés sur deux côtés adjacents en un sommet P du carré, ces points de contact entourant une composante de X qui est telle que le sommet le plus proche de cette composante est P. (Voir figure 5).

type 3 : carrés qui touchent $\overline{X}$ en deux points de contact qui sont situés sur un même côté et qui entourent une composante de X symétrique par rapport à la médiatrice du côté.

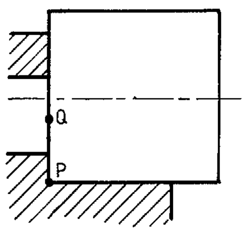

Figure 5 : Carré de type 2 : $\overline{X}$ est représenté en hachuré, Q est plus proche de P que des autres sommets du carré.

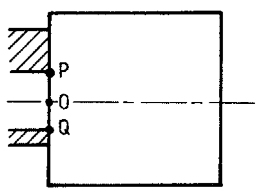

Figure 6 : Carré de type 3 : $\overline{X}$ est représenté en hachuré, PQ est symétrique par rapport à O.

SQUELETTE ET DISTANCE CARREE

G.BERTRAND

SKELETON AND SQUARE DISTANCE

La propriété 5 nous permet d'étudier les types de carrés qui ont été éliminés dans la définition de SQ(X). Tous les carrés qui touchent $\overline{X}$ en deux points situés sur deux côtés opposés sont retenus dans la définition de SQ(X).
Parmi tous les carrés qui touchent $\overline{X}$ en deux points sur un même côté il est nécessaire de ne garder dans la définition du squelette que ceux du type 3 sinon le squelette ne serait plus une courbe. (Ce sont ces carrés qui sont responsables du fait que AS(X) n'est pas une courbe).
Par contre il est possible d'envisager une définition du squelette où l'on retient tous les carrés inclus dans X et qui touchent $\overline{X}$ en deux points de contact situés sur deux côtés adjacents. (Extension des carrés de type 2). Soit SQ'(X) le nouveau squelette ainsi défini. SQ'(X) est en un certain sens le squelette maximal de X car si on rajoute des points on risque d'obtenir un squelette qui n'est plus une courbe. SQ'(X) possède les propriétés 1, 2, 3 évoquées ci-dessus mais comporte beaucoup de branches n'apportant que peu d'information quant à la forme de l'objet. (Voir figure 7).

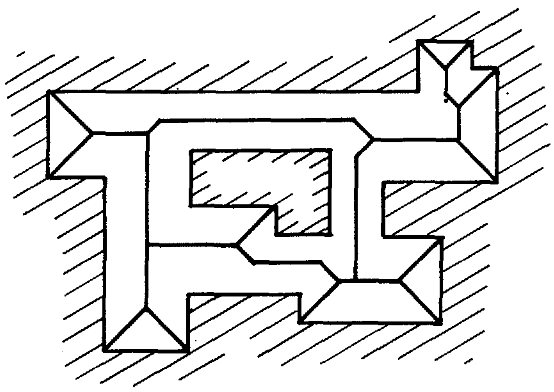

Figure 7 : Un objet X et son squelette SQ'(X).

5. CONCLUSION

Ayant résolu les problèmes dûs à l'utilisation de la métrique carrée il nous reste à discrétiser totalement la notion de squelette en travaillant sur une maille.
Soit E une maille carrée et soit $X \subset E$. Soit Y la représentation cellulaire de X. Nous avons défini SQ(Y), considérons SQ(X) comme étant l'équivalent discret de SQ(Y). Il nous parait souhaitable que SQ(X) possède les deux propriétés suivantes :

P_1 : SQ(X) est inclus dans SQ(Y)

P_2 : SQ(X) et X sont homotopes

On a alors le résultat évident : il n'est pas possible que SQ(X) soit inclus dans E et satisfasse aux propriétés P_1 et P_2.
Ceci peut être illustré en considérant simplement une bande horizontale dont la hauteur est paire :

. . . . .

. . . . .

SQ(Y) est la ligne médiane de cette bande et il n'y a pas de point de E appartenant à SQ(Y).

Pour résoudre ces problèmes de discrétisation nous proposons d'utiliser les points situés au centre de chaque carré élémentaire de E |5|. Ceci conduit à la notion de maille dérivée et de maille duale |6|.

Dans |5|,un algorithme utilisant une méthode de déplacement de carrés maximaux est proposé.
Cet algorithme conduit à un squelette qui est une représentation structurée de l'objet (le squelette n'est pas défini dans une maille). Nous avons étudié un algorithme opérant dans la maille dérivée de E et qui utilise des opérateurs locaux fonctionnant en parallèle |7|. Cet algorithme conduit à un squelette qui satisfait aux propriétés P_1 et P_2.

BIBLIOGRAPHIE

1- J.SERRA : "Image analysis and mathematical morphology", Academic Press, London, 1982.
2- S.STEFANELLI and A.ROSENFELD : "Some parallel thinning algorithm for digital pictures", JACM, Vol-18, 255-264, April 1971.
3- H.TAMURA : "A comparison of line thinning algorithms from digital geometry view point", Proc. 4th Int. Joint. Conf. on Pattern Recognition, Nov.7-10, 1978, 715-719.
4- A.ROSENFELD and J-L.PFALTZ : "Distance functions on digital pictures", Pattern Recognition 1, 1968, 33-61.
5- T.WAKAYAMA : "A core-line tracing algorithm based on maximal square moving", PAMI, Vol 4, N°1, Jan.1982.
6- G.BERTRAND : "Détermination de l'axe médian par sur-échantillonnage fictif" 4ème congrès Rec. des formes et Int. Artif., AFCET-INRIA eds, 265-275, Paris, 25-27 janv.1984.
7- G.BERTRAND : "Skeletons in derived grids" à paraitre, 7th Int. Conf. on Pattern Recognition Montreal, Jul.30-Aug.2, 1984.